

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Цель курса: Изучение методов статического и динамического расчетов инженерных сооружений

Тема лекции
ОПРЕДЕЛЕНИЕ
ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ПЛОСКИХ
СТЕРЖНЕВЫХ
КОНСТРУКЦИЯХ

19.05.2020

ПГУ, лектор Турищев Л.С.

2

Цели лекции - запомнить:

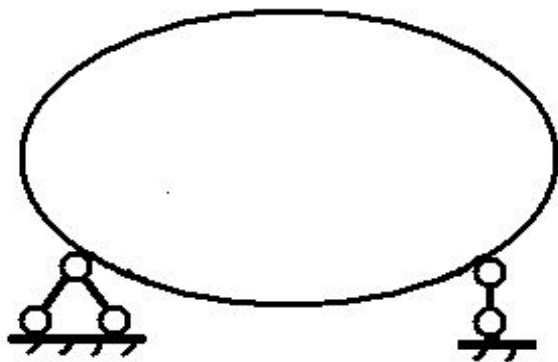
- ✓ *понятие деформации конструкции и ее количественные характеристики*
- ✓ *понятия полных, частичных и единичных перемещений*
- ✓ *определение перемещений от нагрузки*
- ✓ *правило Верещагина*

1. Общие сведения о перемещениях

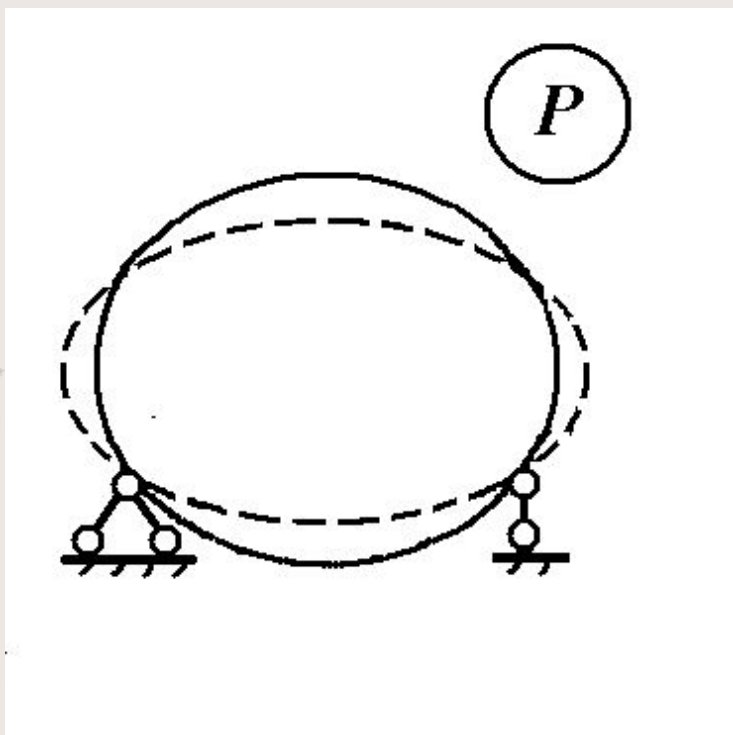
19.05.2020

ПГУ, лектор Турищев Л.С.

Понятие деформации конструкции

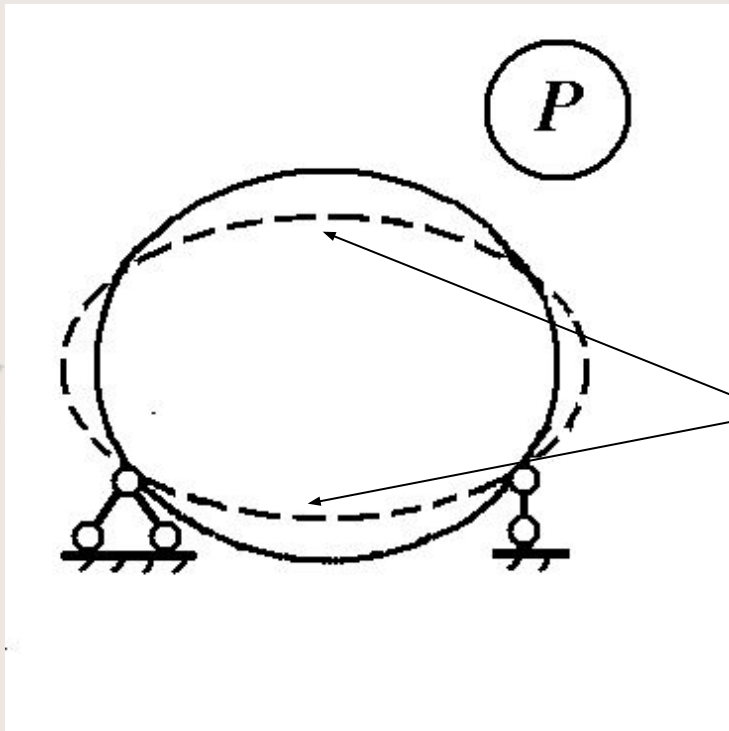


Понятие деформации конструкции



Деформация конструкции - изменение формы и размеров конструкции при приложении внешних воздействий

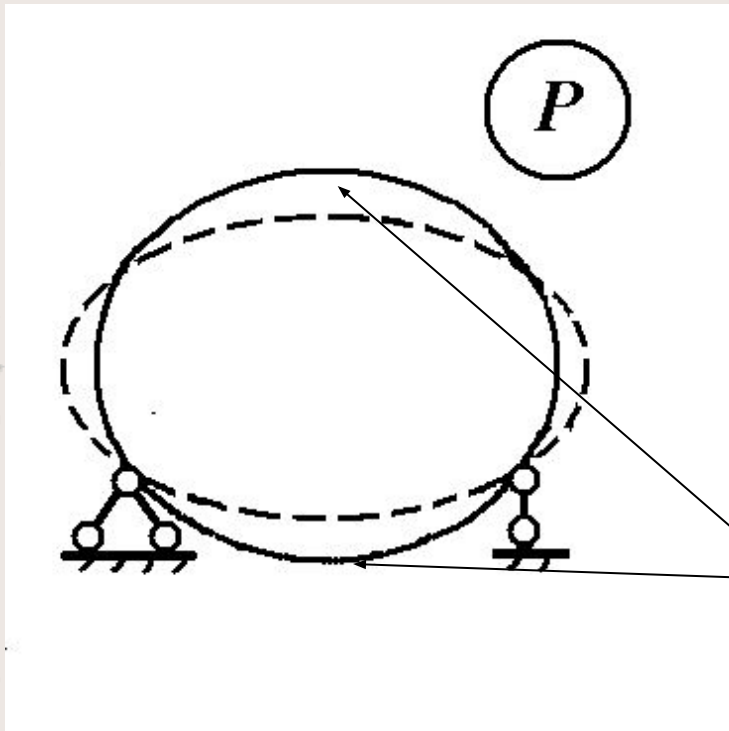
Состояния конструкции при деформации



Деформация конструкции - изменение формы и размеров конструкции при приложении внешних воздействий

Начальное недеформированное состояние

Состояния конструкции при деформации

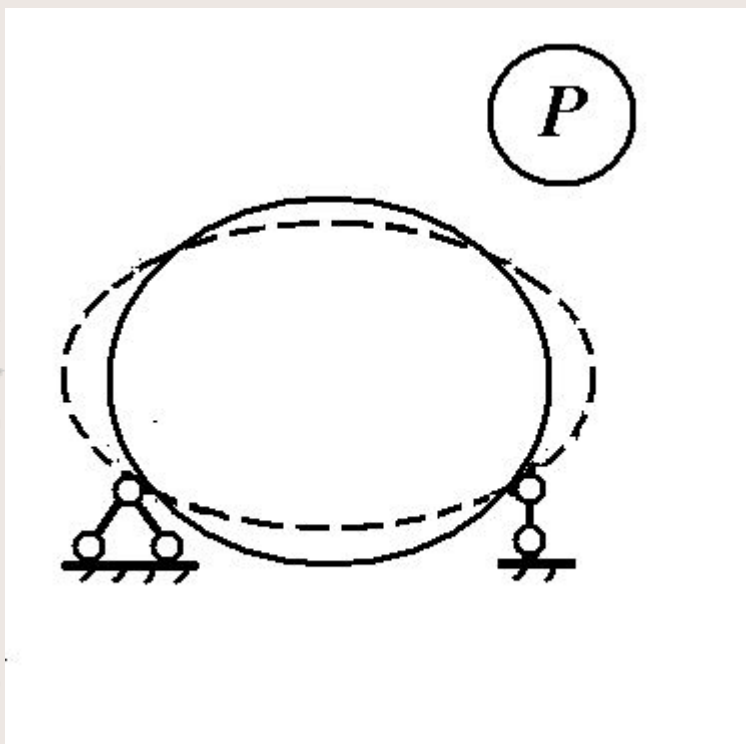


Деформация конструкции - изменение формы и размеров конструкции при приложении внешних воздействий

Начальное недеформированное состояние

Конечное деформированное состояние

Виды деформаций конструкций



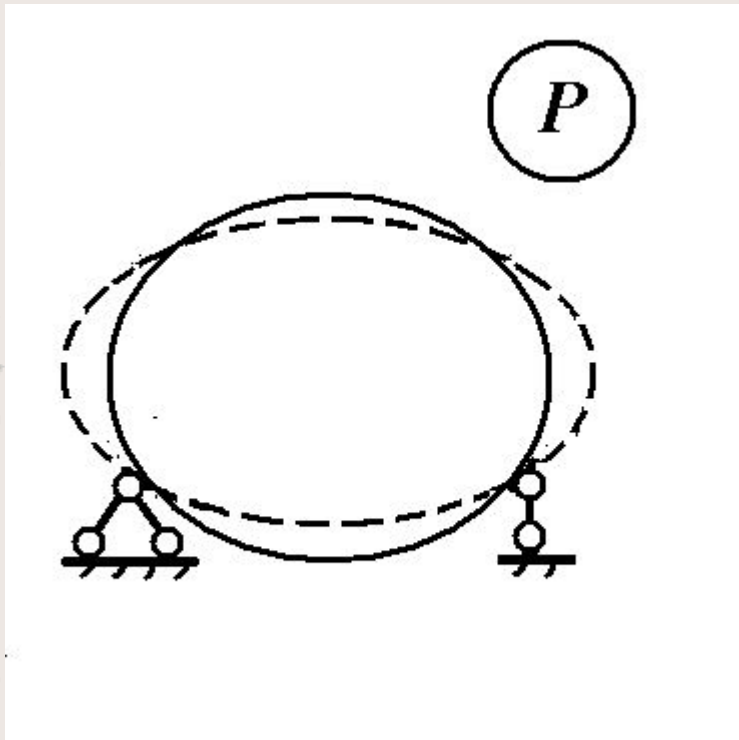
Упругие деформации

Упруго пластические деформации

Постоянные деформации

Переменные деформации

Виды деформаций конструкций, изучаемые в курсе



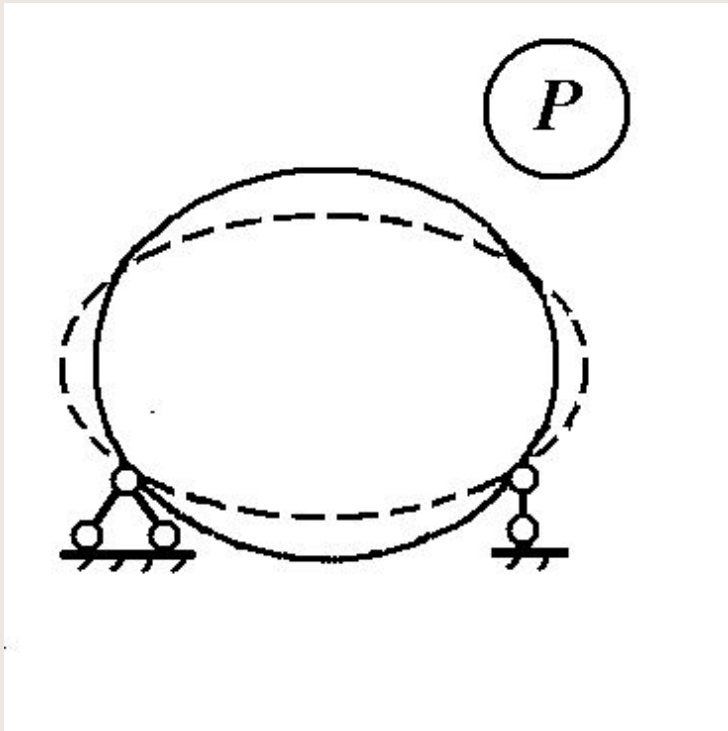
Упругие деформации

Упруго пластические деформации

Постоянные деформации

Переменные деформации

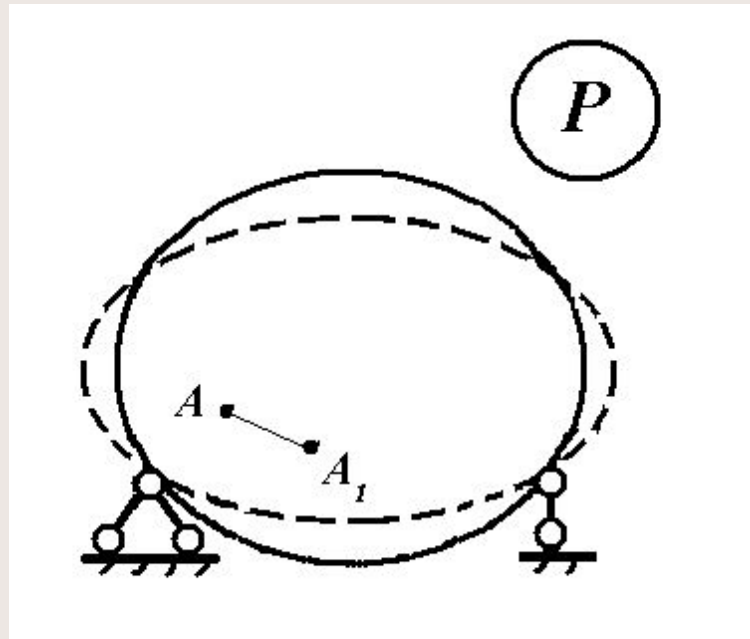
Интегральные характеристики деформации конструкции



Линейные перемещения

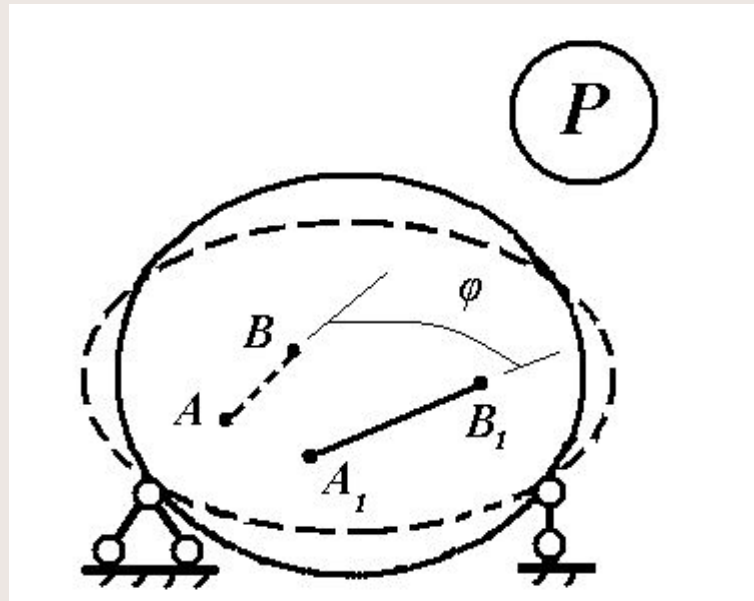
Угловые перемещения

Линейные перемещения конструкции



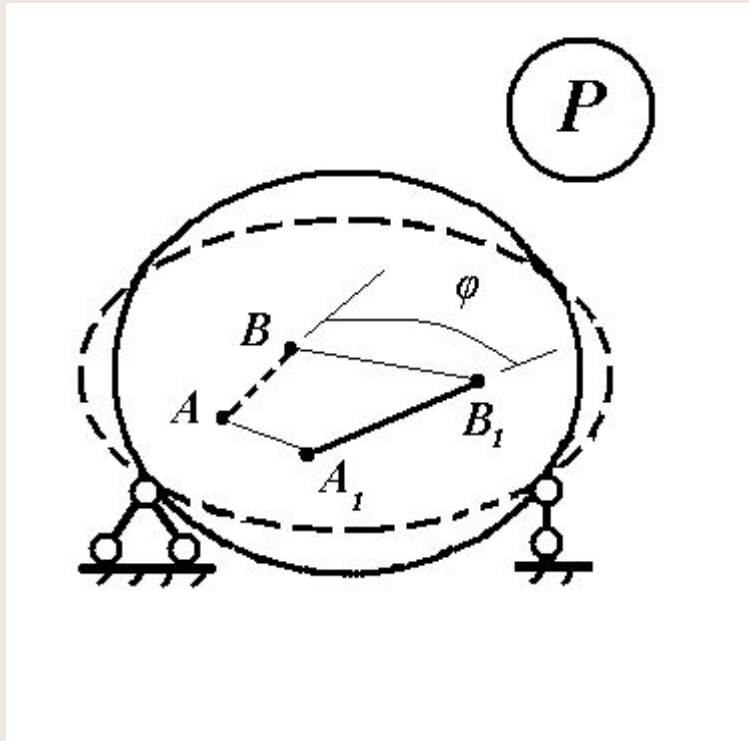
Перемещение характеризуется длиной отрезка, соединяющего положение точки в начальном недеформированном состоянии и конечном деформированном состоянии

Угловые перемещения конструкции



Перемещение характеризуется углом поворота отрезка прямой, соединяющего две произвольные точки конструкции при переходе из начального недеформированного состояния в конечное деформированное состояние

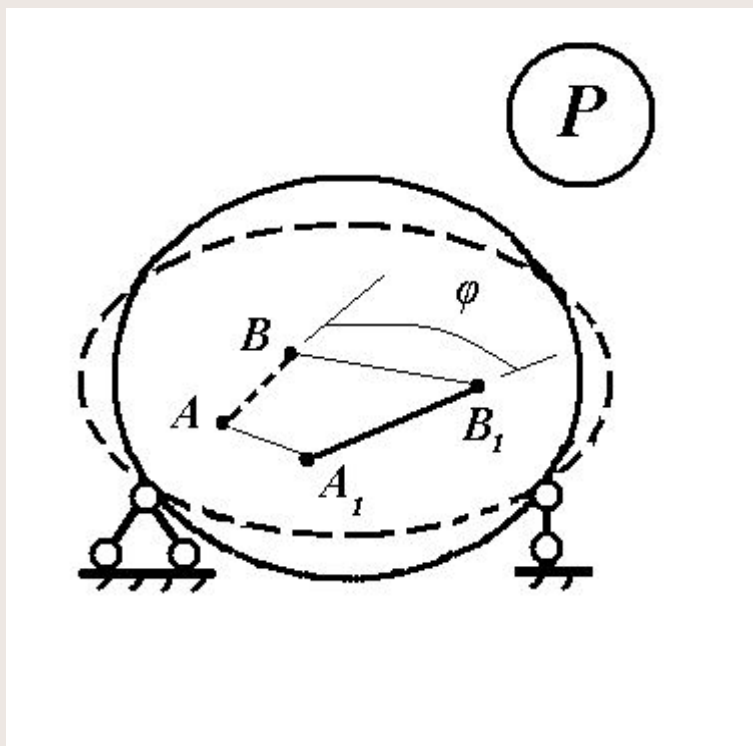
Цель определения перемещений конструкции



Оценка пригодности конструкции к нормальной эксплуатации согласно критериев второй группы предельных состояний конструкций

Пригодность конструкции к нормальной эксплуатации характеризуется её жесткостью и податливостью

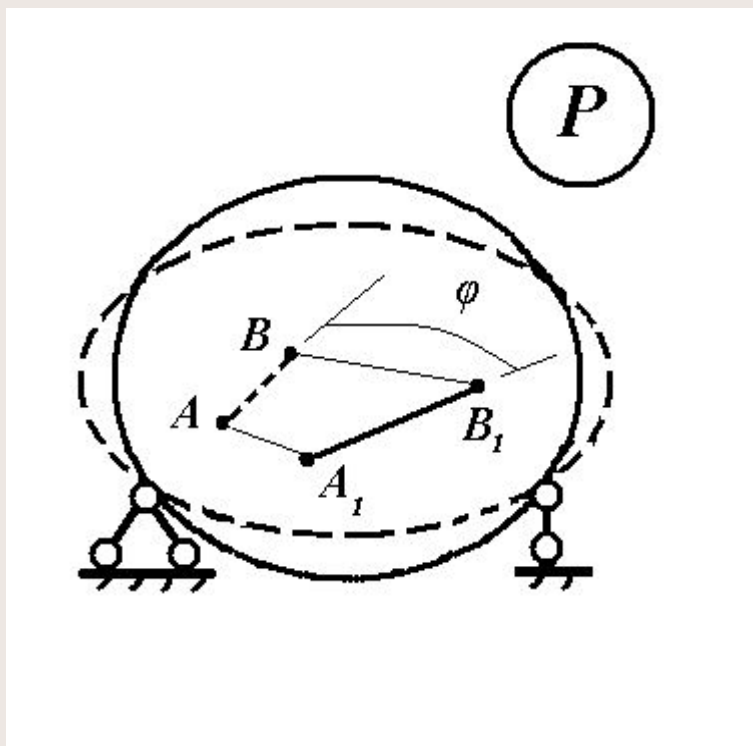
Понятие жесткости и податливости конструкции



