ЛЕКЦИЯ № 5-6

Задачи приводящие к понятию дифференциальных уравнений.

Виды дифференциальных уравнений первого порядка

Основные понятия

При решении различных задач математики, физики, химии и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и её производные. Такие уравнения называются ***дифференциальными.***

$$F\left(x; y; y'; y''; ...; y^{(n)}\right) = 0$$

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называют ***обыкновенным***, в противном случае - дифференциальным уравнением в частных производных.

Наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется ***порядком*** этого уравнения.

Например, уравнение $y''' - 3y'' + 2y = 0$ - дифференциальное уравнение третьего порядка, а уравнение $x^2 y' + 5xy = y^2$ - дифференциальное уравнение первого порядка.

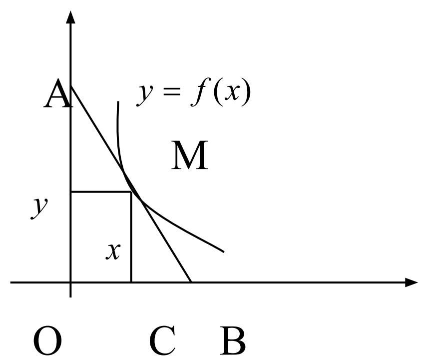
Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется его интегрированием, а график решения – интегральной кривой.

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Задача. Найти кривую, проходящую через точку А (4;1), зная, что отрезок любой касательной к ней, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

Решение. Пусть М(x;y) – произвольная точка кривой, уравнение которой $y = f(x)$

Для определенности предположим, что кривая расположена в первой четверти.



Для составления уравнения воспользуемся геометрическим смыслом производной: $y' = tg\,\alpha$. Из рисунка видно, что $tg(\angle MBC) = \frac{MC}{BC}$. Но

$$tg(\angle MBC) = tg(180^0 - \alpha) = -tg\,\alpha, \quad MC = y$$

По условию задачи AM=MB, следовательно, OC = CB = x.

Таким образом. Получаем $-tg\,\alpha = \frac{y}{x}$ или $y' = -\frac{y}{x}$. Решением полученного уравнения является функция $y = \frac{4}{x}$

Другие задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

- *Закон измерения массы радия описывается дифференциальным уравнением*

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

где $k > 0$ - коэффициент пропорциональности, $m(t)$- масса радия в момент *t*.

- *Закон изменения температуры тела в зависимости от времени*, описывается уравнением $\frac{dT}{dt} = k(T - t_0)$

где $T(t)$ - температура тела в момент времени t, k - коэффициент пропорциональности, t_0 - температура воздуха.

- *«Закон размножения бактерий»* описывается уравнением $\frac{dm}{dt} = km$, где $k > 0$.

- *Закон изменения давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря* описывается уравнением

$$\frac{dp}{dh} = -kp$$

где $p(h)$ - атмосферное давление воздуха на высоте h, $k > 0$

Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением первого называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию y и ее производную первого порядка. Обозначение:

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{или} \quad y' = f(x, y)$$

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, $C = const$, удовлетворяющая исходному уравнению при любых значениях постоянной C.

Геометрически общее решение представляет собой множество интегральных кривых на плоскости, зависящих от одного параметра C.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего решения при фиксированном значении постоянной C.

Для того чтобы из общего решения выделить одно частное решение задают так называемые начальные условия $y = y_0$ при $x = x_0$.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям называется ***задачей Коши***

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка может быть сформирована следующим образом:

Найти решение дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$.

Другими словами: найти интегральную кривую этого уравнения, проходящую через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши:

Если в дифференциальном уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и её частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку

- $M_0(x_0; y_0)$, то существует единственное решение $y = \varphi(x, C)$ этого уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям

Виды дифференциальных уравнений первого порядка

- Дифференциальные уравнения с разделенными переменными
- Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными
- Однородные дифференциальные уравнения
- Линейные дифференциальные уравнения
- Уравнения Бернулли
- Уравнения в полных дифференциалах
- Уравнения Лагранжа и Клеро

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Дифференциальное уравнение вида $M(x)dx + N(y)dy = 0$ называется *дифференциальным уравнением с разделенными переменными*.

Его общим интегралом является

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

, где C – произвольная постоянная

<u>Пример.</u> Решить дифференциальное уравнение

$$(x-2)dx + (y+1)dy = 0$$

<u>Решение.</u> Проинтегрируем обе части этого уравнения:

$$\int (x-2)\,dx + \int (y+1)\,dy = C$$

вычислив интегралы, получим:

$$\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{y^2}{2} + y = C$$

Получили общее решение или общий интеграл исходного уравнения.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$y' = f(x)\cdot\varphi(y) \quad \text{или} \quad M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

<u>Алгоритм решения:</u>

По определению производной $y' = \dfrac{dy}{dx}$

тогда

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot\varphi(y)$$

Умножим обе части уравнения на dx, получим:

$$dy = f(x)\cdot\varphi(y)\,dx$$

Разделяем переменные: $\dfrac{dy}{\varphi(y)} = f(x)\,dx$

Проинтегрируем обе части уравнения: $\displaystyle\int\frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)\,dx$

Окончательно будем иметь: $\hat{O}(y) = F(x) + C$ - общее решение или общий интеграл.