Жёсткость конструкции

характеризует способность конструкции сопротивляться возникновению перемещений

Понятие жесткости и податливости конструкции



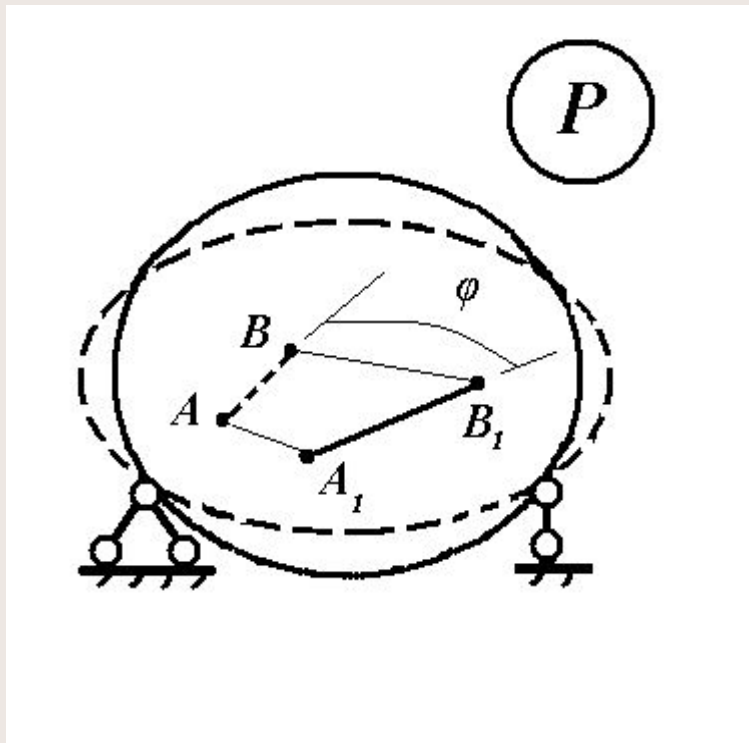
Жёсткость конструкции

характеризует способность конструкции сопротивляться возникновению перемещений

Податливость конструкции

характеризует способность конструкции получать перемещения

Составляющие жесткости конструкции

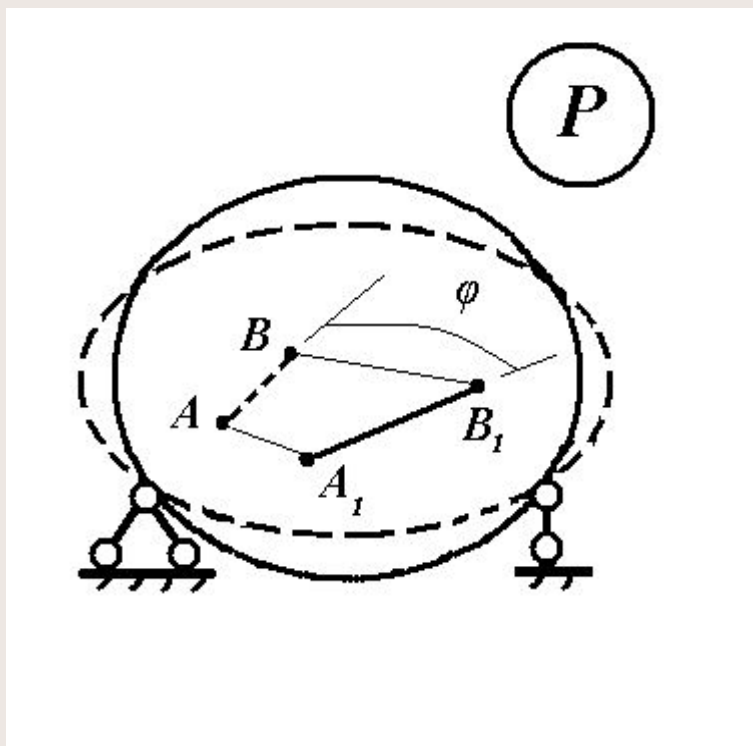


Жесткость материала

Жесткость элементов

Жесткость узловых соединений

Жесткость материала конструкции



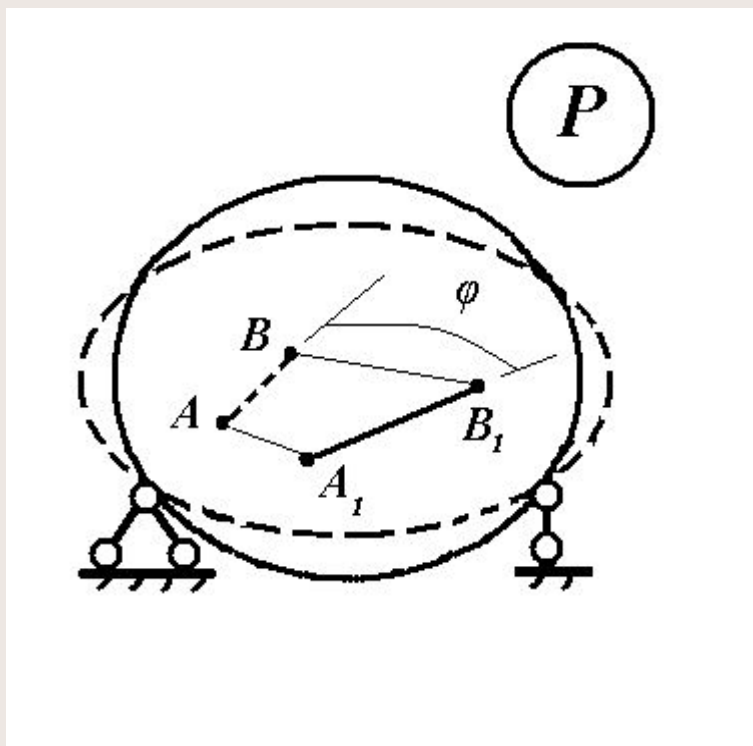
Характеризуется двумя модулями упругости

E G

Модуль упругости E характеризует способность материала сопротивляться возникновению упругих линейных деформаций

Модуль сдвига G характеризует способность материала сопротивляться возникновению упругих сдвиговых деформаций

Жесткость элементов конструкции

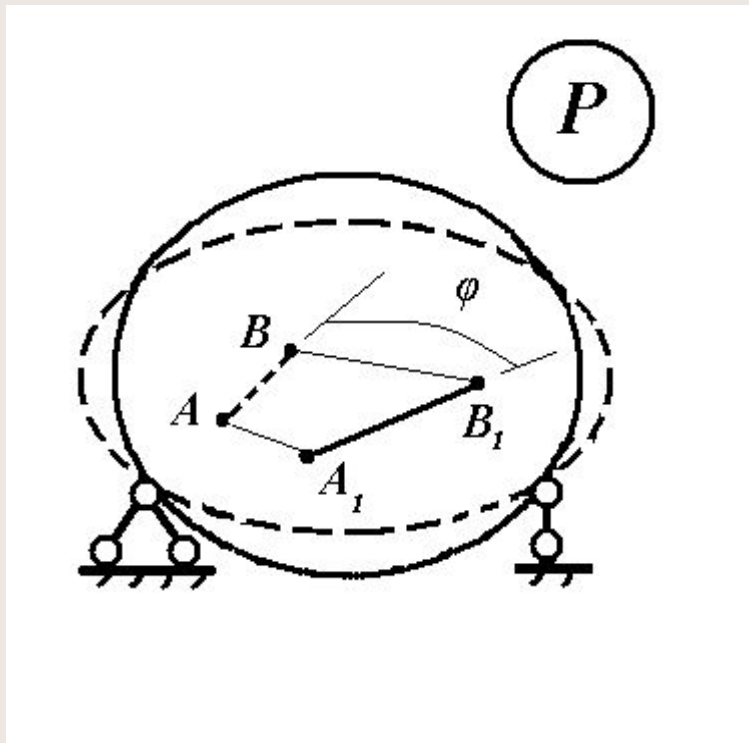


Жесткость элементов конструкции зависит от жесткости поперечного сечения элемента и его длины

Виды жесткости поперечного сечения

EI – изгибная жесткость

Жесткость элементов конструкции



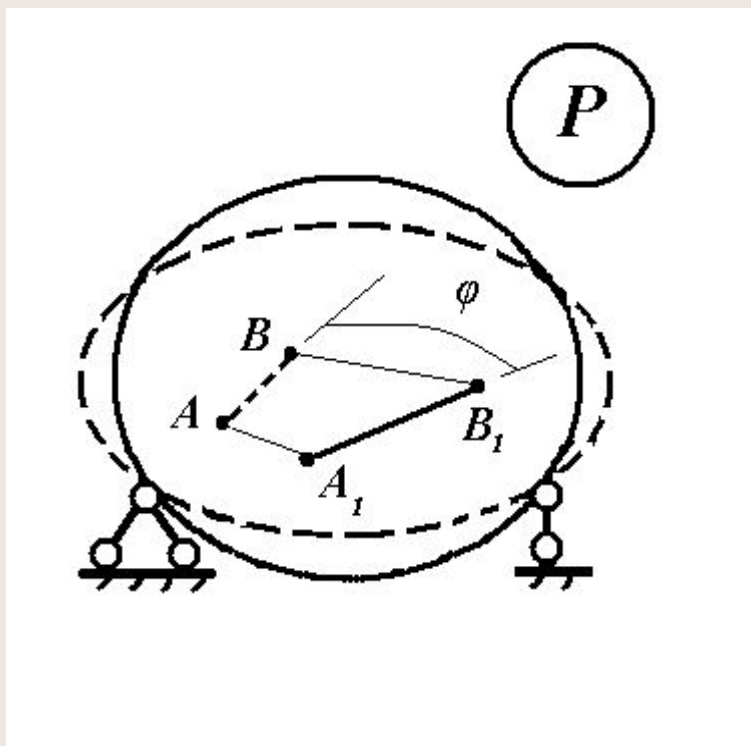
Жесткость элементов конструкции зависит от жесткости поперечного сечения элемента и его длины

Виды жесткости поперечного сечения

EI – изгибная жесткость

EA – продольная жесткость

Жесткость элементов конструкции



Жесткость элементов конструкции зависит от жесткости поперечного сечения элемента и его длины

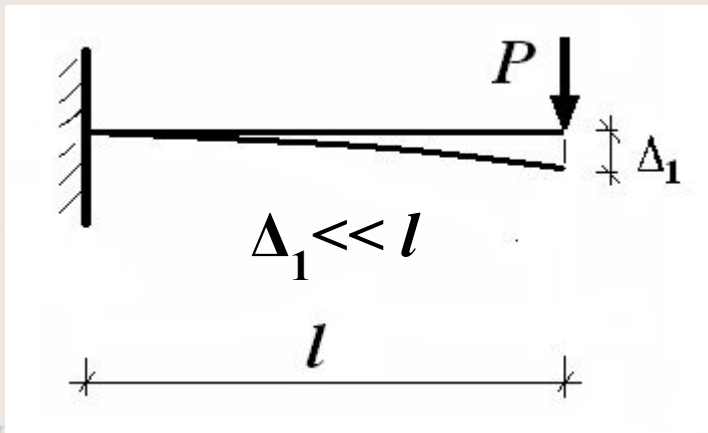
Виды жесткости поперечного сечения

EI – изгибная жесткость

EA – продольная жесткость

GA – сдвиговая жесткость

Подходы к определению перемещений в конструкциях

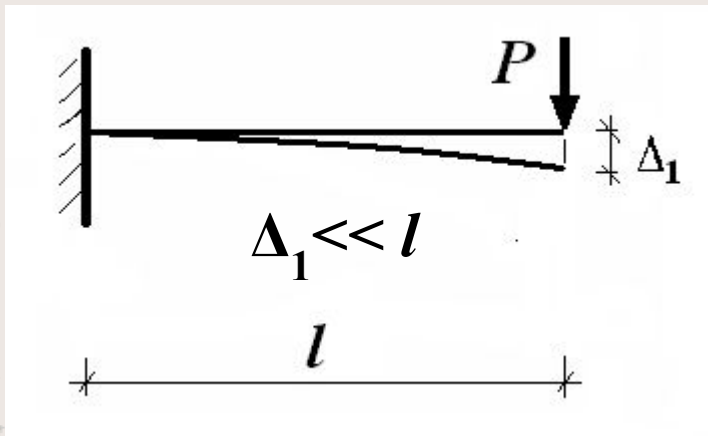


Первый подход

Согласно первому подходу определяются перемещения, которые малы по сравнению с размерами конструкции

Такой подход справедлив для жестких конструкций, которые можно считать линейно деформируемыми системами

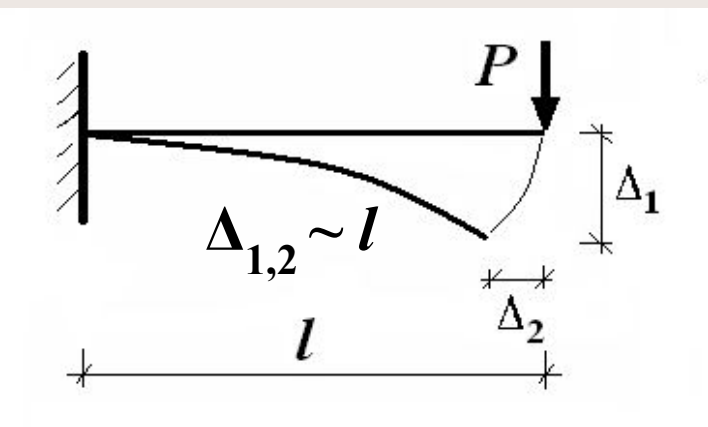
Подходы к определению перемещений в конструкциях



Первый подход

Согласно первому подходу определяются перемещения, которые малы по сравнению с размерами конструкции

Такой подход справедлив для жестких конструкций, которые можно считать линейно деформируемыми системами

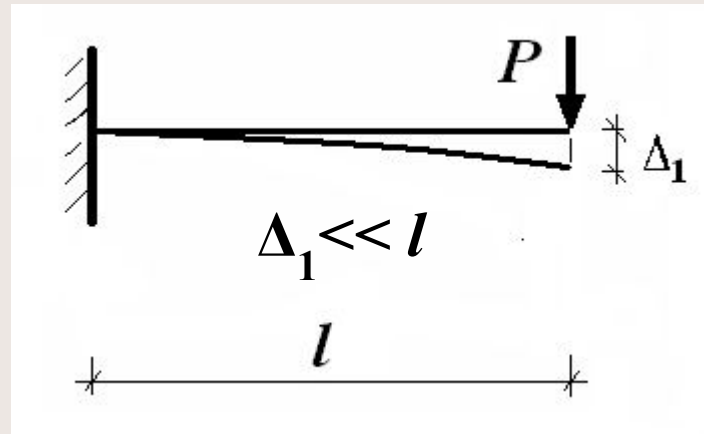


Второй подход

Второй подход связан с определением больших перемещений. Перемещения соизмеримы с размерами конструкции
Такой подход справедлив для гибких конструкций, которые нельзя считать линейно деформируемыми системами

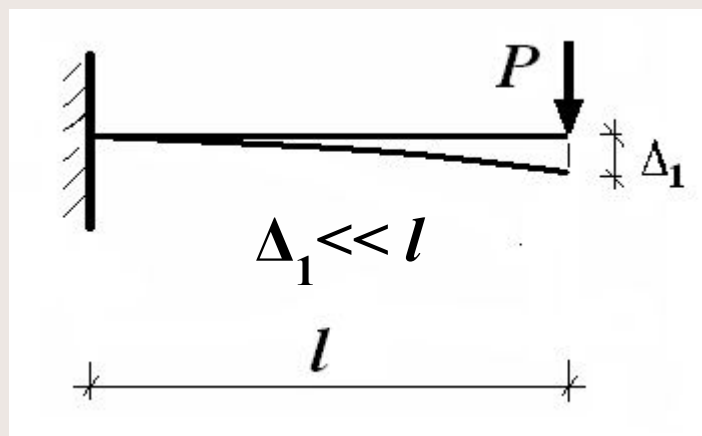
Перемещения конструкций, рассматриваемые в курсе

Малые перемещения



Формы определения перемещений конструкций, рассматриваемых в курсе

Аналитическая форма



Матричная форма

**Какие есть
вопросы?**



**Тогда идем
дальше.**



2. Связь между внешними силами и перемещениями в линейно-деформируемых системах

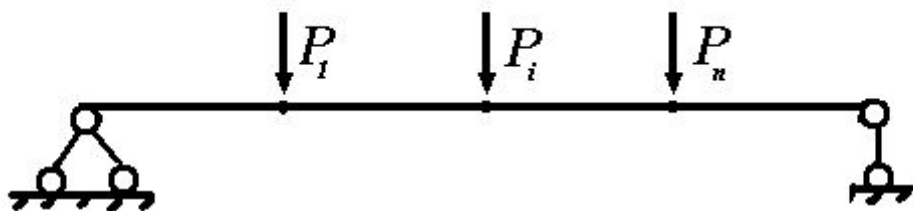
Полные перемещения конструкции



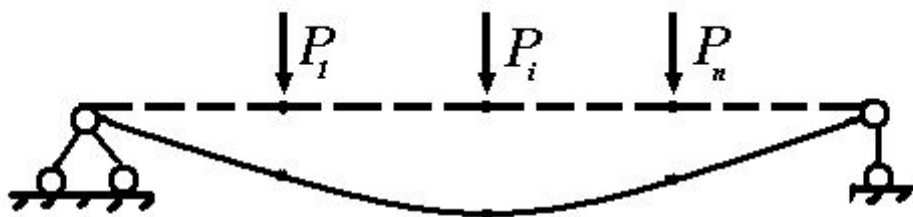
Полные перемещения конструкции



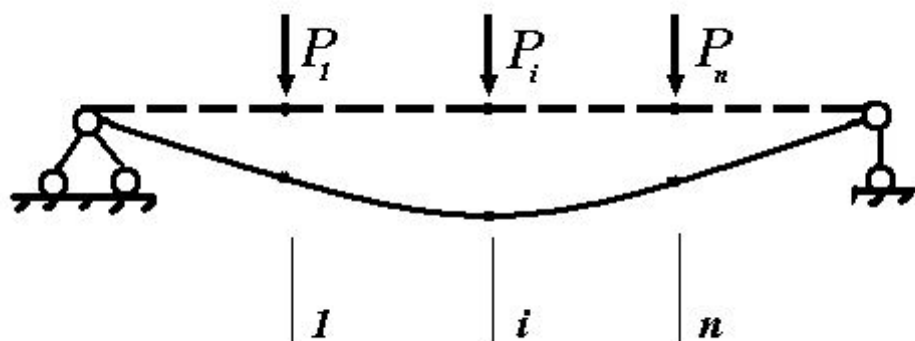
Полные перемещения конструкции



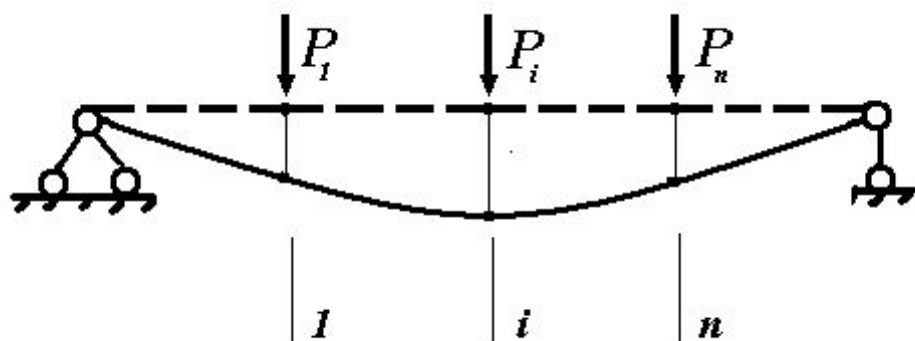
Полные перемещения конструкции



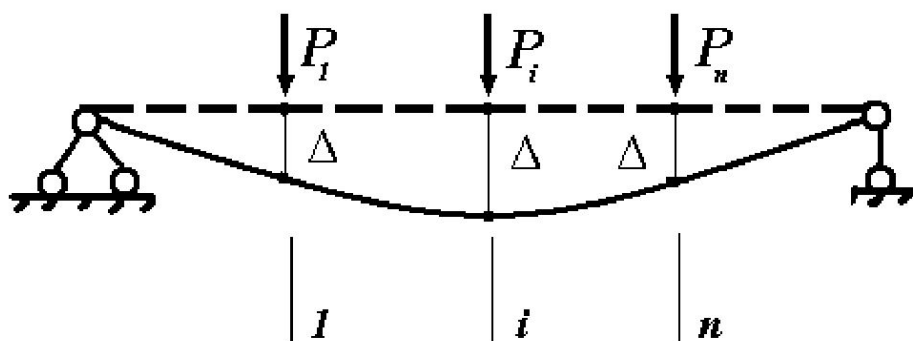
Полные перемещения конструкции



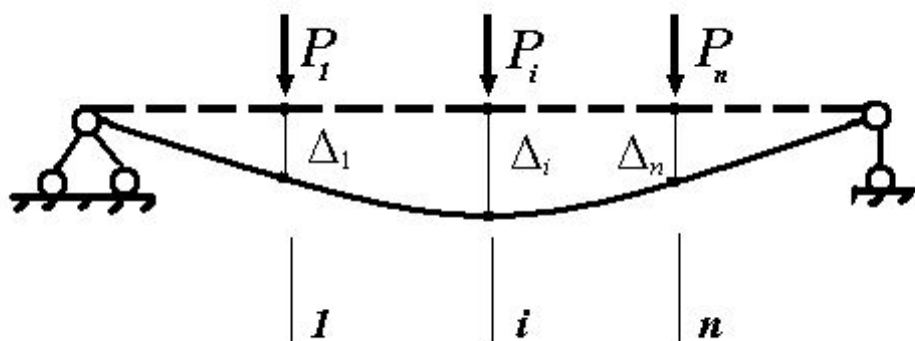
Полные перемещения конструкции



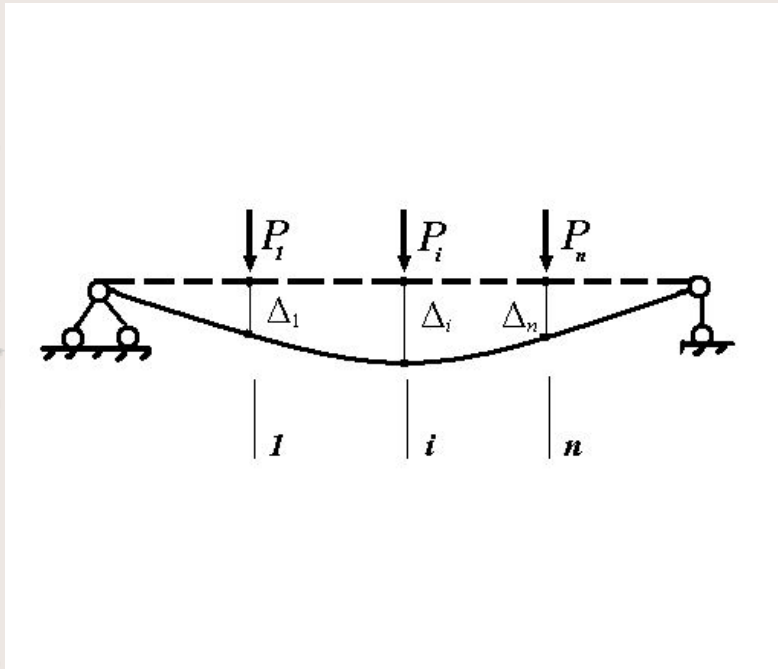
Полные перемещения конструкции



Полные перемещения конструкции



Полные перемещения конструкции

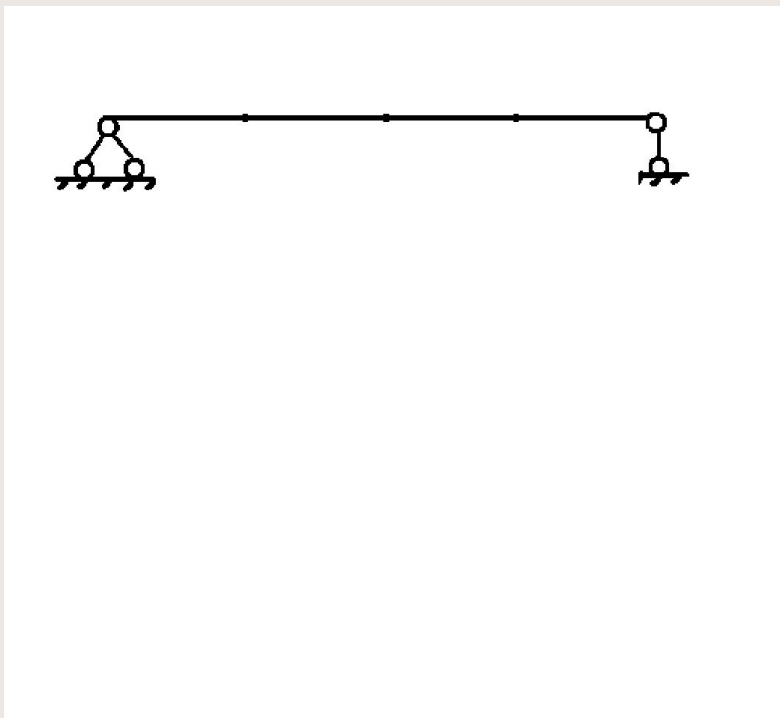


$$\Delta_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

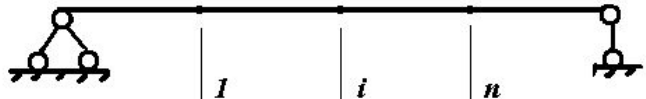
Перемещения, происходящие в конструкции от действия всех сил одновременно

Индекс указывает номер направления, по которым возникают перемещения

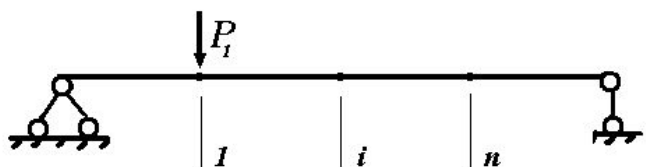
Частичные перемещения конструкции



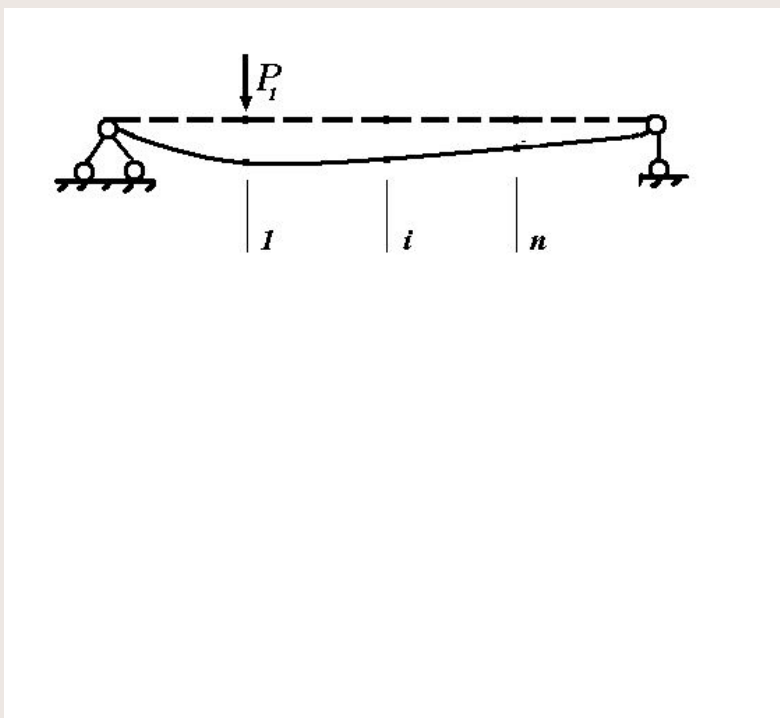
Частичные перемещения конструкции



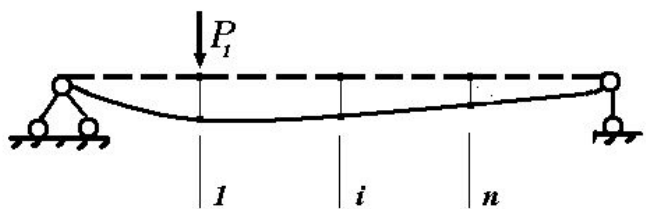
Частичные перемещения конструкции



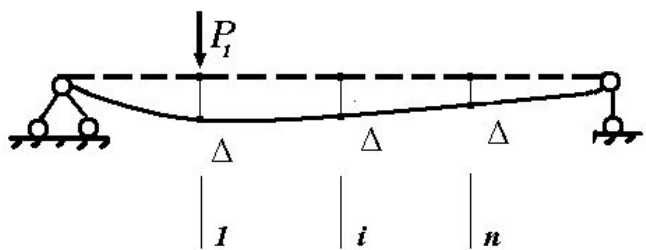
Частичные перемещения конструкции



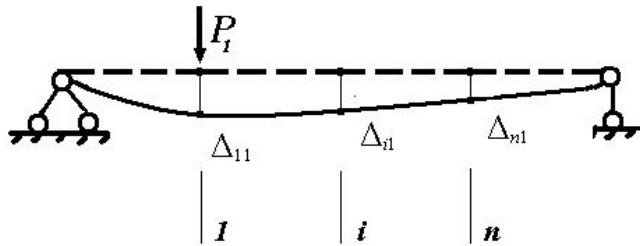
Частичные перемещения конструкции



Частичные перемещения конструкции



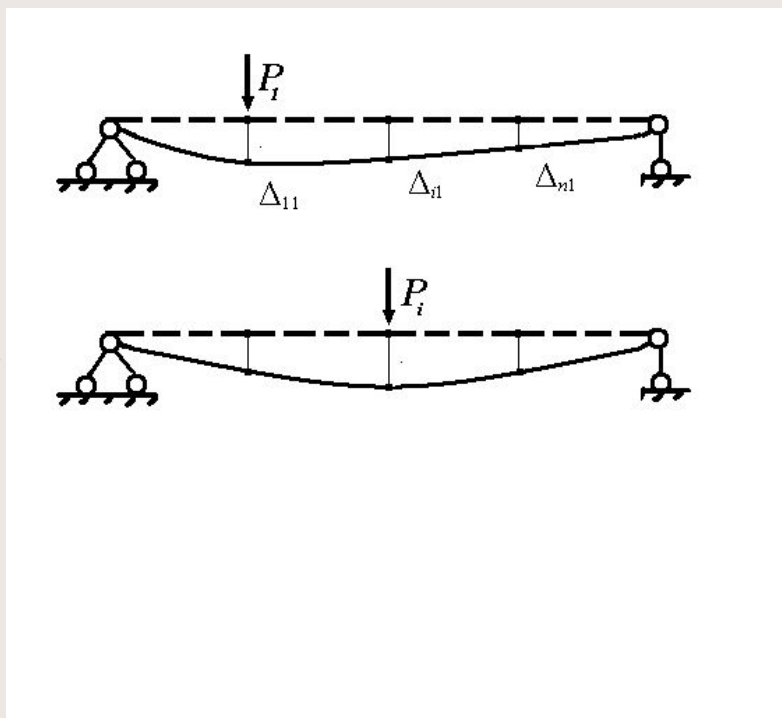
Частичные перемещения конструкции



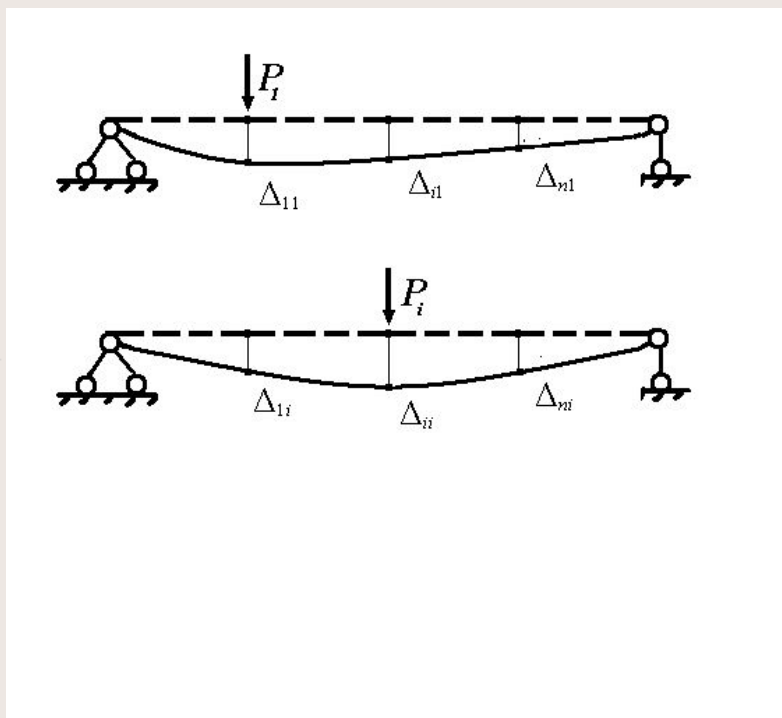
Первый индекс указывает номер направления, по которому перемещение происходит

Второй индекс указывает номер направления, по которому действует сила, вызывающая это перемещение

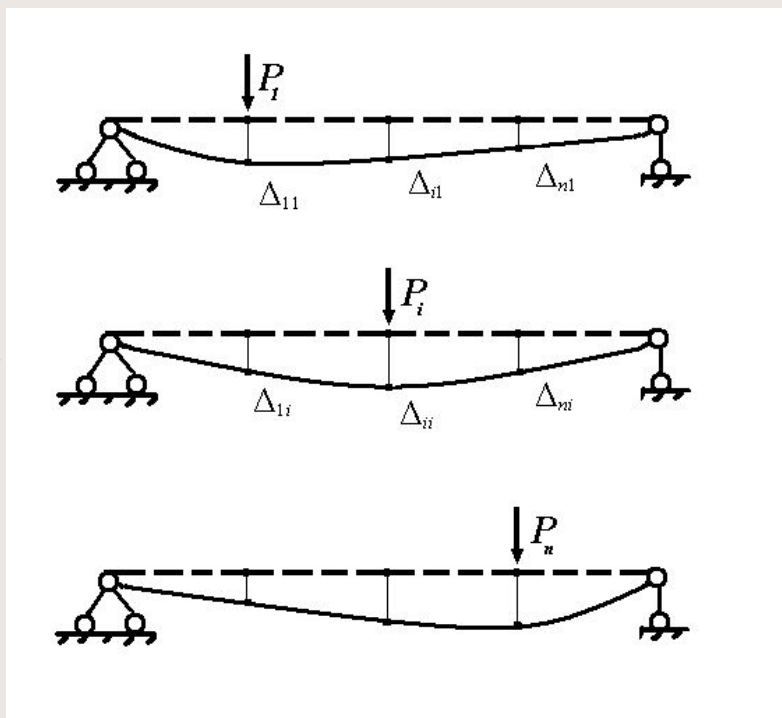
Частичные перемещения конструкции



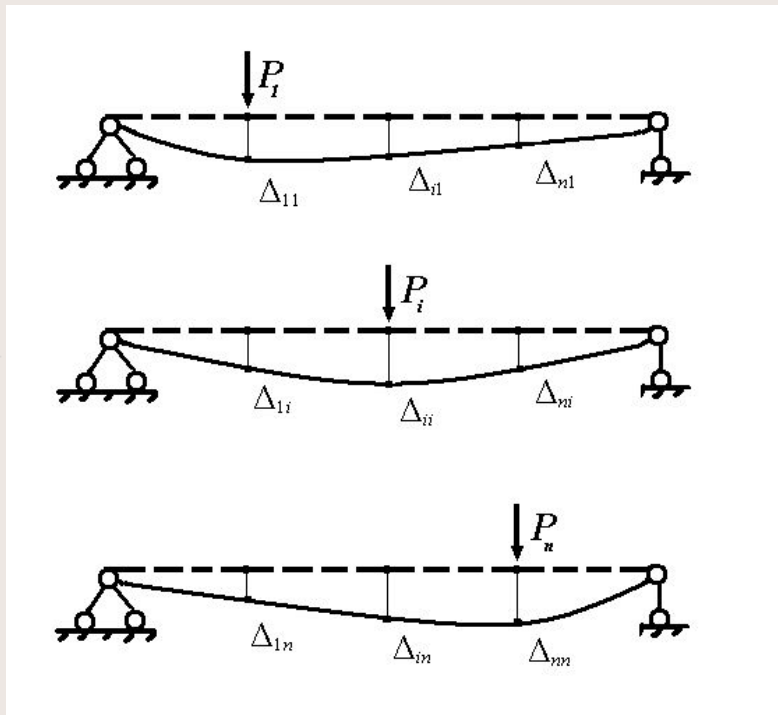
Частичные перемещения конструкции



Частичные перемещения конструкции



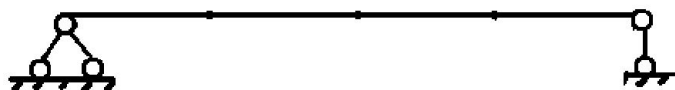
Частичные перемещения конструкции



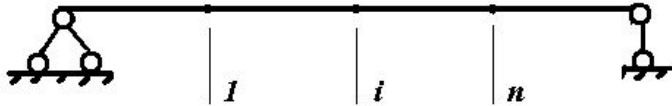
$$\Delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

Перемещения, которые возникают в конструкции при раздельном приложении сил

Единичные перемещения конструкции



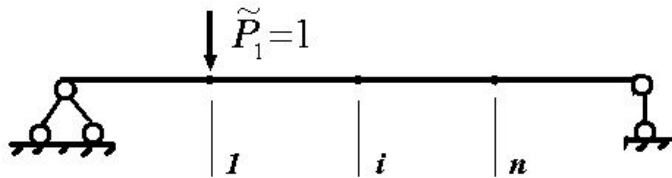
Единичные перемещения конструкции



$$\tilde{P}_j = 1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

Перемещения, которые возникают в конструкции от действия безразмерных сил равных единице по направлению сил, приложенных к конструкции

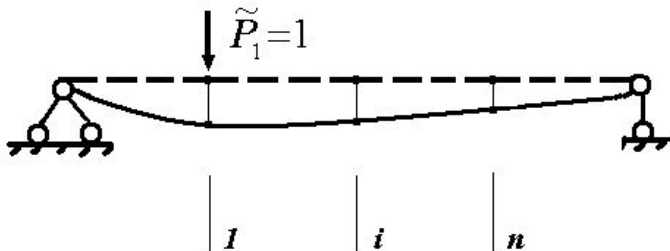
Единичные перемещения конструкции



$$\tilde{P}_j = 1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

Перемещения, которые возникают в конструкции от действия безразмерных сил равных единице по направлению сил, приложенных к конструкции

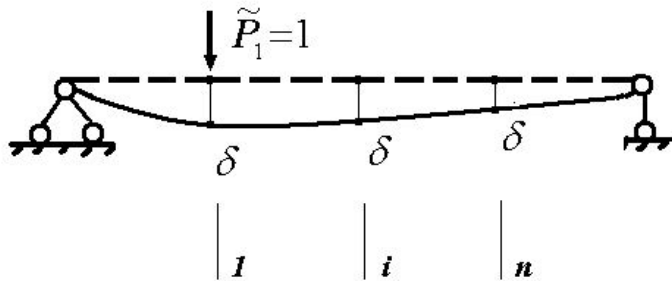
Единичные перемещения конструкции



$$\tilde{P}_j = 1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

Перемещения, которые возникают в конструкции от действия безразмерных сил равных единице по направлению сил, приложенных к конструкции

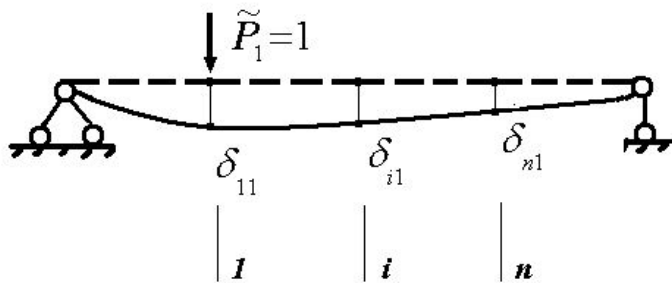
Единичные перемещения конструкции



$$\tilde{P}_j = 1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

Перемещения, которые возникают в конструкции от действия безразмерных сил равных единице по направлению сил, приложенных к конструкции

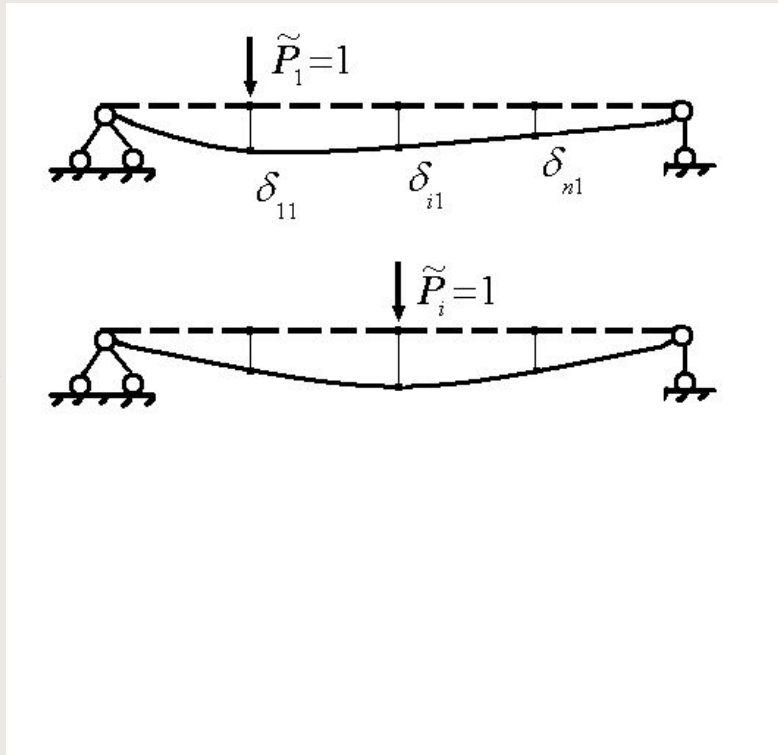
Единичные перемещения конструкции



$$\tilde{P}_j = 1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

Перемещения, которые возникают в конструкции от действия безразмерных сил равных единице по направлению сил, приложенных к конструкции

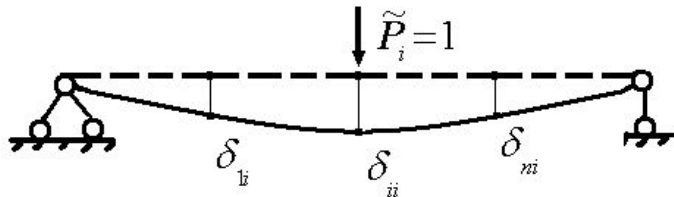
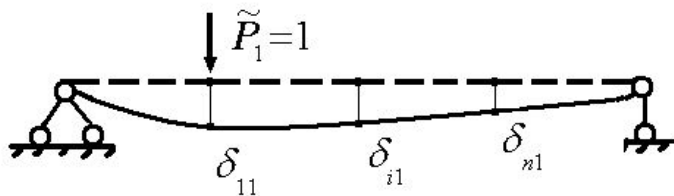
Единичные перемещения конструкции



$$\tilde{P}_j = 1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

Перемещения, которые возникают в конструкции от действия безразмерных сил равных единице по направлению сил, приложенных к конструкции

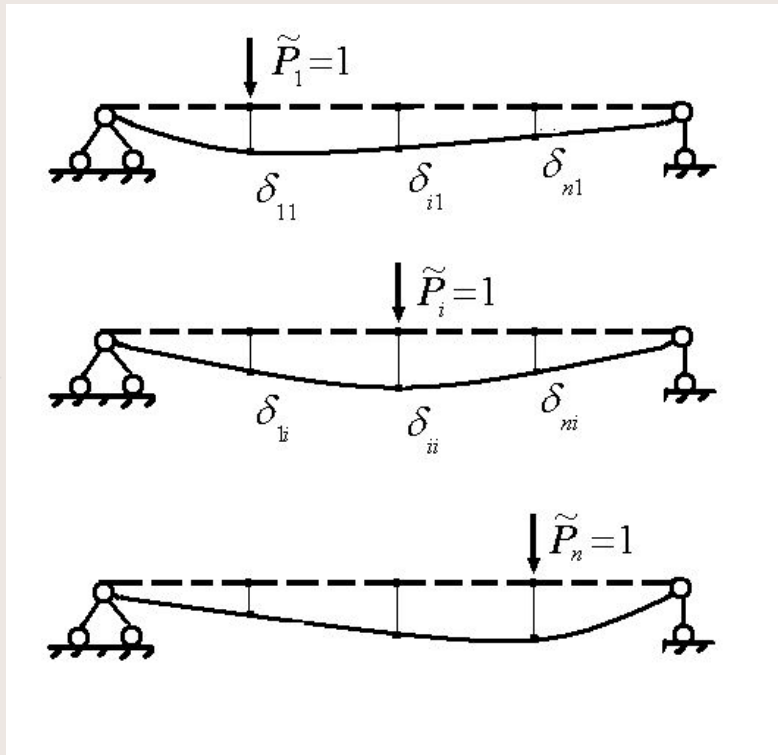
Единичные перемещения конструкции



$$\tilde{P}_j = 1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

Перемещения, которые возникают в конструкции от действия безразмерных сил равных единице по направлению сил, приложенных к конструкции

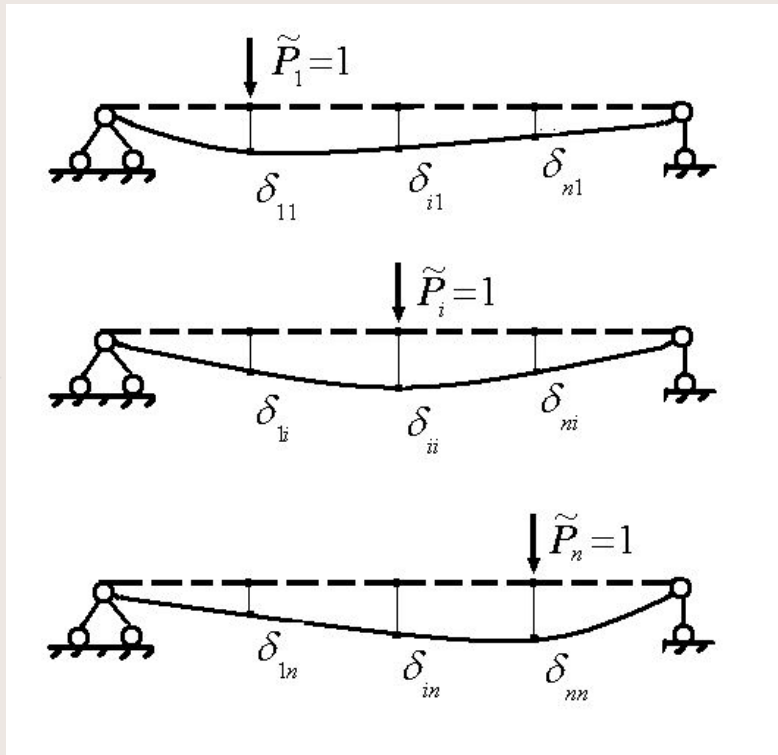
Единичные перемещения конструкции



$$\tilde{P}_j = 1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

Перемещения, которые возникают в конструкции от действия безразмерных сил равных единице по направлению сил, приложенных к конструкции

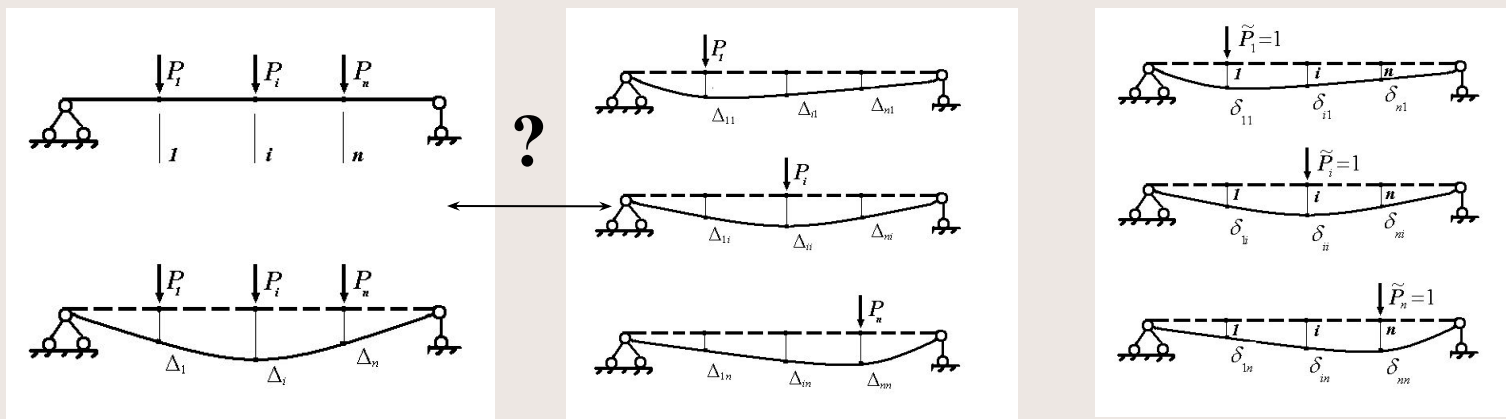
Единичные перемещения конструкции



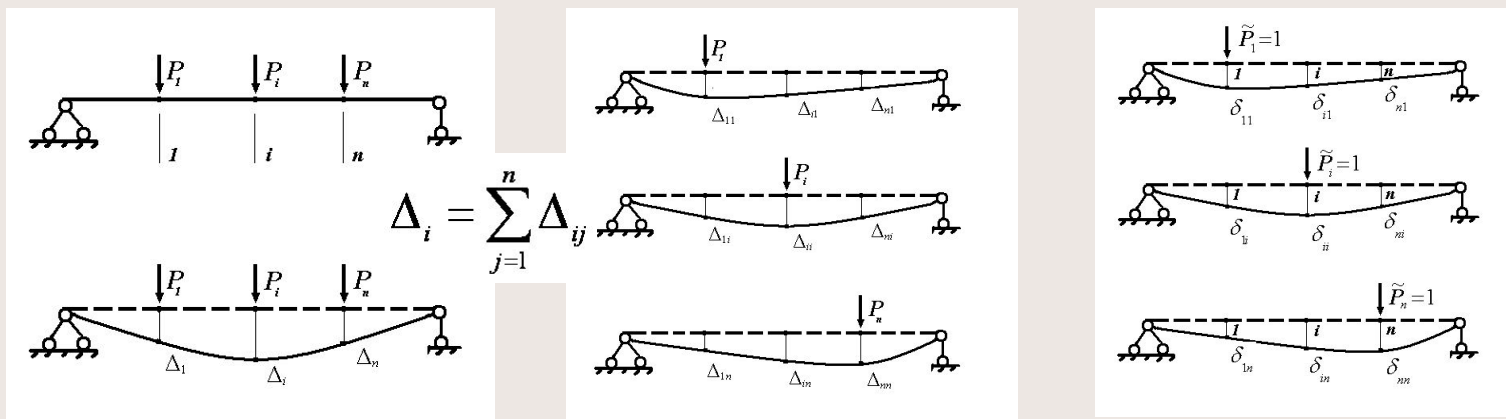
$$\tilde{P}_j = 1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