Пример. Решить дифференциальное уравнение:

$$2y'\sqrt{x} = y,$$

Решение. $y' = \frac{dy}{dx}, \quad 2\frac{dy}{dx}\sqrt{x} = y$

Умножаем на dx: $2\sqrt{x}dy = ydx$

Разделяем переменные: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

Интегрируем: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

Общее решение:

$$\ln y = \sqrt{x} + C$$

Алгоритм решения уравнения

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

Переносим одно слагаемое в правую часть

$$M_1(x)N_1(y)dx = -M_2(x)N_2(y)dy$$

Разделяем переменные:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy$$

Вычисляя интегралы, получим общее решение:

$$M(x) = N(y) + C$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0$$

Решение: Данное уравнение приводится к виду:

$$y(x+1)dx + x(y+1)dy = 0$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{(x+1)}{x}dx = -\frac{y+1}{y}dy$$

Интегрируем:

$$\int \frac{(x+1)}{x}dx = -\int \frac{y+1}{y}dy$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = -\int \left(1 + \frac{1}{y}\right)dy$$

Общее решение:

$$x + \ln|x| = -y - \ln|y| + C$$

Однородные дифференциальные уравнения

Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией n–го измерения, если при любом t выполняется условие

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

<u>Пример 1</u>. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ однородная функция первого измеряется, т.к.

$$f(tx,ty) = t\sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

<u>Пример 2</u>. Функция $f(x,y) = xy - y^2$ есть однородная функция второго измерения, т.к.

$$f(tx,ty) = (tx)(ty) - (ty)^2 = t^2(xy - y^2)$$

<u>Пример 3</u>. Функция $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ есть однородная функция нулевого измерения, т.к.

$$f(tx,ty) = \frac{(tx)^2 - (ty)^2}{(tx)*(ty)} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

называется *однородным относительно переменных x,y*, если функция $f(x, y)$ есть однородная функции нулевого измерения относительно переменных x,y.

Однородное уравнение может быть представлено в виде $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

С помощью новой переменной u вводимой по формуле

$$y = ux$$

уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Действительно, так как $y = ux$, , то $y' = u'x + u$. Получим:

$$u'x + u = \varphi(u)$$

Откуда $x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$ или $\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$

Интегрируя последнее уравнение, получим $\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$

Общее решение: $\Phi(u) = \ln|x| + C, \quad \Phi\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right) = \ln(x) + C$

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{x+y}{y-x}$$

<u>Решение.</u> Сделаем подстановку $y = ux$, тогда $y' = u'x + u$ и получим

$$u'x + u = \frac{1+u}{u-1} \qquad \text{или} \qquad \frac{(u-1)du}{1+2u-u^2} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируя это уравнение, получим $\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|1+2u-u^2\right| = \ln|C|$

Откуда $x\sqrt{1+2u-u^2} = C$

Подставив в это выражение значение $u = \dfrac{y}{x}$ получим общий интеграл данные уравнения

$$x^2 + 2xy - y^2 = C^2$$

Линейные дифференциальные уравнения

Уравнение вида $y' + p(x)y = g(x)$ называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка,* где p(x) и g(x) заданные непрерывные функции.

Решение уравнения следует искать в виде произведения двух функции

$$y = u(x) \cdot v(x) \quad \text{, тогда} \quad y' = u'v + uv'$$

Подставляя в уравнение, получим

$$u'v + uv' + p(x)uv = g(x) \quad \text{или} \quad u'v + u(v' + p(x)v) = g(x)$$

Выберем функцию v так, чтобы $\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0$. Интегрируя это уравнение получим

$$v = e^{-\int p(x)dx}$$

Подставляя найденную функцию v в исходное уравнение , получим

$$v(x)\frac{du}{dx} = g(x) \quad \text{отсюда найдём} \quad u = \int \frac{g(x)}{v(x)}dx + C$$

Тогда общее решение уравнения с учетом найденных функций u и v примет вид

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int g(x)e^{\int p(x)\,dx}dx + C\right]$$

Пример 1. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3$.

Решение. Полагая $y = u \cdot v$, тогда $\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получим

$v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} u \cdot v = (x+1)^3$ или $v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} v\right) = (x+1)^3$

Для определения будем полагать $\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} v = 0$.

Откуда $v = e^{2\int \frac{dx}{x+1}} = (x+1)^2$

Тогда $(x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^3$

Откуда получим

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C$$

Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \frac{(x+1)^2}{2} + C(x+1)^2$$

Уравнение Бернулли

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = g(x)\,y^n$$

где p(x) и g(x) заданные непрерывные функции, $n \neq 0,\ n \neq 1$, (в частном случае p(x) и g(x) могут быть постоянными) называется *уравнением Бернулли*.

С помощью подстановки $z = y^{1-n}$ уравнение Бернулли можно свести к линейному уравнению.

Разделим уравнение Бернулли на y^n , тогда это уравнение примет вид

$$y^{-n}y' + p(x)\,y^{1-n} = g(x)$$

Учитывая, что $z' = (1-n)\,y^{-n}\,y'$

найдем

$$z' + (1-n)\,p(x)\,z = (1-n)g(x)$$

Пример 2. Решить уравнение $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^2$

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли, для которого $n = 2$. Разделим обе части данного уравнения на y^2, получим

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = x^2$$

Сделаем подстановку $z = y^{-1}$, тогда $z' = -y^{-2}y'$

Подставим эти выражения в данное уравнение

$$-z' + \frac{z}{x} = x^2 \quad \text{или} \quad z' - \frac{z}{x} = -x^2$$

Это уравнение является линейным уравнением.

Здесь $p(x) = -\frac{1}{x}, \quad g(x) = -x^2$, тогда общее решение уравнения будет иметь вид

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}}\left[\int e^{-\int \frac{dx}{x}}(-x^2)dx + C\right] \quad \text{или} \quad z = x\left[\int(-x)dx + C\right] = -\frac{x^3}{2} + Cx$$

Возвращаясь к переменной y получим общее решение исходного уравнения $\frac{1}{y} = Cx - \frac{x^3}{2}$ или $y = \frac{2}{2Cx - x^3}$