Перемещения, которые возникают в конструкции от действия безразмерных сил равных единице по направлению сил, приложенных к конструкции

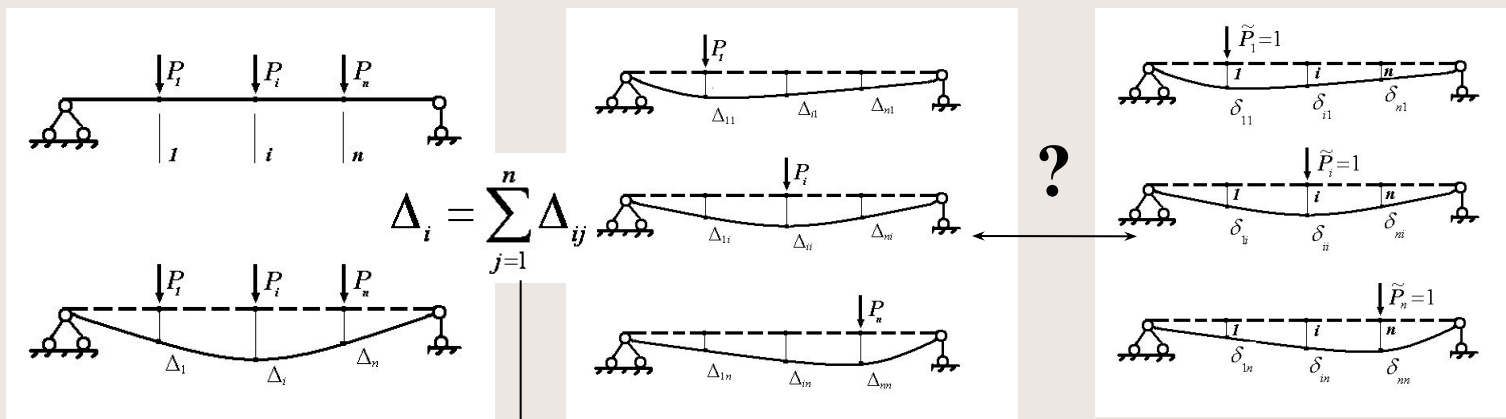
Взаимосвязь полных, частичных и единичных перемещений конструкции



Взаимосвязь полных, частичных и единичных перемещений конструкции

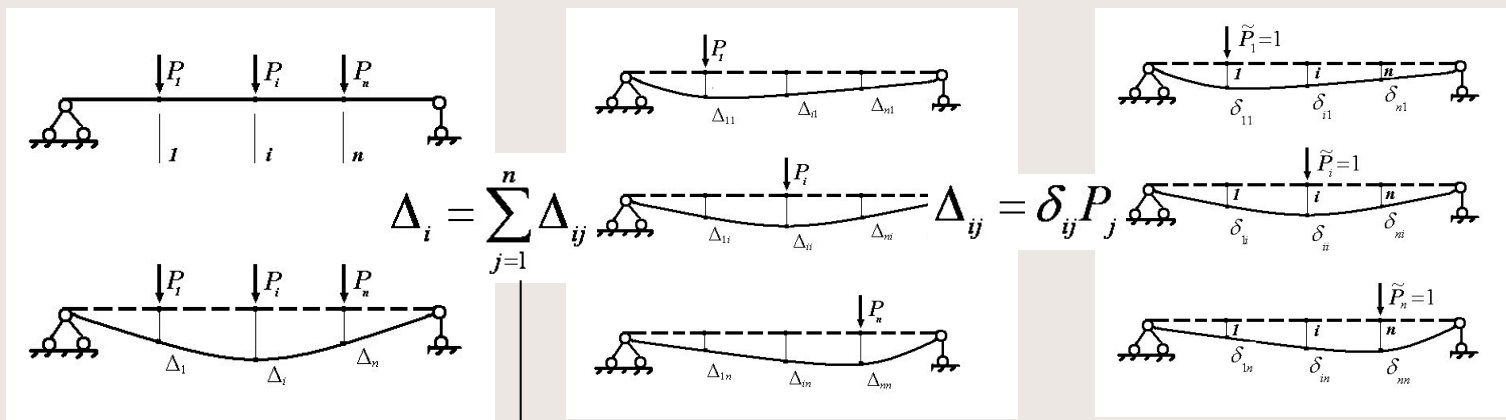


Взаимосвязь полных, частичных и единичных перемещений конструкции



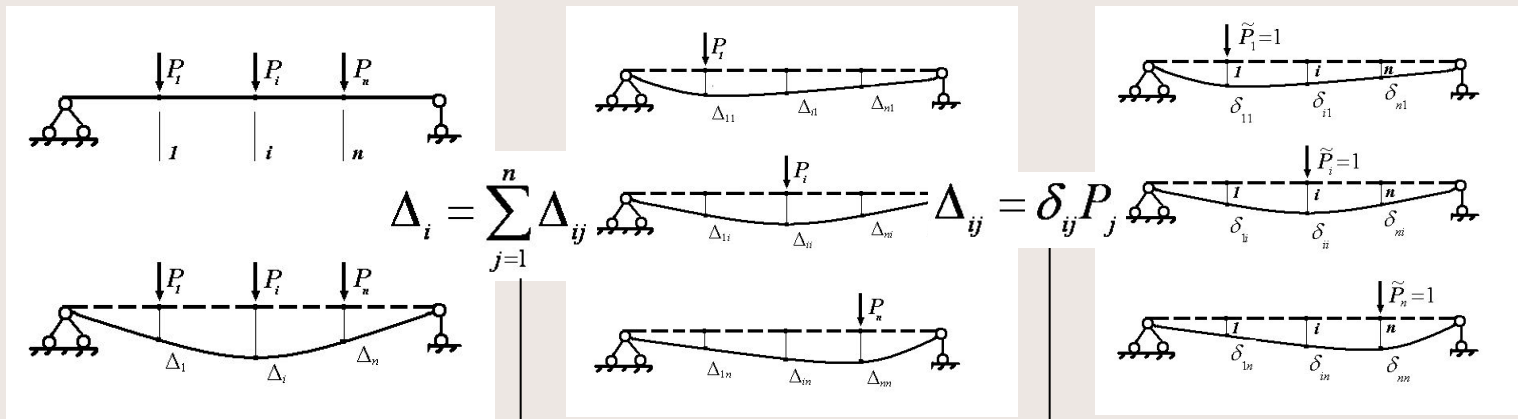
*Вытекает из принципа
независимости действия
сил*

Взаимосвязь полных, частичных и единичных перемещений конструкции



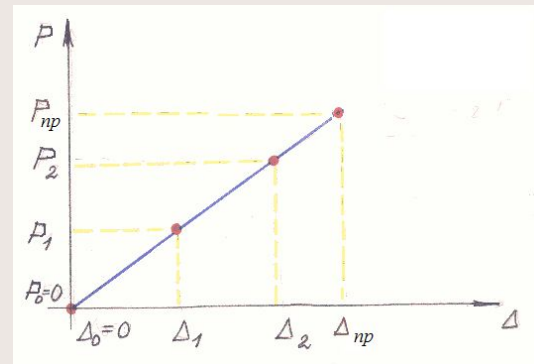
Вытекает из принципа независимости действия сил

Взаимосвязь полных, частичных и единичных перемещений конструкции

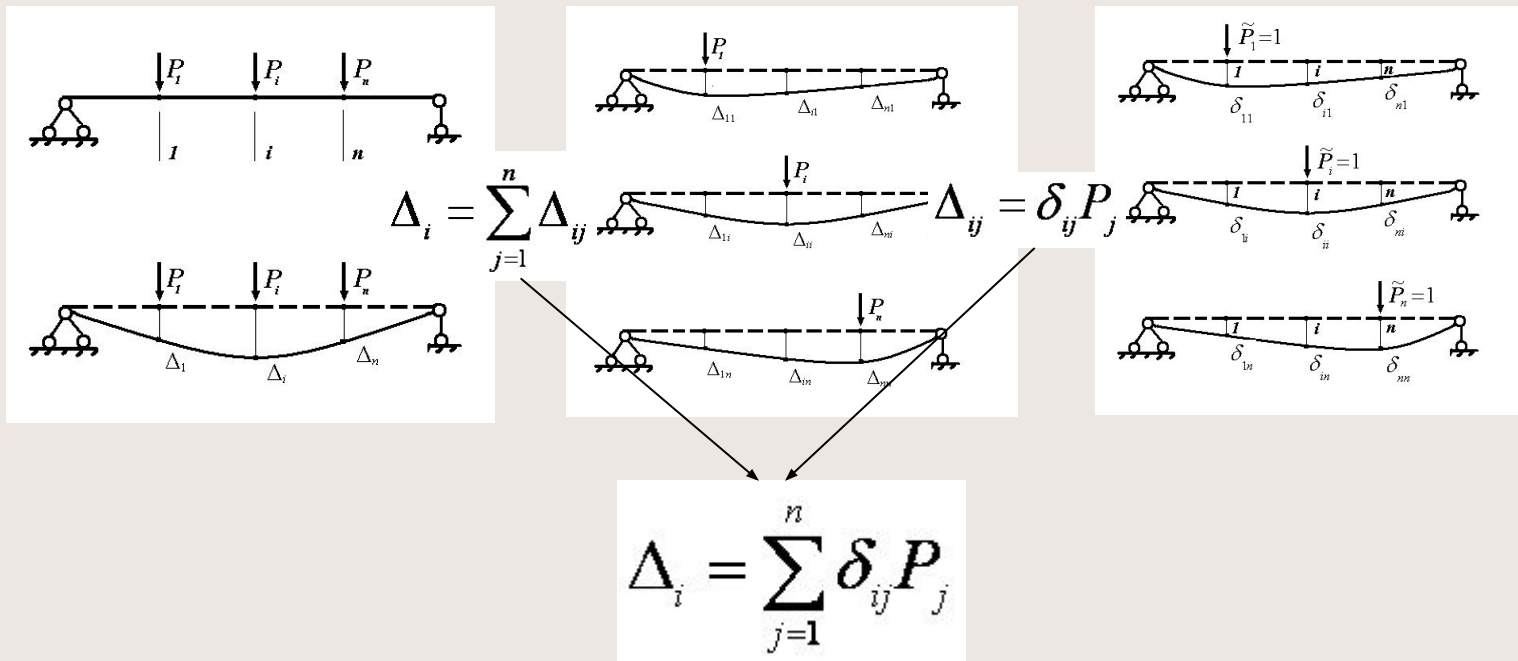


Вытекает из принципа независимости действия сил

Вытекает из вида кривой равновесных состояний



Взаимосвязь полных, частичных и единичных перемещений конструкции



Закон Гука для конструкции

Полное перемещение, возникающее в конструкции, является линейной функцией действующих на неё сил

**Какие есть
вопросы?**



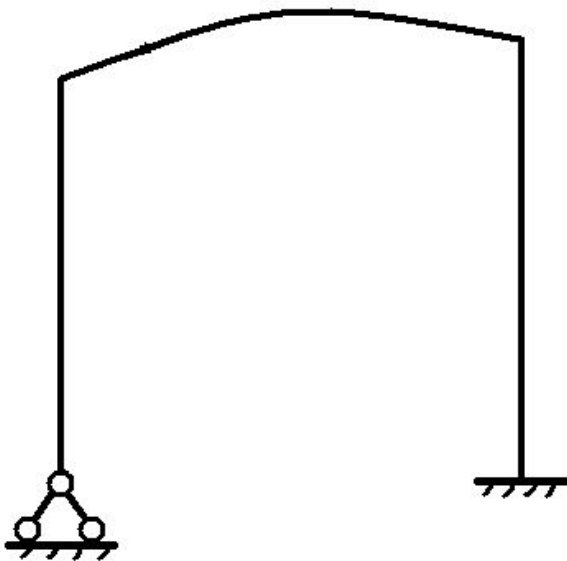
**Тогда идем
дальше.**



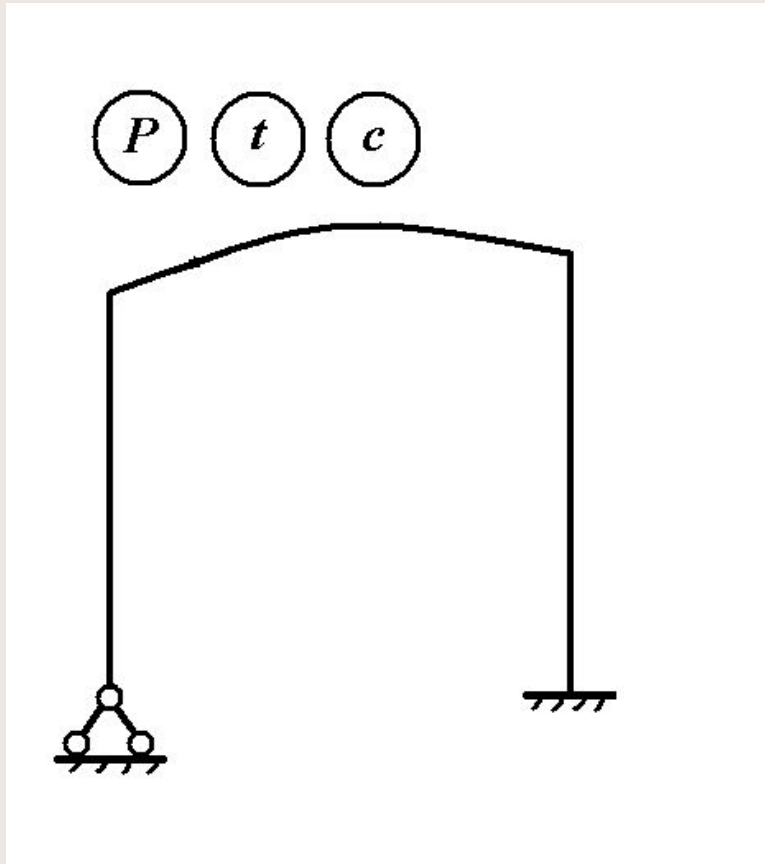
3. Аналитическая форма определения перемещений в плоской стержневой конструкции

Постановка вопроса

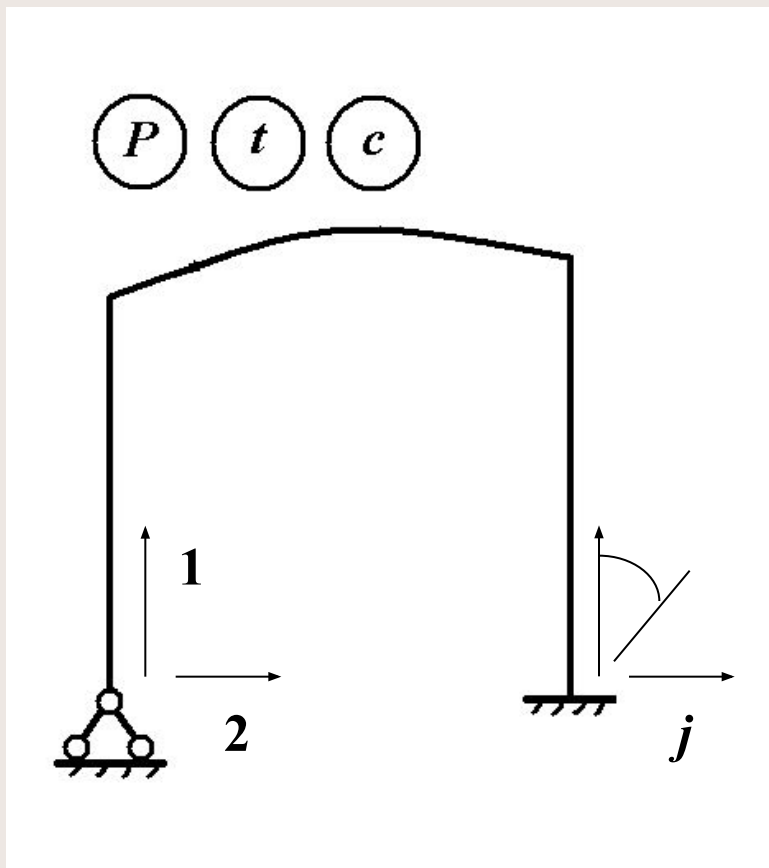
*Система статически определимая
или статически неопределимая*



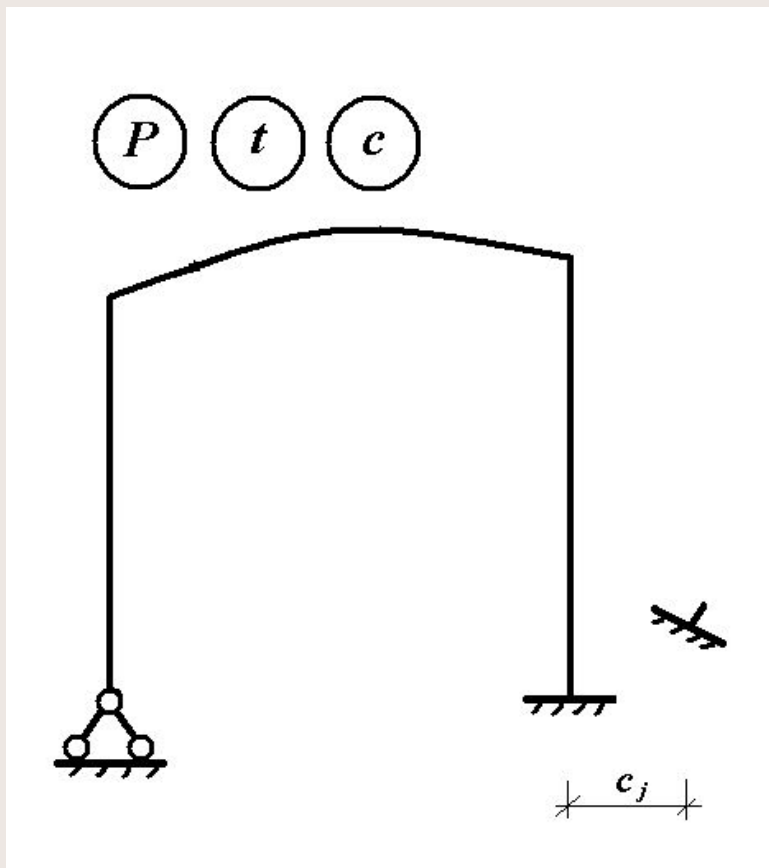
Постановка вопроса



Постановка вопроса

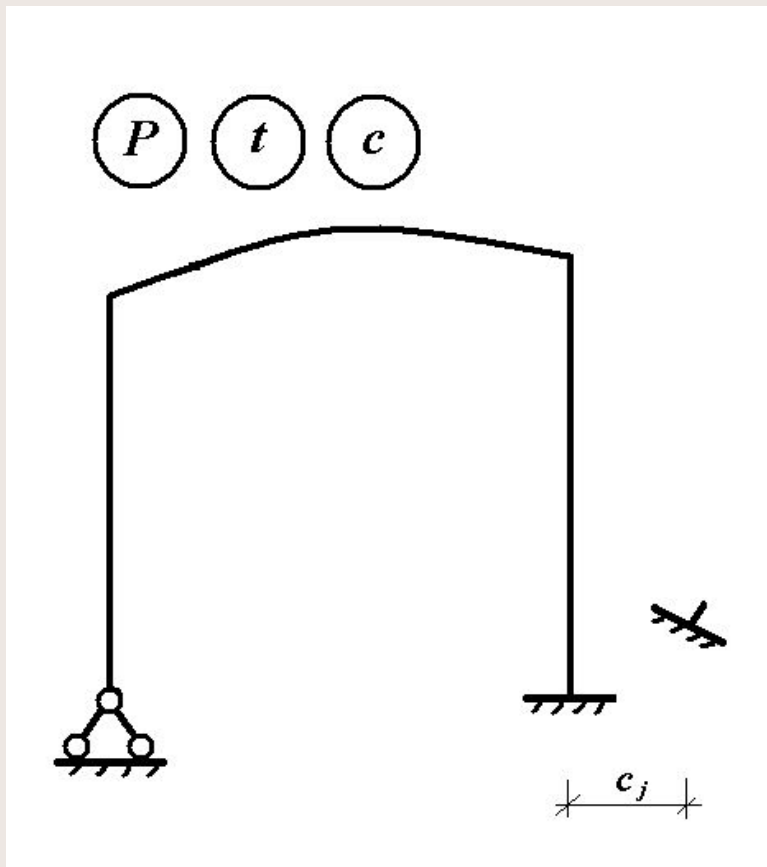


Постановка вопроса

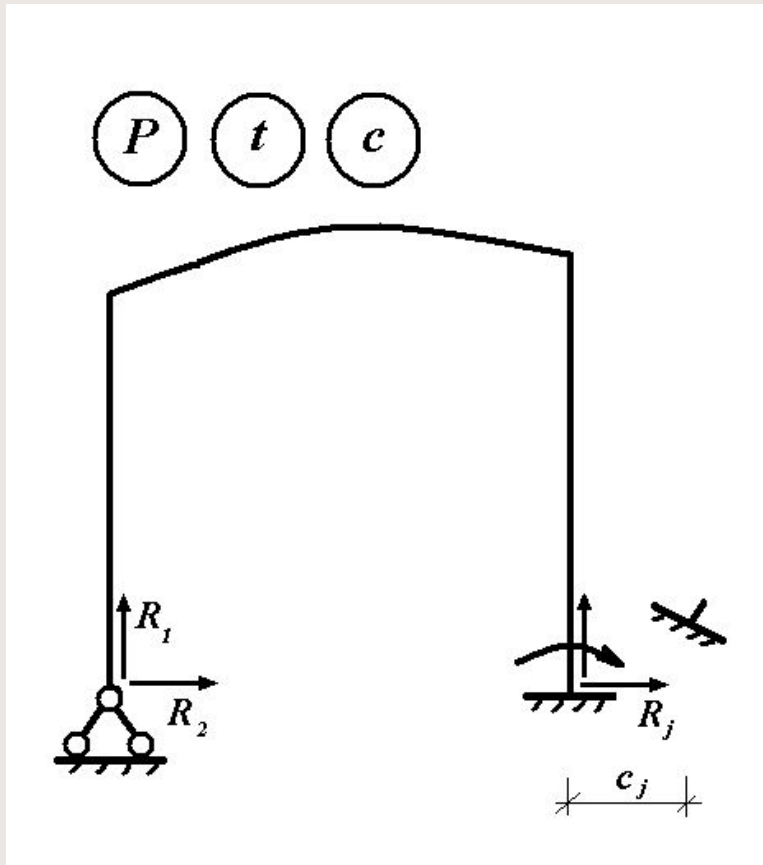


Постановка вопроса

Заданные параметры



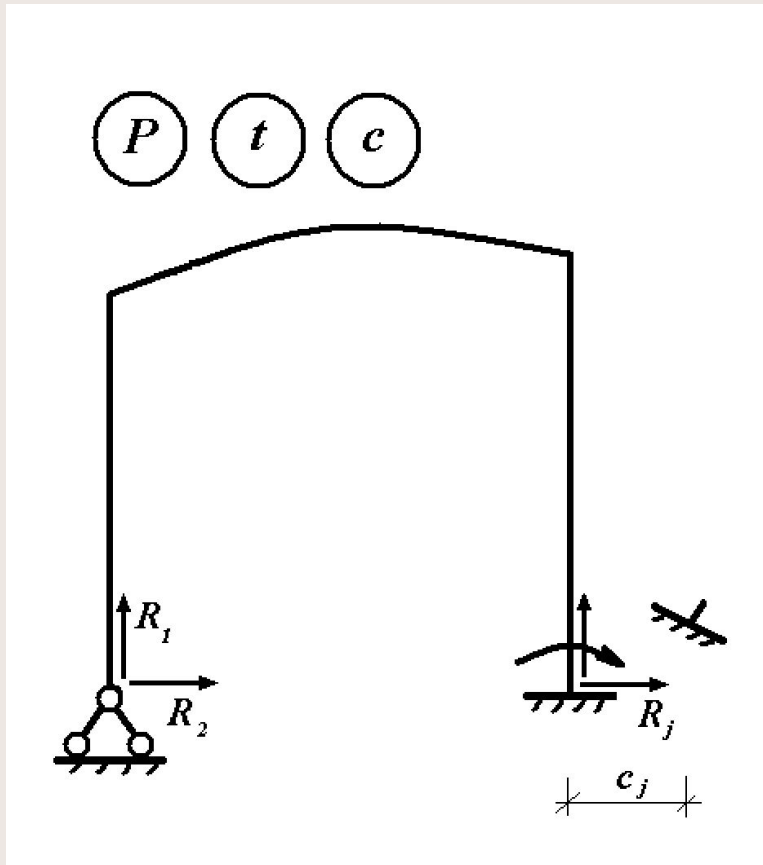
Постановка вопроса



Заданные параметры

$$R_1, \dots, R_j$$

Постановка вопроса

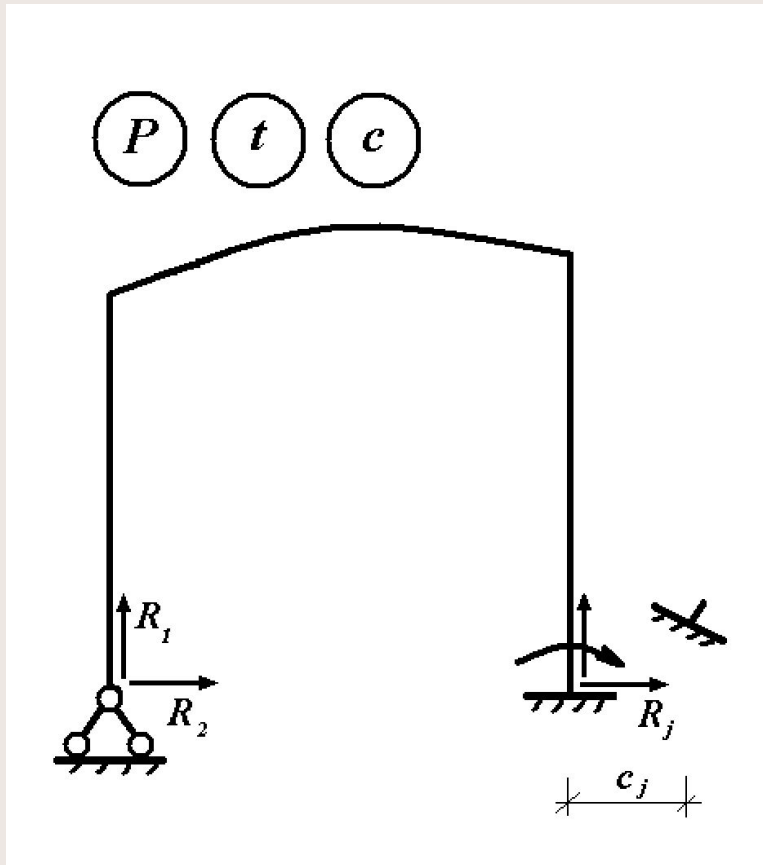


Заданные параметры

$$R_1, \dots, R_j$$

$$M, Q, N$$

Постановка вопроса



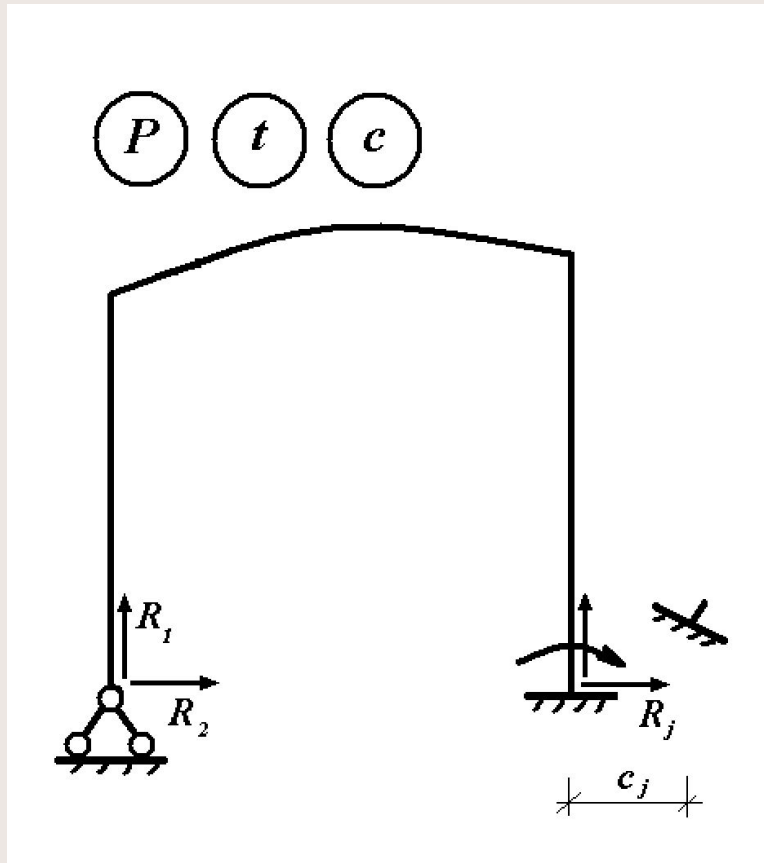
Заданные параметры

$$R_1, \dots, R_j$$

$$M, Q, N$$

$$\sigma, \tau$$

Постановка вопроса



Заданные параметры

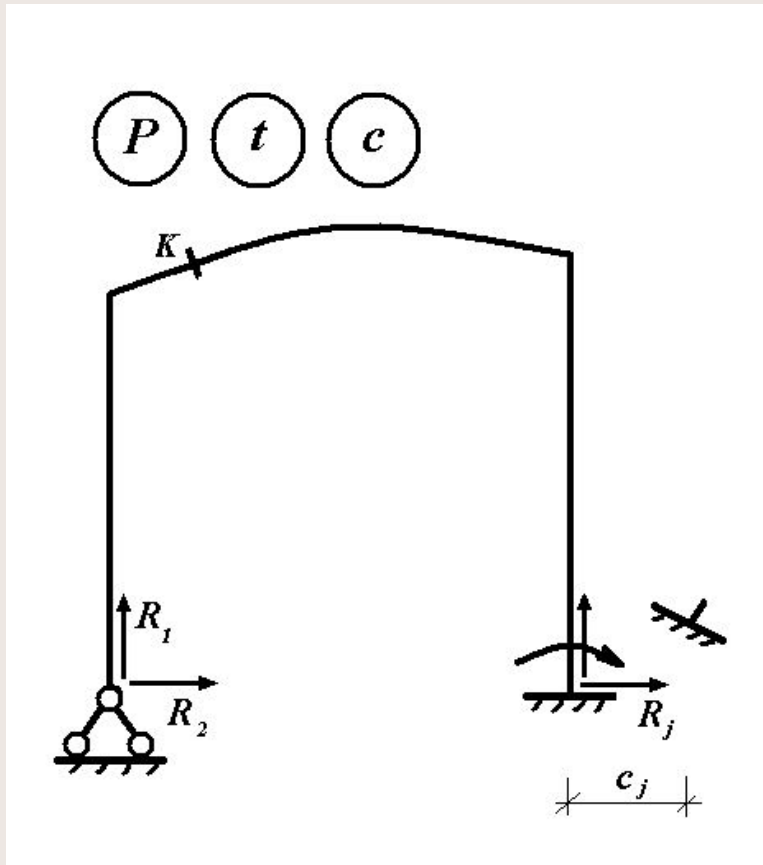
R_1, \dots, R_j

M, Q, N

σ, τ

ε, γ

Постановка вопроса



Заданные параметры

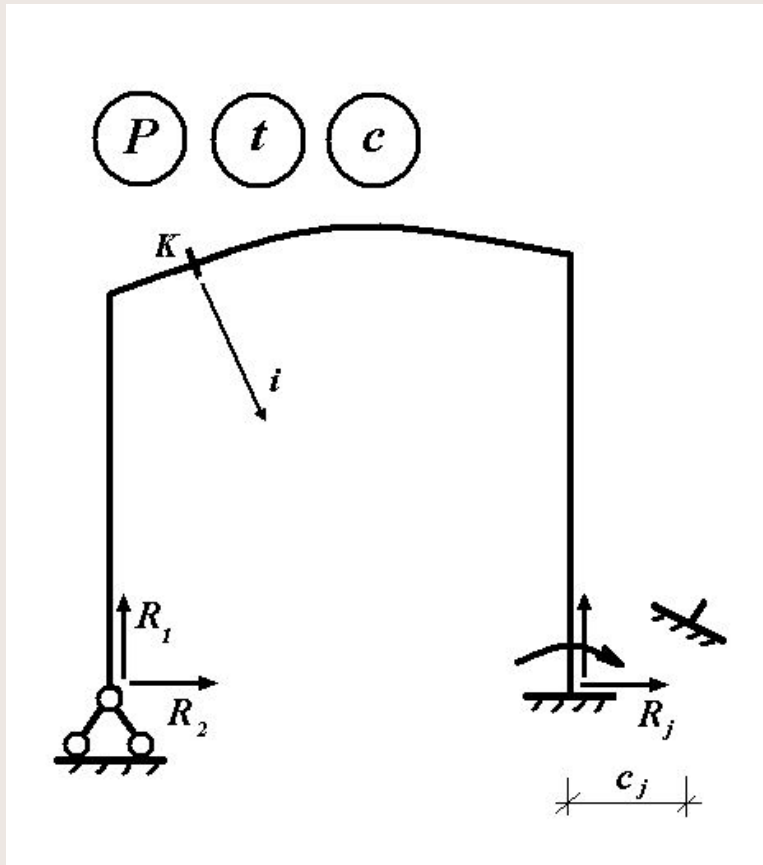
R_1, \dots, R_j

M, Q, N

σ, τ

ε, γ

Постановка вопроса



Заданные параметры

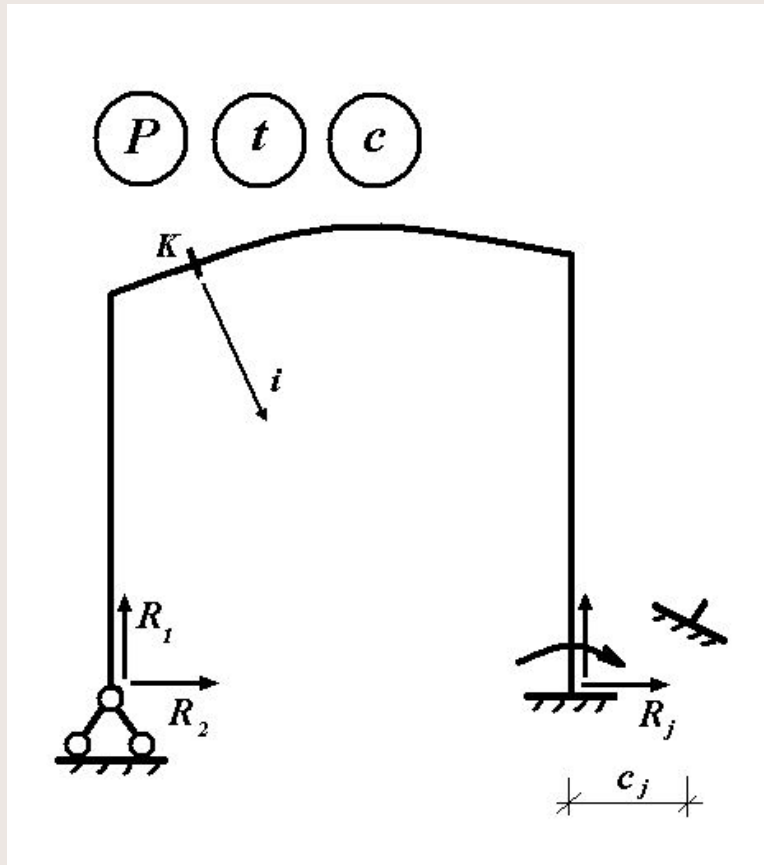
R_1, \dots, R_j

M, Q, N

σ, τ

ε, γ

Постановка вопроса



Заданные параметры

$$R_1, \dots, R_j$$

$$M, Q, N$$

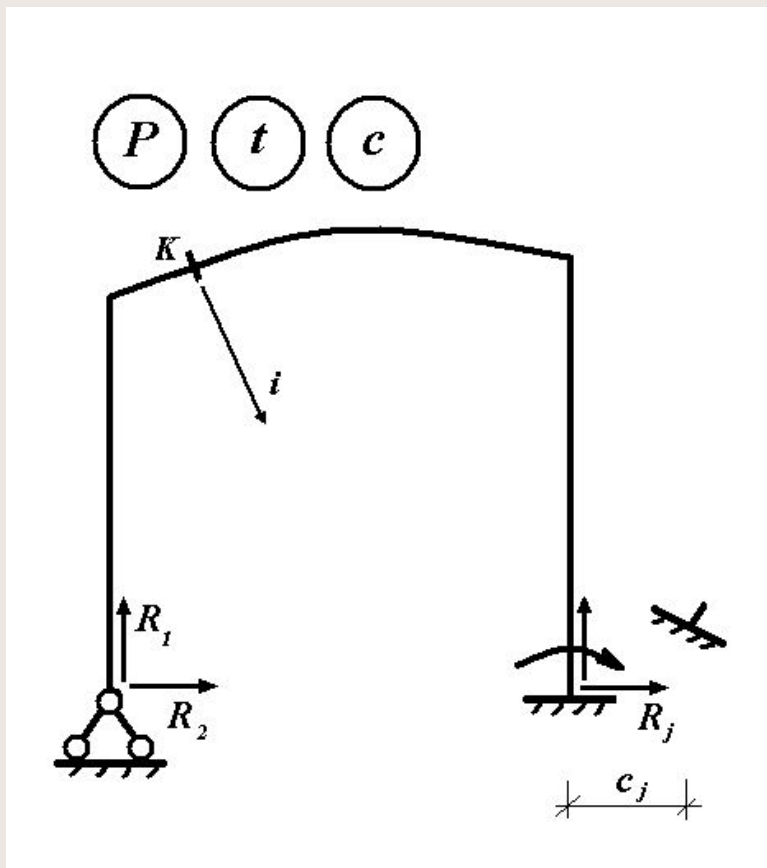
$$\sigma, \tau$$

$$\varepsilon, \gamma$$

Искомая величина

$$\Delta_i = ?$$

Заданное (действительное) состояние конструкции



Заданные параметры

$$R_1, \dots, R_j$$

$$M, Q, N$$

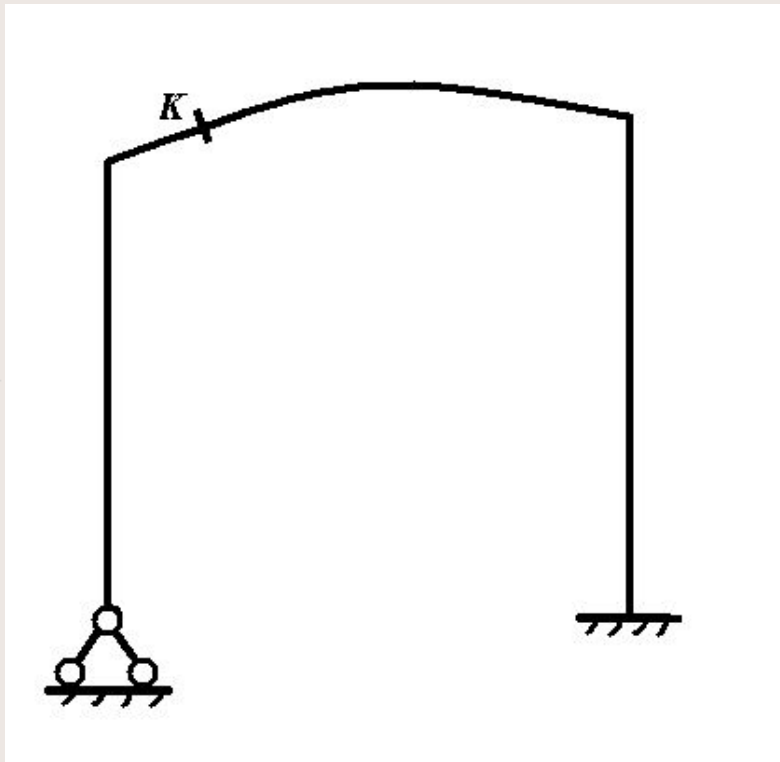
$$\sigma, \tau$$

$$\varepsilon, \gamma$$

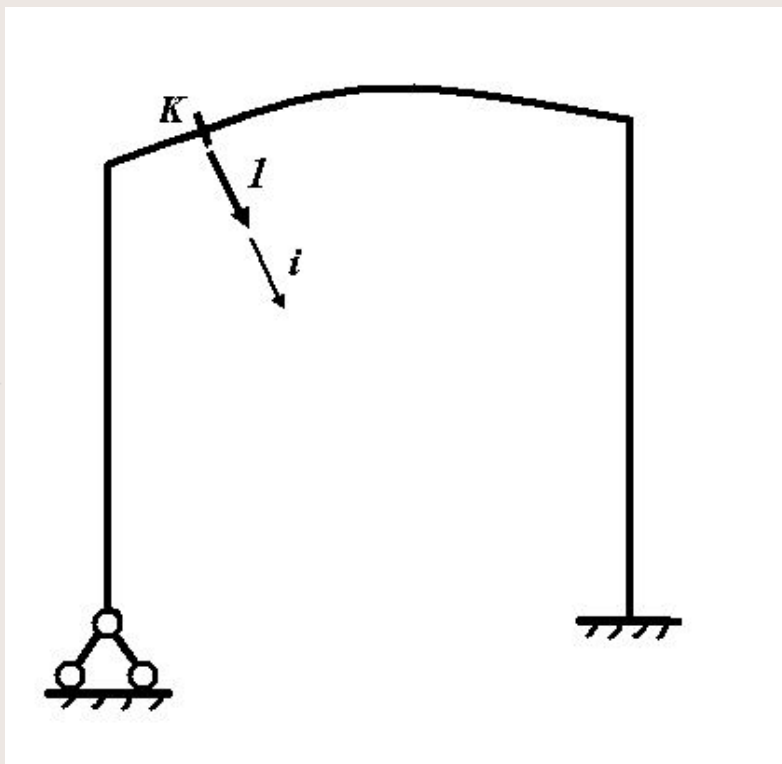
Искомая величина

$$\Delta_i = ?$$

Вспомогательное единичное состояние конструкции

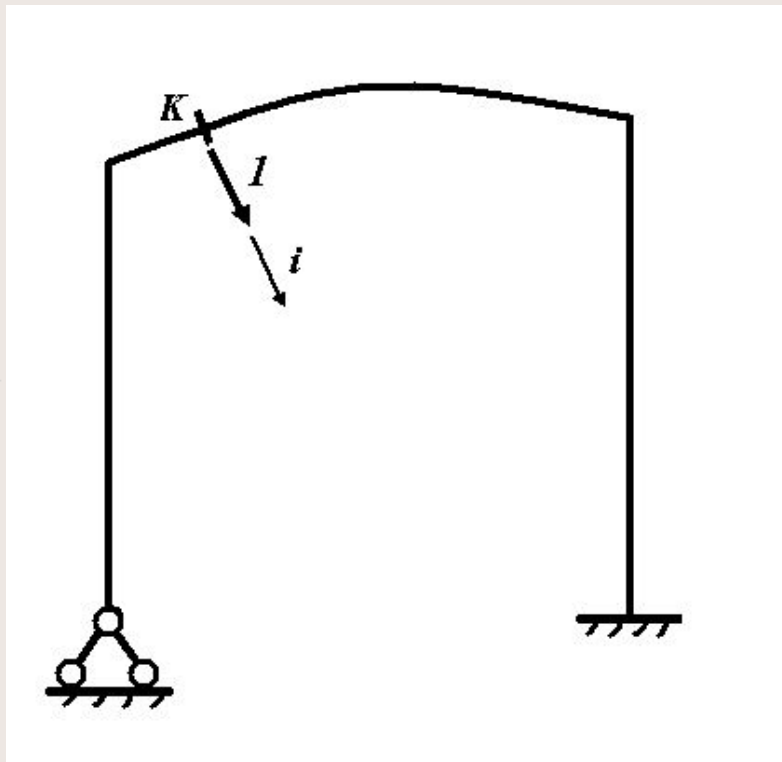


Вспомогательное единичное состояние конструкции



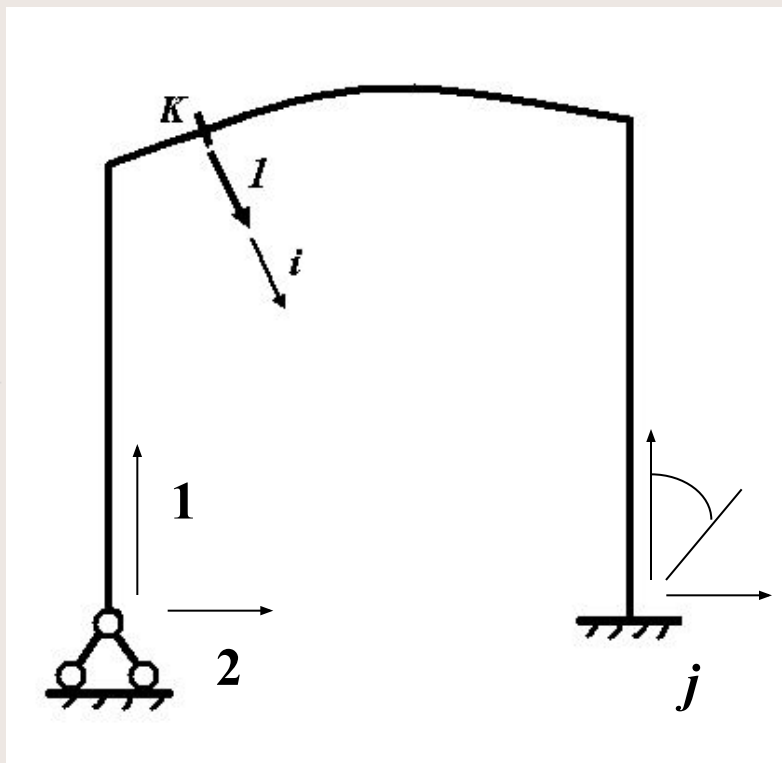
Вспомогательное единичное состояние конструкции

Заданные параметры

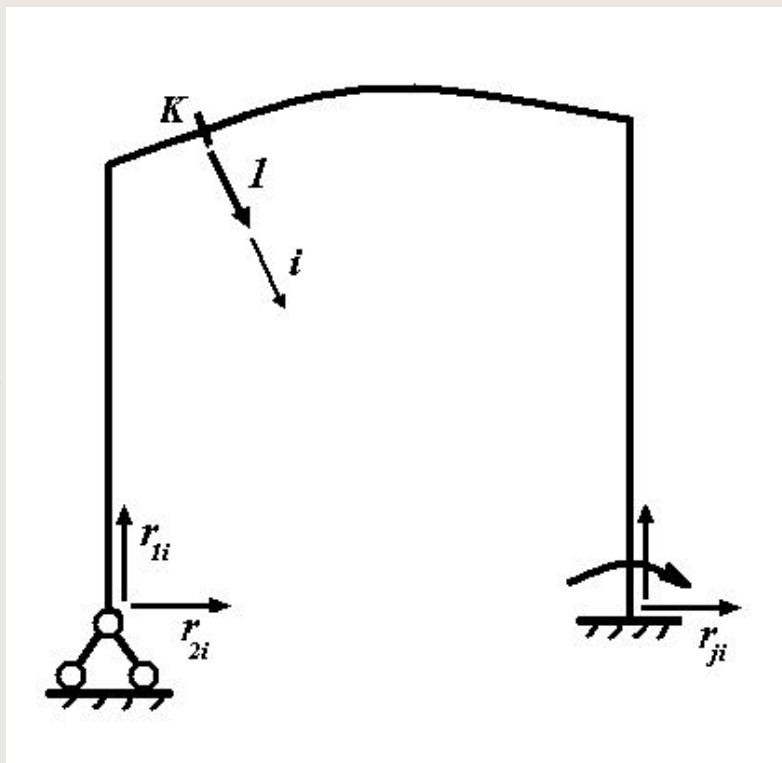


Вспомогательное единичное состояние конструкции

Заданные параметры



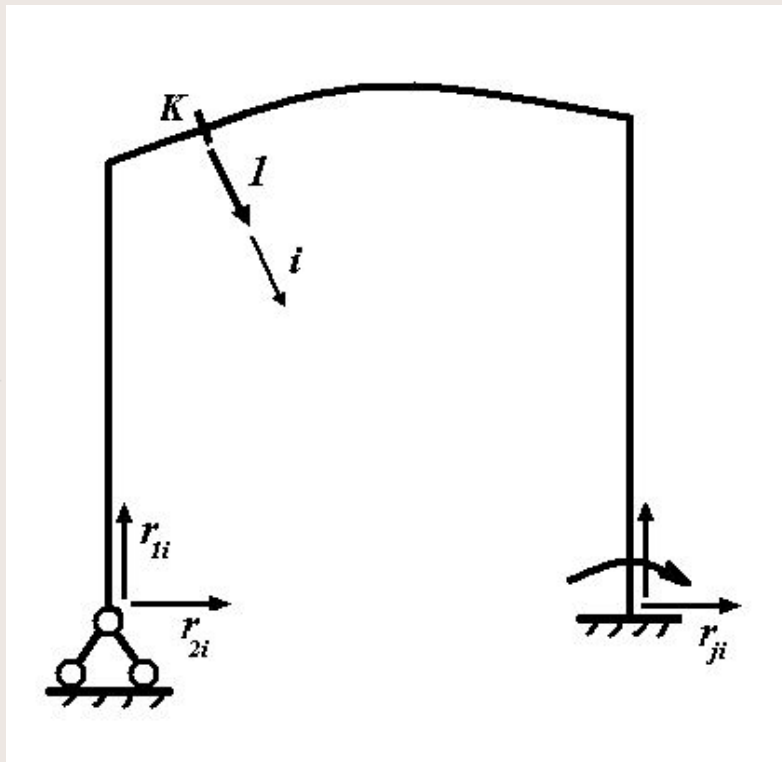
Вспомогательное единичное состояние конструкции



Заданные параметры

$$r_{1i}, \dots, r_{ji}$$

Вспомогательное единичное состояние конструкции

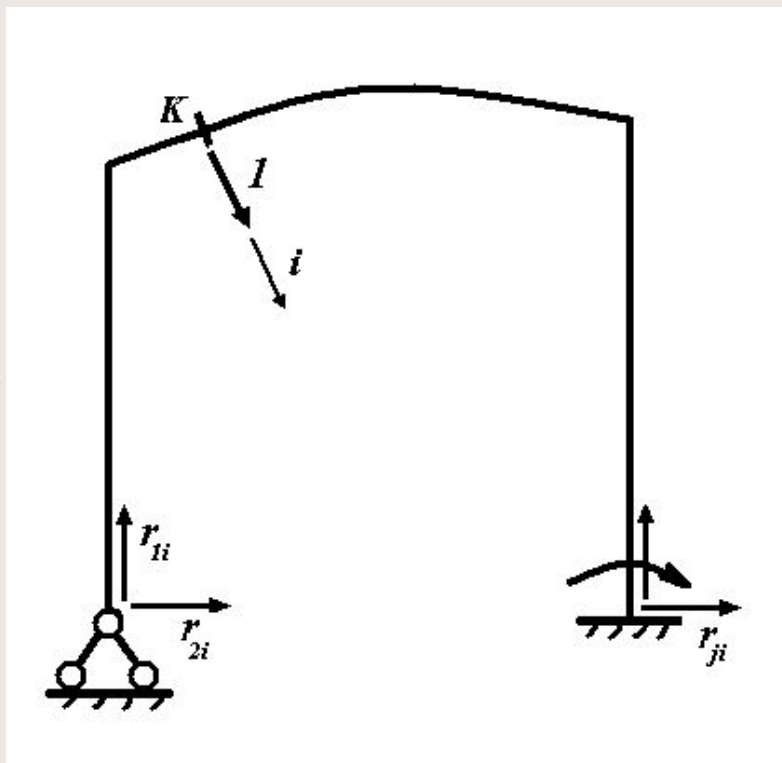


Заданные параметры

$$r_{1i}, \dots, r_{ji}$$

$$m_i, q_i, n_i$$

Вспомогательное единичное состояние конструкции



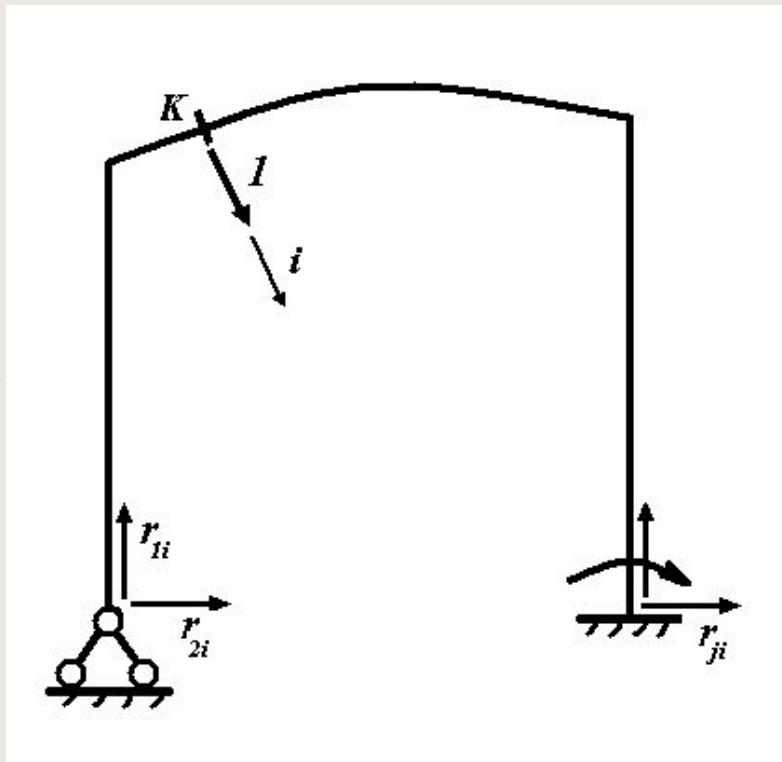
Заданные параметры

$$r_{1i}, \dots, r_{ji}$$

$$m_i, q_i, n_i$$

$$\sigma_i, \tau_i$$

Вспомогательное единичное состояние конструкции



Заданные параметры

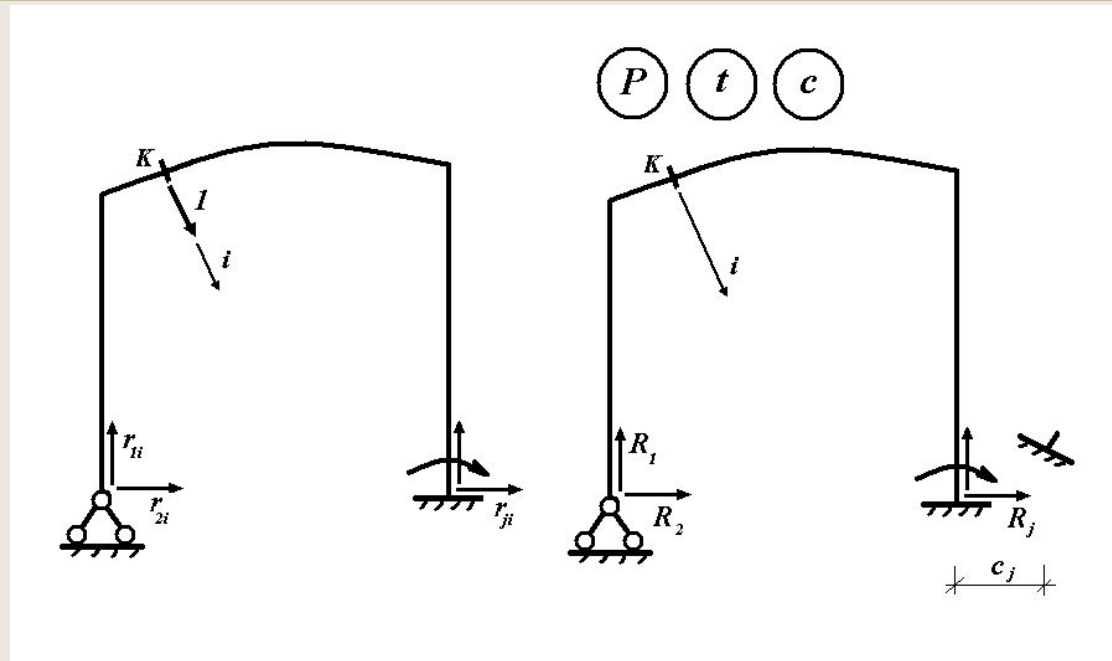
$$r_{1i}, \dots, r_{ji}$$

$$m_i, q_i, n_i$$

$$\sigma_i, \tau_i$$

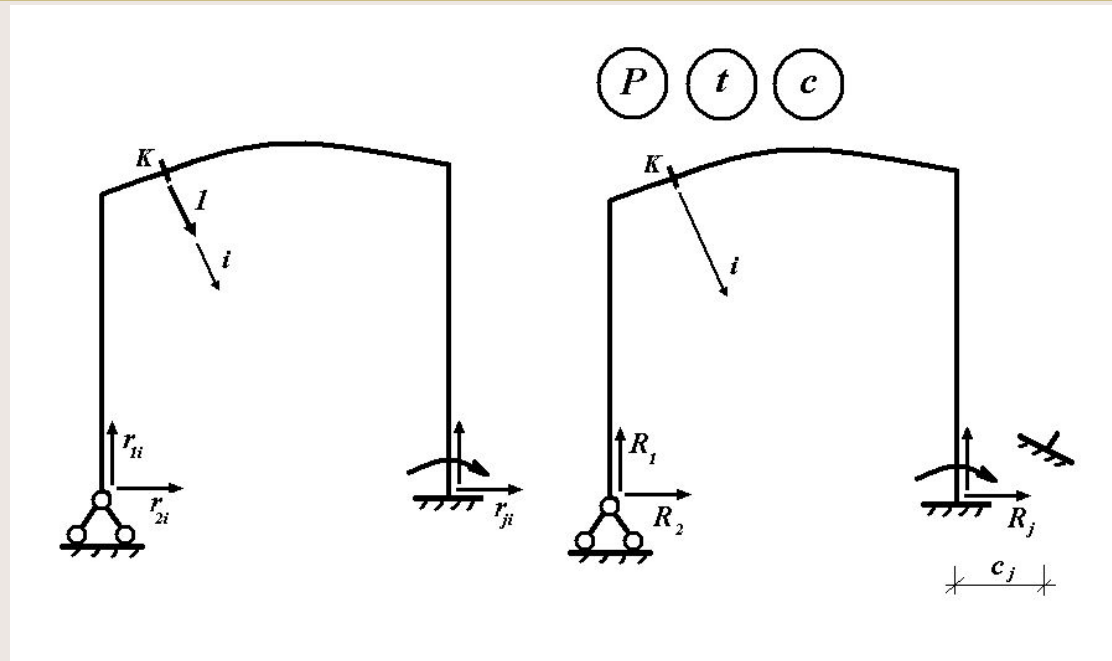
$$\varepsilon_i, \gamma_i$$

Универсальная формула для определения перемещений



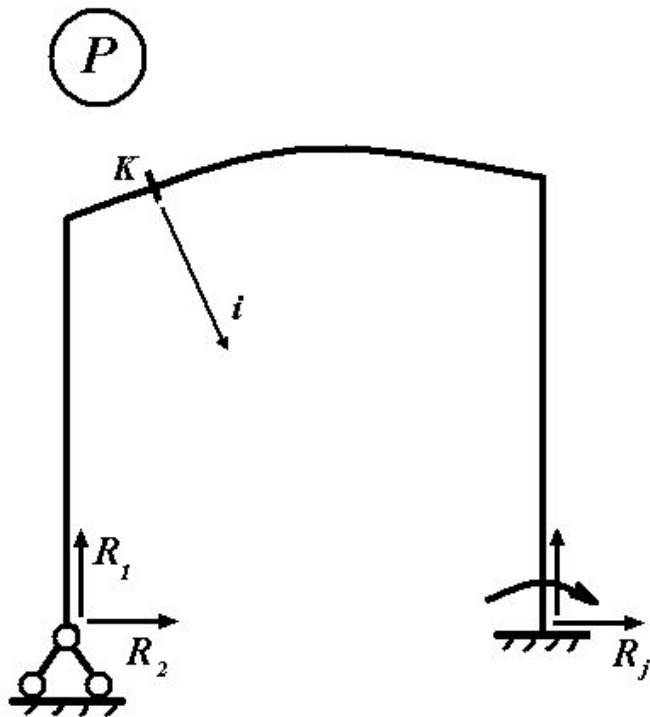
В основе вывода лежит принцип возможных перемещений для деформируемой системы

Универсальная формула для определения перемещений



$$\Delta_i = -\sum_j r_{ji} c_j + \sum_k \int_l \int_A (\sigma_i \varepsilon + \tau_i \gamma) dA ds$$

Универсальная формула при действии нагрузки



Система статически определимая
или статически неопределимая

Напряжения заданного состояния

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \int_A \left(\frac{\sigma_i \sigma}{E} + \frac{\tau_i \tau}{G} \right) dA ds$$

Напряжения единичного состояния

Какие есть вопросы?

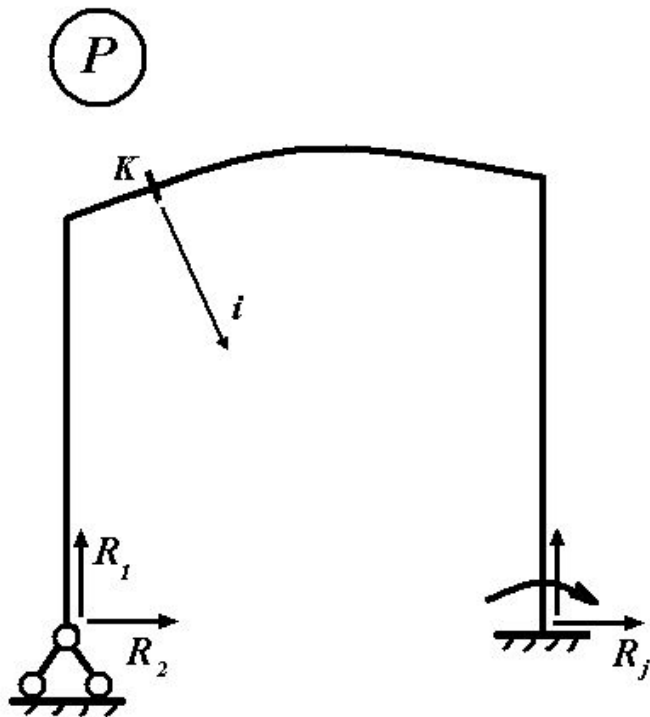


**Тогда идем
дальше.**



4. Рабочая формула для определения перемещений от действия нагрузки

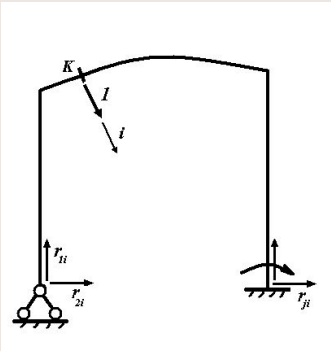
Универсальная формула при действии нагрузки



Система статически определимая
или статически неопределимая

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \int_A \left(\frac{\sigma_i \sigma}{E} + \frac{\tau_i \tau}{G} \right) dA ds$$

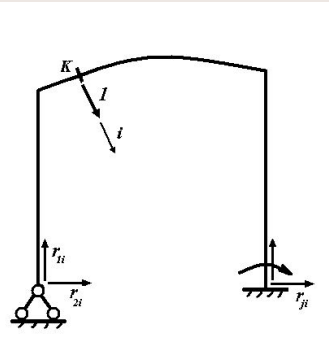
Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки



$$\Delta_i = \sum_k \int_l \left(\int_A \frac{\sigma_i \sigma}{E} dA + \int_A \frac{\tau_i \tau}{G} dA \right) ds$$

$$\Delta_i =$$

Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки



$$\Delta_i = \sum_k \int_l \left(\int_A \frac{\sigma_i \sigma}{E} dA + \int_A \frac{\tau_i \tau}{G} dA \right) ds$$

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds$$

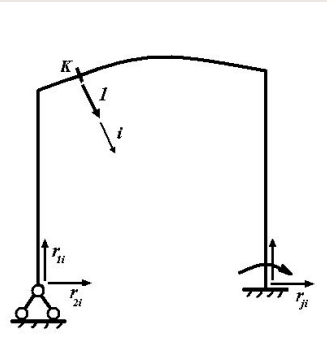
*Доля перемещения,
вызванная изгибными
деформациями элементов
конструкции*

19.05.2020

ПГУ, лектор Турищев Л.С.

97

Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки



$$\Delta_i = \sum_k \int_l \left(\int_A \frac{\sigma_i \sigma}{E} dA + \int_A \frac{\tau_i \tau}{G} dA \right) ds$$

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds$$

*Доля перемещения,
вызванная изгибными
деформациями элементов
конструкции*

19.05.2020

*Доля перемещения,
вызванная продольными
деформациями элементов
конструкции*

ПГУ, лектор Турищев Л.С.

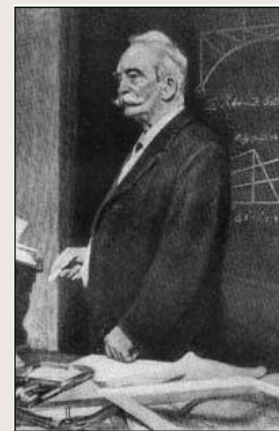
Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки



Максвелл

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \left(\int_A \frac{\sigma_i \sigma}{E} dA + \int_A \frac{\tau_i \tau}{G} dA \right) ds$$

Формула Максвелла-Мора



О.Мор

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds + \sum_k \int_l k \frac{q_i Q}{GA} ds$$

Доля перемещения, вызванная изгибными деформациями элементов конструкции

19.05.2020

Доля перемещения, вызванная продольными деформациями элементов конструкции

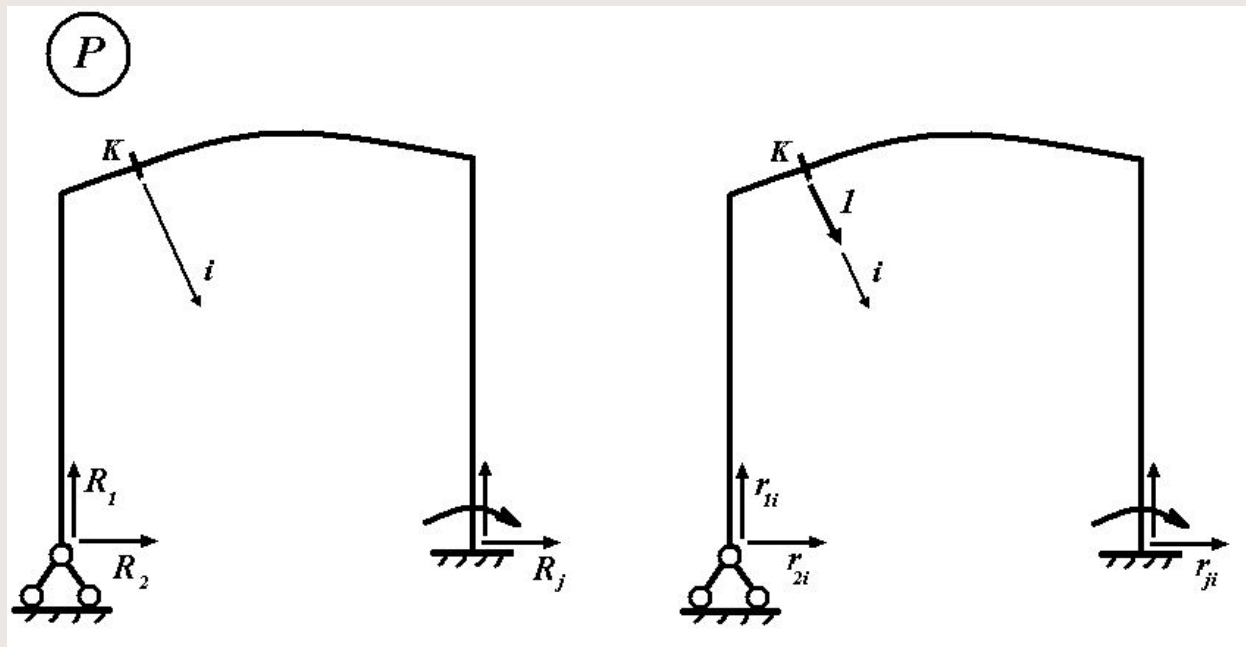
ПГУ, лектор Турищев Л.С.

Доля перемещения, вызванная сдвиговыми деформациями элементов конструкции

99

Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки

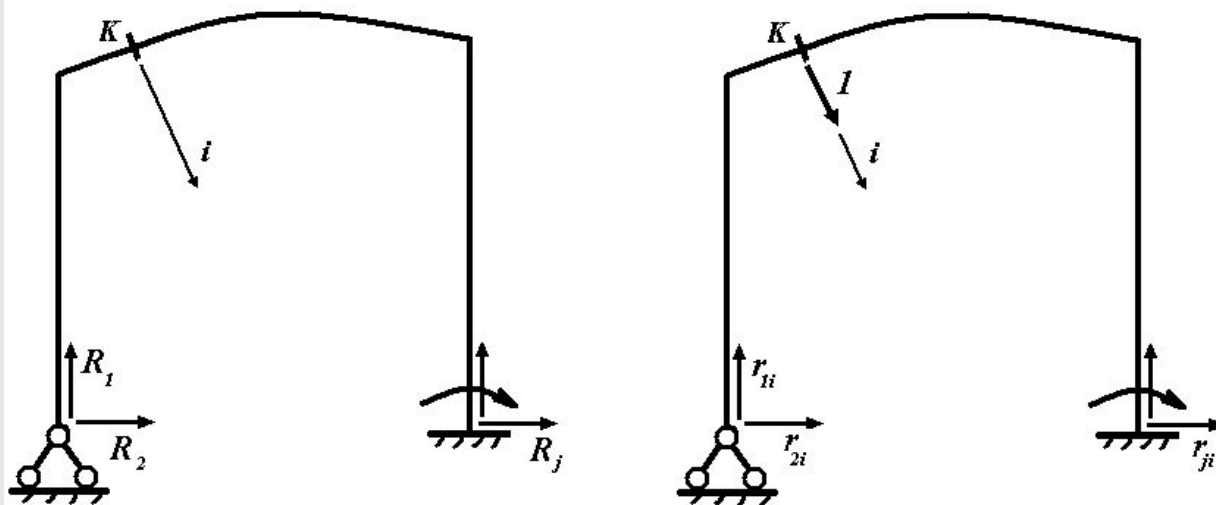
$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds + \sum_k k \int_l \frac{q_i Q}{GA} ds$$



Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки

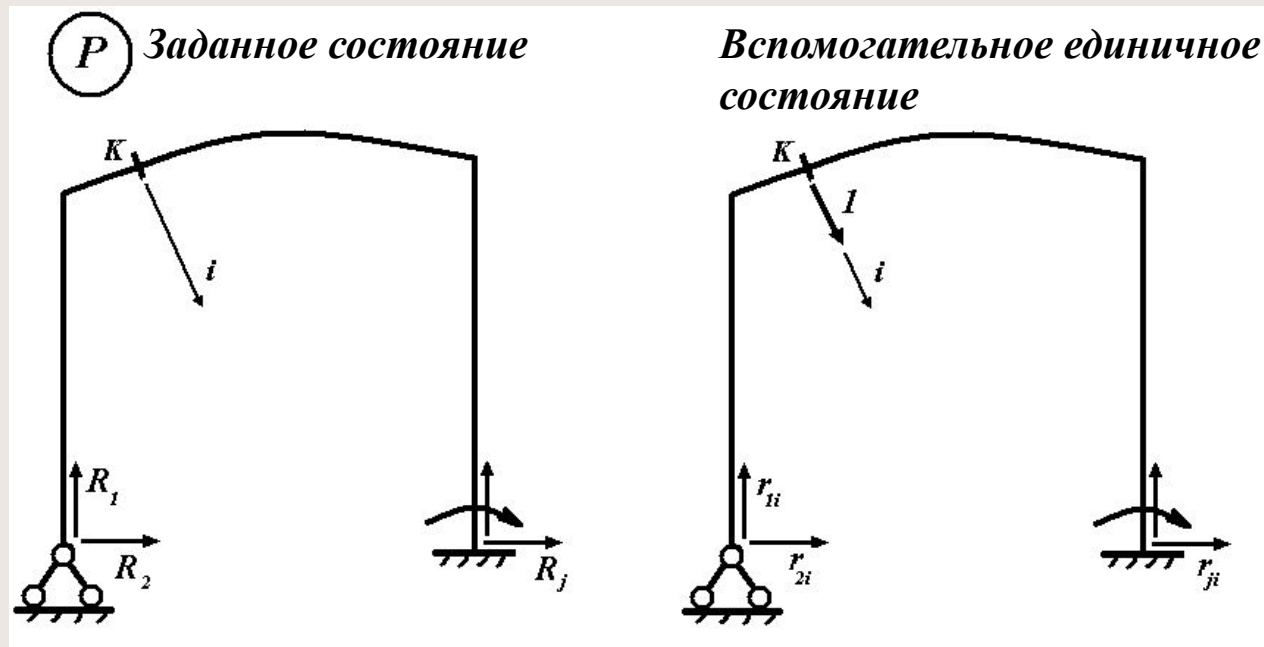
$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds + \sum_k k \int_l \frac{q_i Q}{GA} ds$$

(P) Заданное состояние



Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки

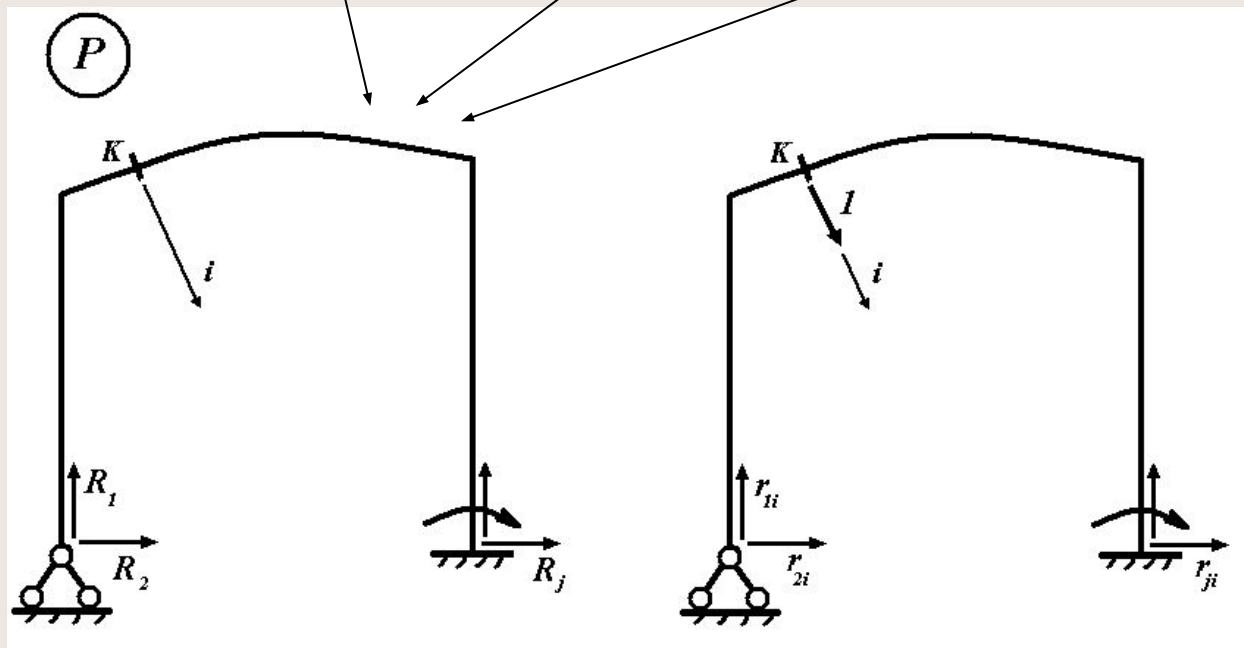
$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds + \sum_k \int_l \frac{q_i Q}{GA} ds$$



Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки

Внутренние усилия заданного состояния

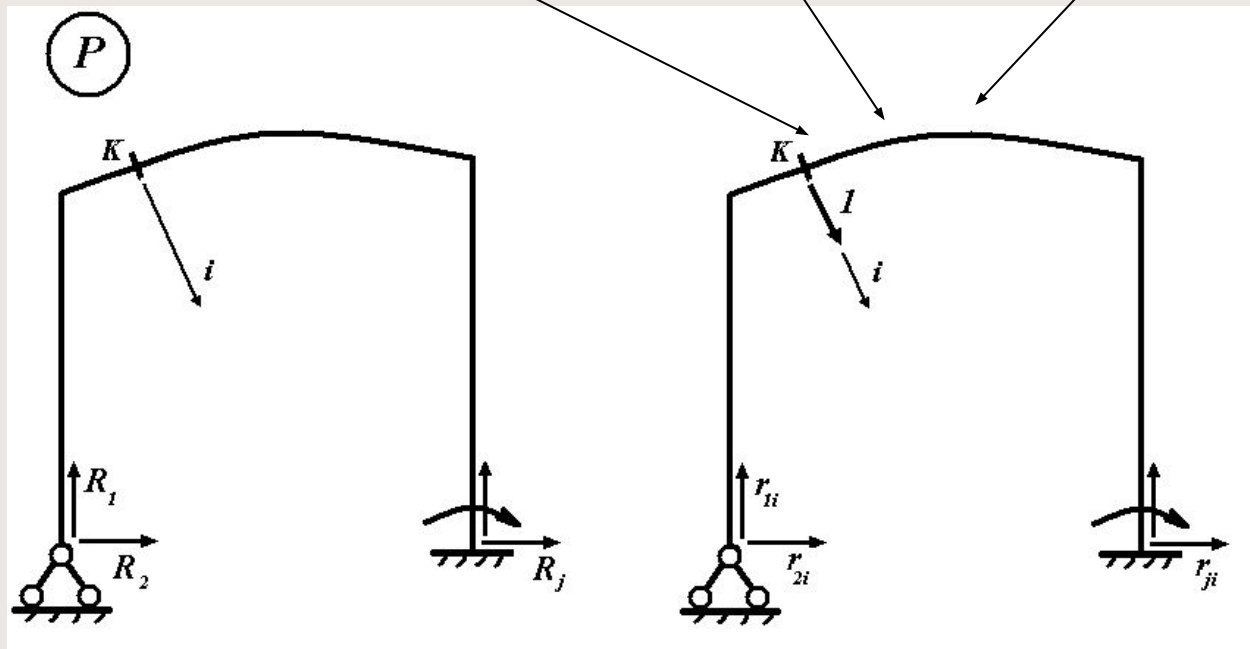
$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds + \sum_k \int_l k \frac{q_i Q}{GA} ds$$



Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки

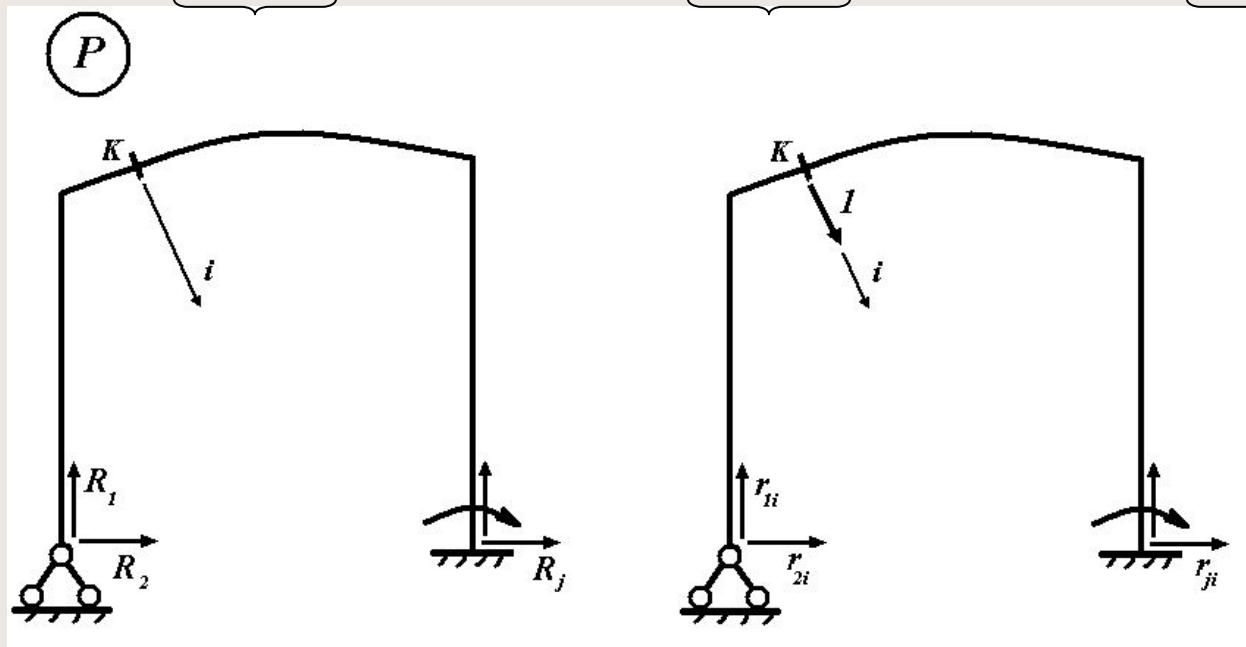
Внутренние усилия единичного состояния

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds + \sum_k k \int_l \frac{q_i Q}{GA} ds$$



Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \underbrace{\frac{m_i M}{EI_z}}_{\text{bending}} ds + \sum_k \int_l \underbrace{\frac{n_i N}{EA}}_{\text{axial}} ds + \sum_k \int_l \underbrace{k \frac{q_i Q}{GA}}_{\text{shear}} ds$$

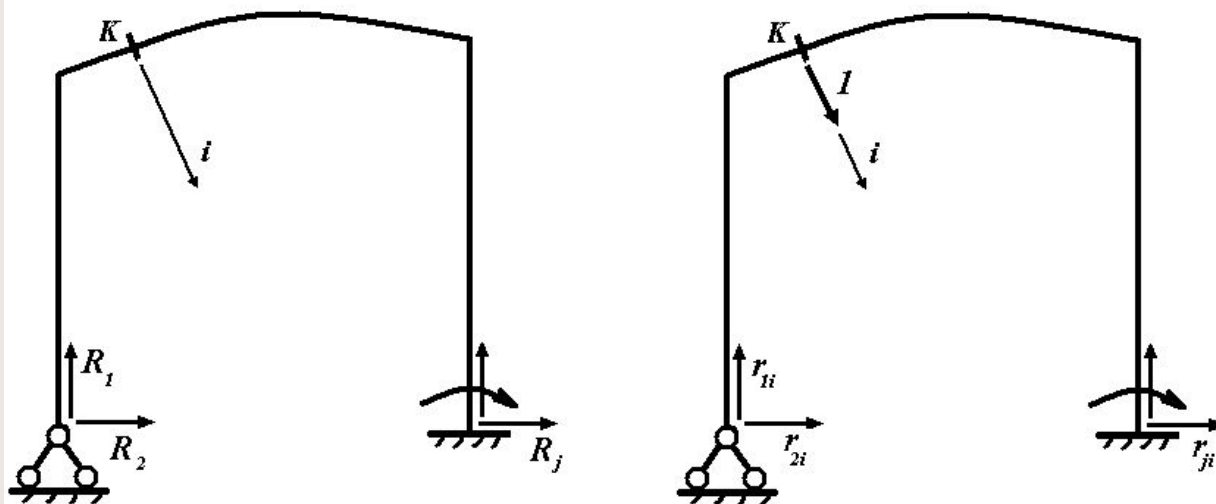


Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \underbrace{\frac{m_i M}{EI_z}}_{(P)} ds + \sum_k \int_l \underbrace{\frac{n_i N}{EA}}_{(P)} ds + \sum_k \int_l \underbrace{\frac{q_i Q}{GA}}_{(P)} ds$$

(P)

Жесткости поперечного сечения



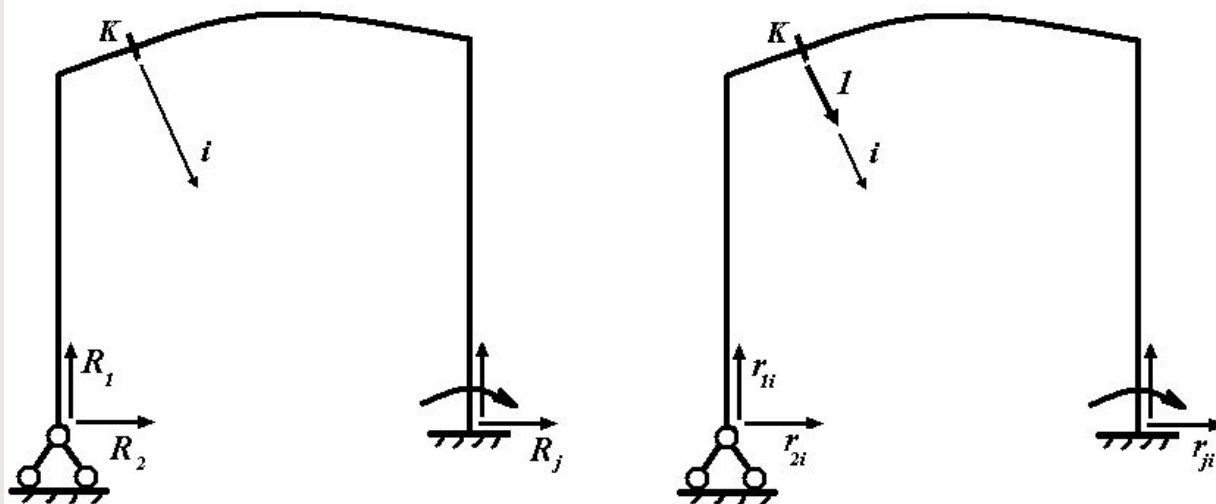
Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки

Изгибная жесткость

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \underbrace{\frac{m_i M}{EI_z}}_{\text{Жесткости поперечного сечения}} ds + \sum_k \int_l \underbrace{\frac{n_i N}{EA}}_{\text{Жесткости поперечного сечения}} ds + \sum_k \int_l \underbrace{\frac{q_i Q}{GA}}_{\text{Жесткости поперечного сечения}} ds$$

(P)

Жесткости поперечного сечения



Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки

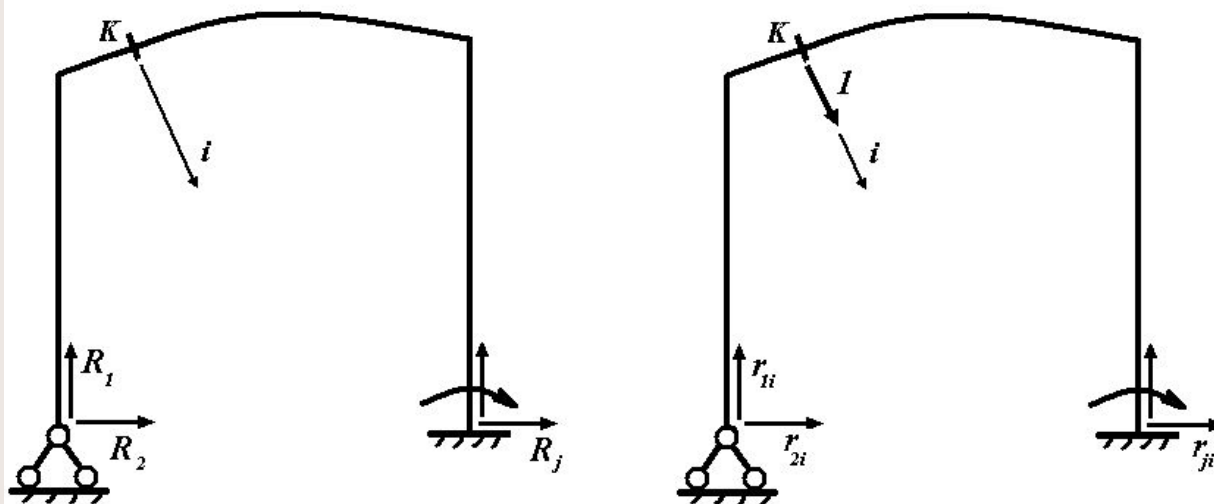
Изгибная жесткость

Продольная жесткость

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \underbrace{\frac{m_i M}{EI_z}}_{\text{Изгибная жесткость}} ds + \sum_k \int_l \underbrace{\frac{n_i N}{EA}}_{\text{Продольная жесткость}} ds + \sum_k \int_l \underbrace{k \frac{q_i Q}{GA}}_{\text{Жесткости поперечного сечения}} ds$$

(P)

Жесткости поперечного сечения



Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки

Изгибная жесткость

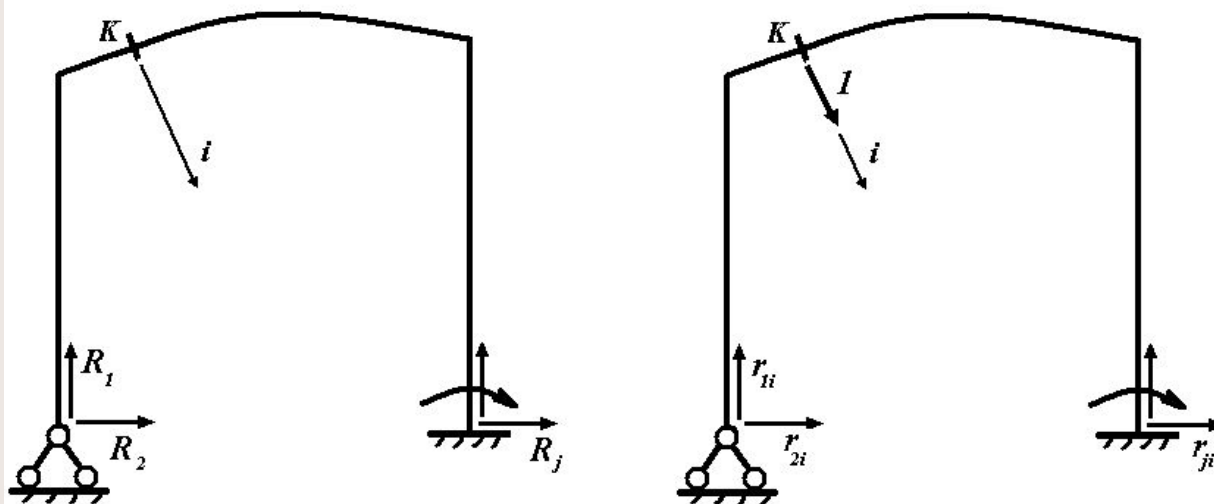
Продольная жесткость

Сдвиговая жесткость

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \underbrace{\frac{m_i M}{EI_z}}_{\text{Изгибная жесткость}} ds + \sum_k \int_l \underbrace{\frac{n_i N}{EA}}_{\text{Продольная жесткость}} ds + \sum_k \int_l \underbrace{k \frac{q_i Q}{GA}}_{\text{Сдвиговая жесткость}} ds$$

(P)

Жесткости поперечного сечения



Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки для частных видов стержневых систем

Балки и рамные конструкции небольшой этажности

$$\Delta_i \approx \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds$$

При определении перемещений можно учитывать только изгибные деформации элементов конструкции

Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки для частных видов стержневых систем

Рамные конструкции повышенной этажности

Арки и комбинированные системы

$$\Delta_i \approx \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds$$

При определении перемещений необходимо учитывать изгибные и продольные деформации элементов конструкции

Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки для частных видов стержневых систем

Ферменные конструкции

$$\Delta_i \approx \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds$$

При определении перемещений можно учитывать только продольные деформации элементов конструкции

Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки для частных видов стержневых систем

Ферменные конструкции

$$\Delta_i \approx \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds = \sum_k \frac{n_i N}{EA} l_k$$

При определении перемещений можно учитывать только продольные деформации элементов конструкции

**Какие есть
вопросы?**



**Тогда идем
дальше.**



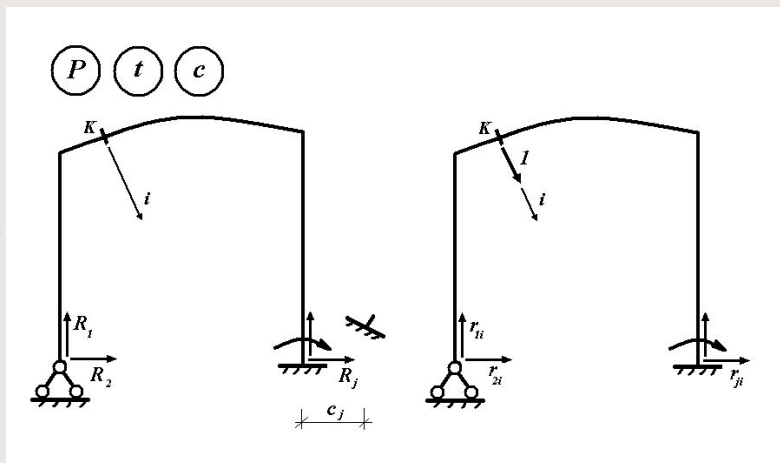
5. Особенности вычисления интегралов, встречающихся при определении перемещений

19.05.2020

ПГУ, лектор Турищев Л.С.

116

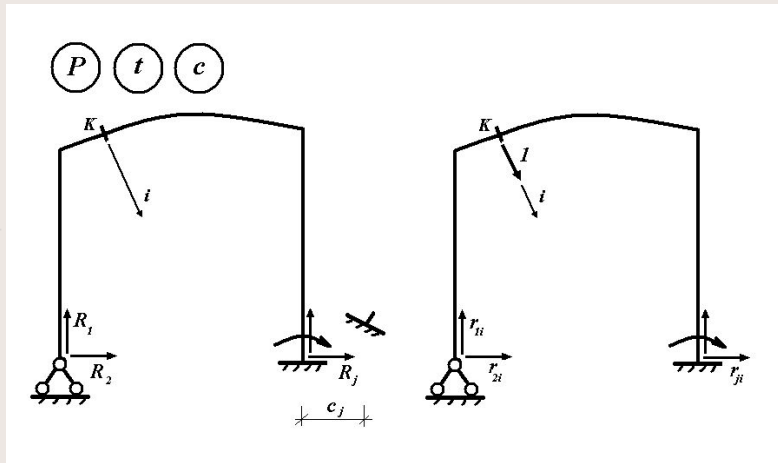
Два типа поперечных сечений



- С переменными размерами по длине стержней конструкции
- С постоянными размерами по длине стержней конструкции

Поперечные сечения с переменными размерами

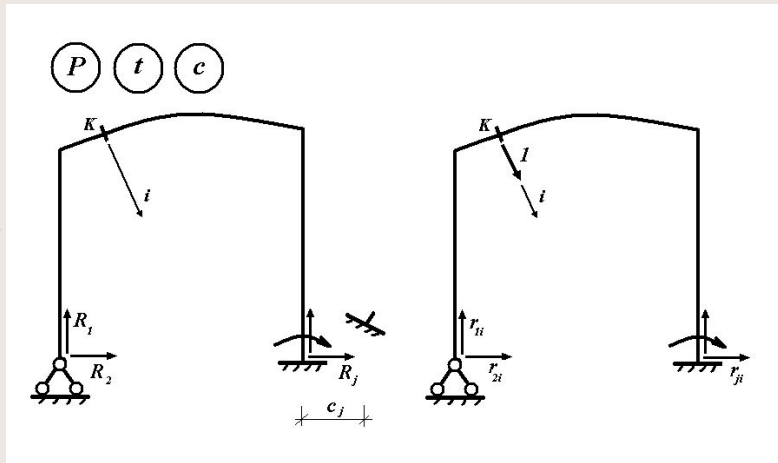
$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds + \sum_k \int_l \frac{q_i Q}{GA} ds$$



Для вычисления интегралов, входящих в формулу Максвелла-Мора, применяют методы численного интегрирования

Поперечные сечения с постоянными размерами

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds + \sum_k \int_l \frac{q_i Q}{GA} ds$$

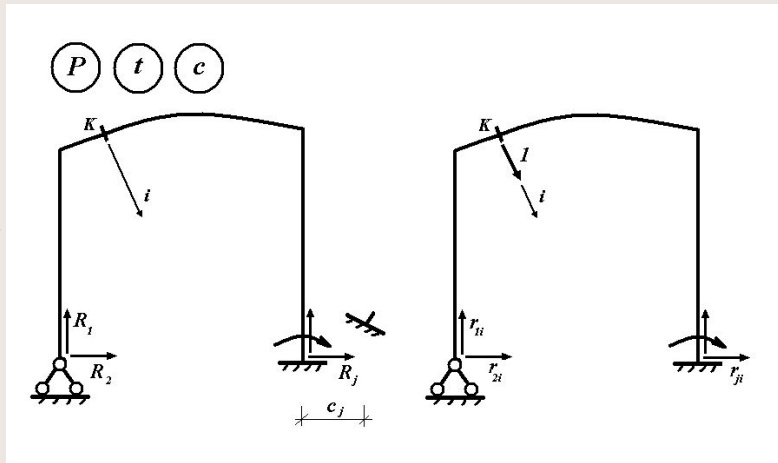


Поперечные сечения с постоянными размерами

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds + \sum_k \int_l \frac{q_i Q}{GA} ds$$

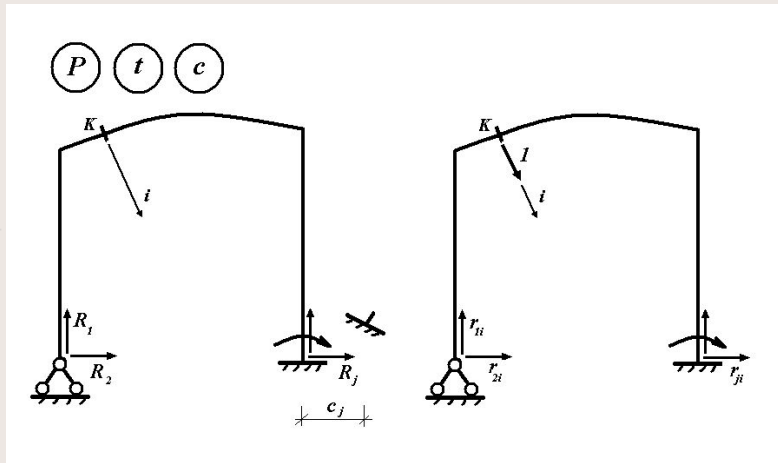
$$\underbrace{EI_z, EA, GA}$$

Константы, независящие от длин стержней



Поперечные сечения с постоянными размерами

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds + \sum_k \int_l \frac{q_i Q}{GA} ds \quad \int_l m_i M ds, \quad \int_l n_i N ds, \quad \int_l q_i Q ds$$



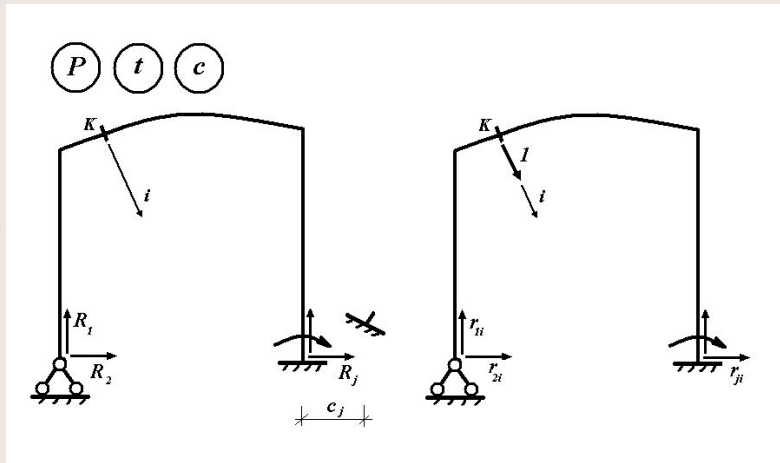
Поперечные сечения с постоянными размерами

Внутренние усилия ед. состояния

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds + \sum_k \int_l \frac{q_i Q}{GA} ds$$

$$\int_l m_i M ds, \int_l n_i N ds, \int_l q_i Q ds$$

описываются по длине стержня линейными функциями



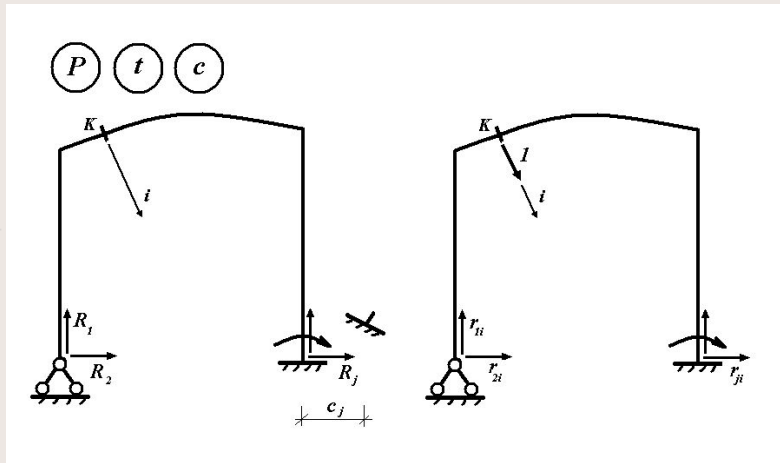
Поперечные сечения с постоянными размерами

Внутренние усилия гр. состояния

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds + \sum_k \int_l \frac{q_i Q}{GA} ds$$

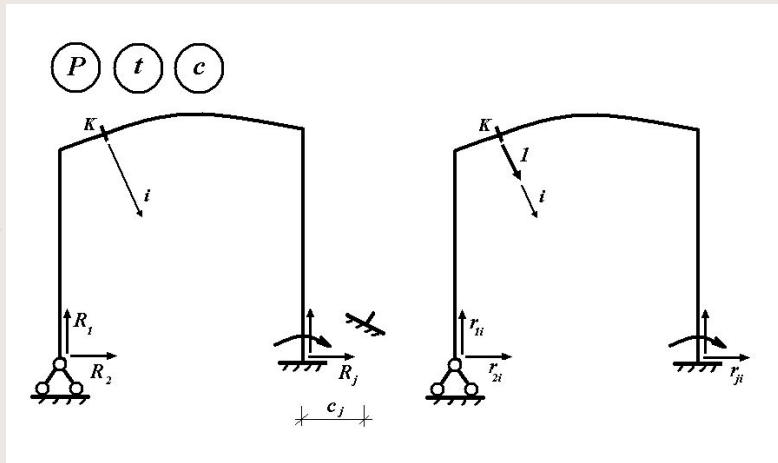
$$\int_l m_i M ds, \int_l n_i N ds, \int_l q_i Q ds$$

*описываются по длине стержня
нелинейными функциями*



Поперечные сечения с постоянными размерами

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds + \sum_k \int_l \frac{q_i Q}{GA} ds \quad \int_l m_i M ds, \quad \int_l n_i N ds, \quad \int_l q_i Q ds$$



Линейные функции

m_i, n_i, q_i

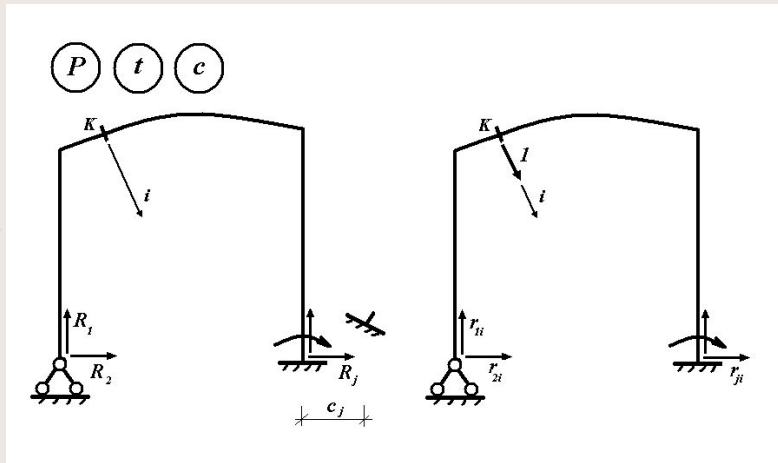
M, N, Q

Нелинейные функции

Поперечные сечения с постоянными размерами

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds + \sum_k \int_l \frac{q_i Q}{GA} ds$$

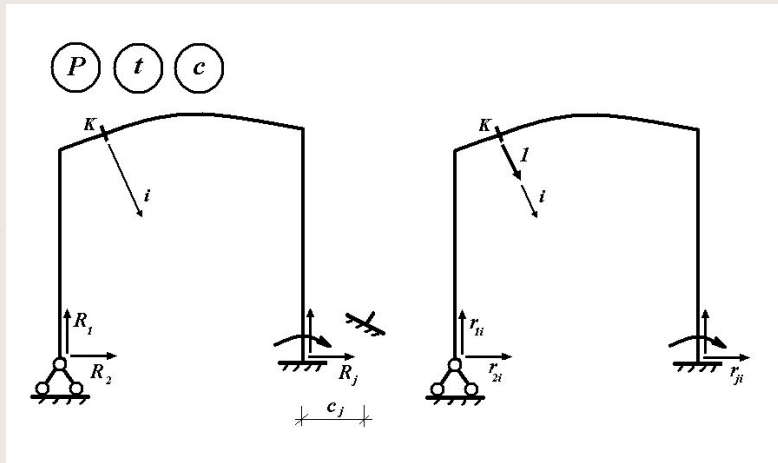
$$\underbrace{\int_l m_i M ds}, \quad \underbrace{\int_l n_i N ds}, \quad \underbrace{\int_l q_i Q ds}$$



$$\int_{x_a}^{x_b} f F dx$$

Поперечные сечения с постоянными размерами

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds + \sum_k \int_l \frac{q_i Q}{GA} ds \quad \int_l m_i M ds, \quad \int_l n_i N ds, \quad \int_l q_i Q ds$$



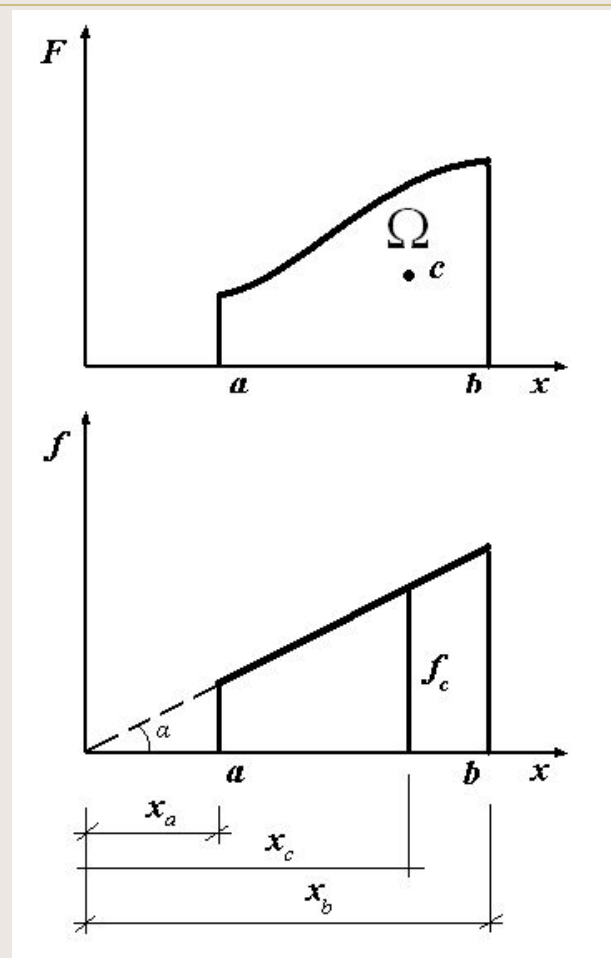
Линейная функция

$$\int_{x_a}^{x_b} f F dx$$

Нелинейная функция

Правило Верещагина

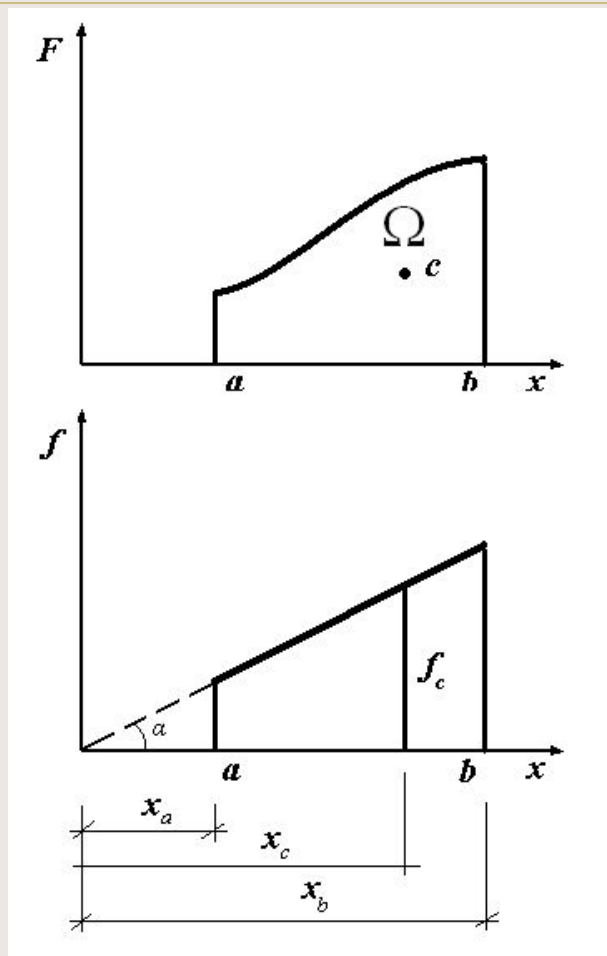
$$\int_{x_a}^{x_b} f F dx = f_c \Omega$$



Правило Верещагина

Определённый интеграл от произведения двух функций, одна из которых линейная, вторая нелинейная, равняется произведению площади

$$\int_{x_a}^{x_b} f F dx = f_c \Omega$$

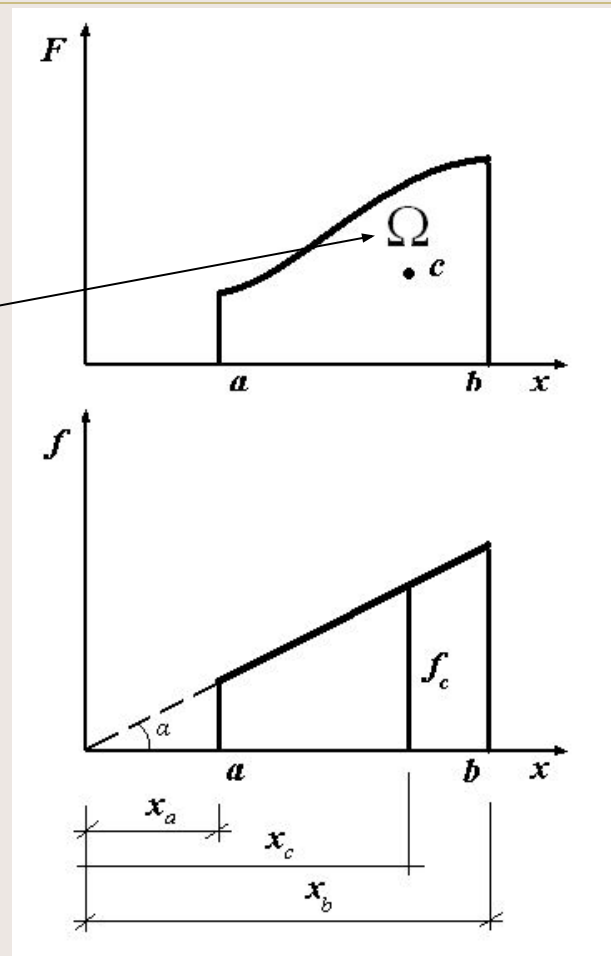


Правило Верещагина

Определённый интеграл от произведения двух функций, одна из которых линейная, вторая нелинейная, равняется произведению площади

$$\int_{x_a}^{x_b} f F dx = f_c \Omega$$

графика нелинейной функции

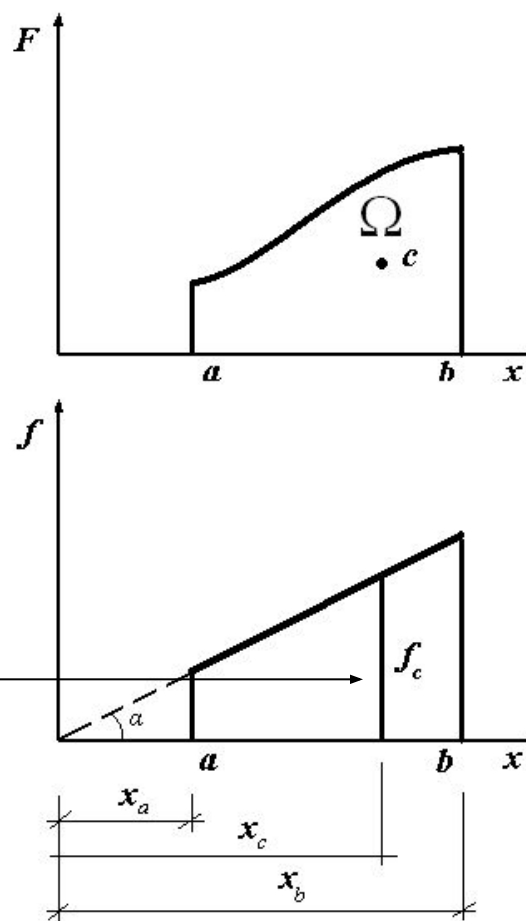


Правило Верещагина

Определённый интеграл от произведения двух функций, одна из которых линейная, вторая нелинейная, равняется произведению площади

$$\int_{x_a}^{x_b} f F dx = f_c \Omega$$

графика нелинейной функции на ординату графика линейной функции,

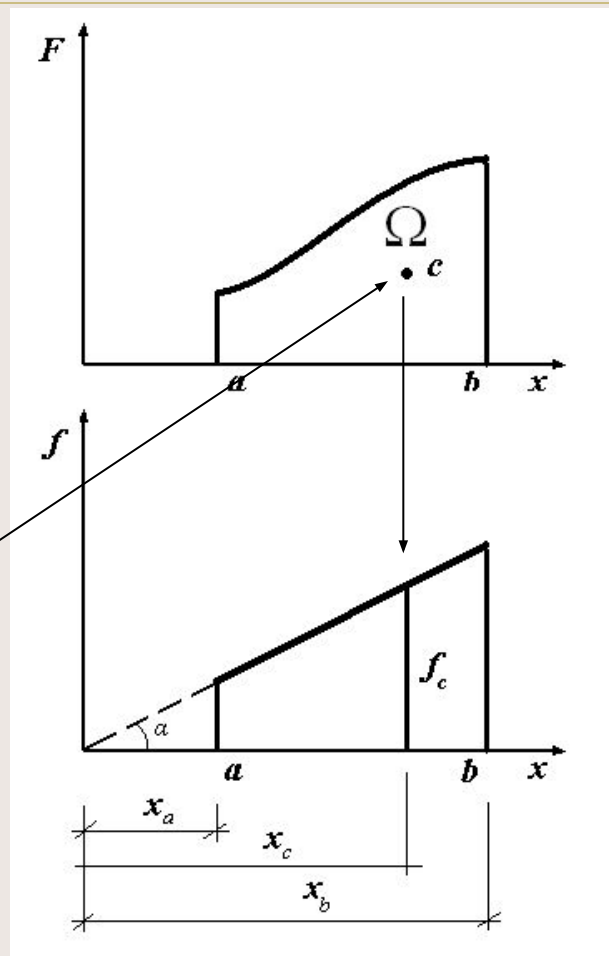


Правило Верещагина

Определённый интеграл от произведения двух функций, одна из которых линейная, вторая нелинейная, равняется произведению площади

$$\int_{x_a}^{x_b} f F dx = f_c \Omega$$

графика нелинейной функции на ординату графика линейной функции, взятую под центром тяжести графика нелинейной функции

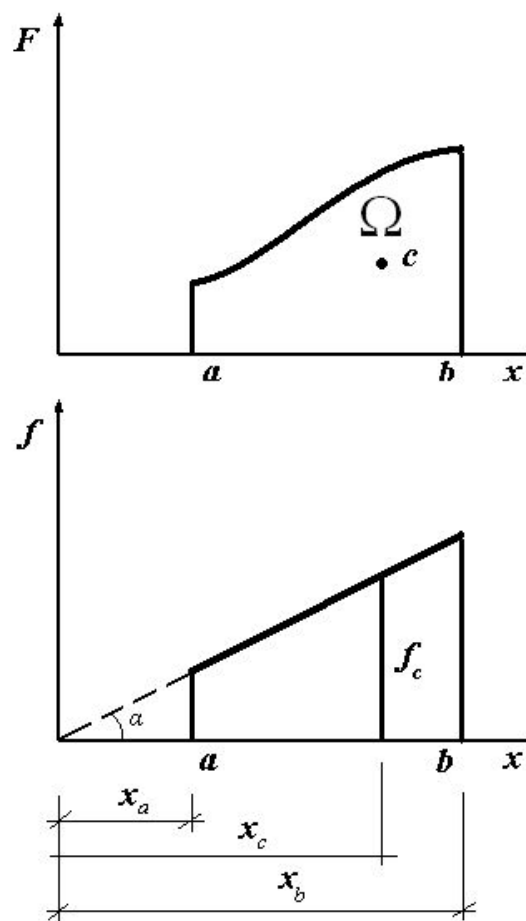


Правило Верещагина (правило перемножения эпюр)

Определённый интеграл от произведения двух функций, одна из которых линейная, вторая нелинейная, равняется произведению площади

$$\int_{x_a}^{x_b} f F dx = f_c \Omega$$

графика нелинейной функции на ординату графика линейной функции, взятую под центром тяжести графика нелинейной функции

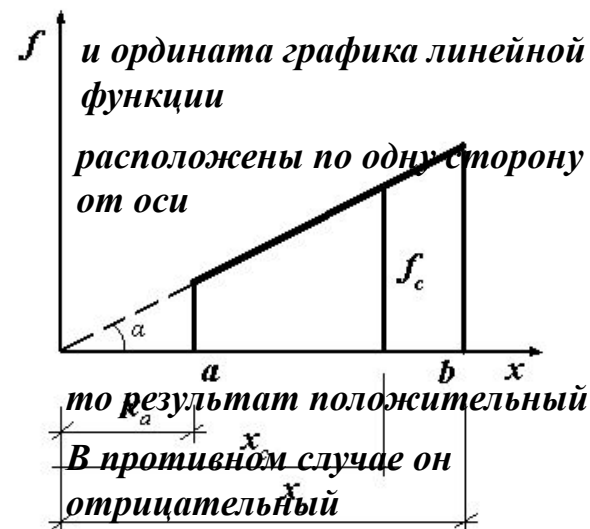
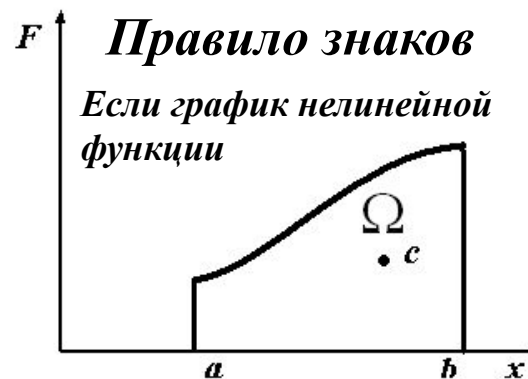


Правило Верещагина (правило перемножения эпюр)

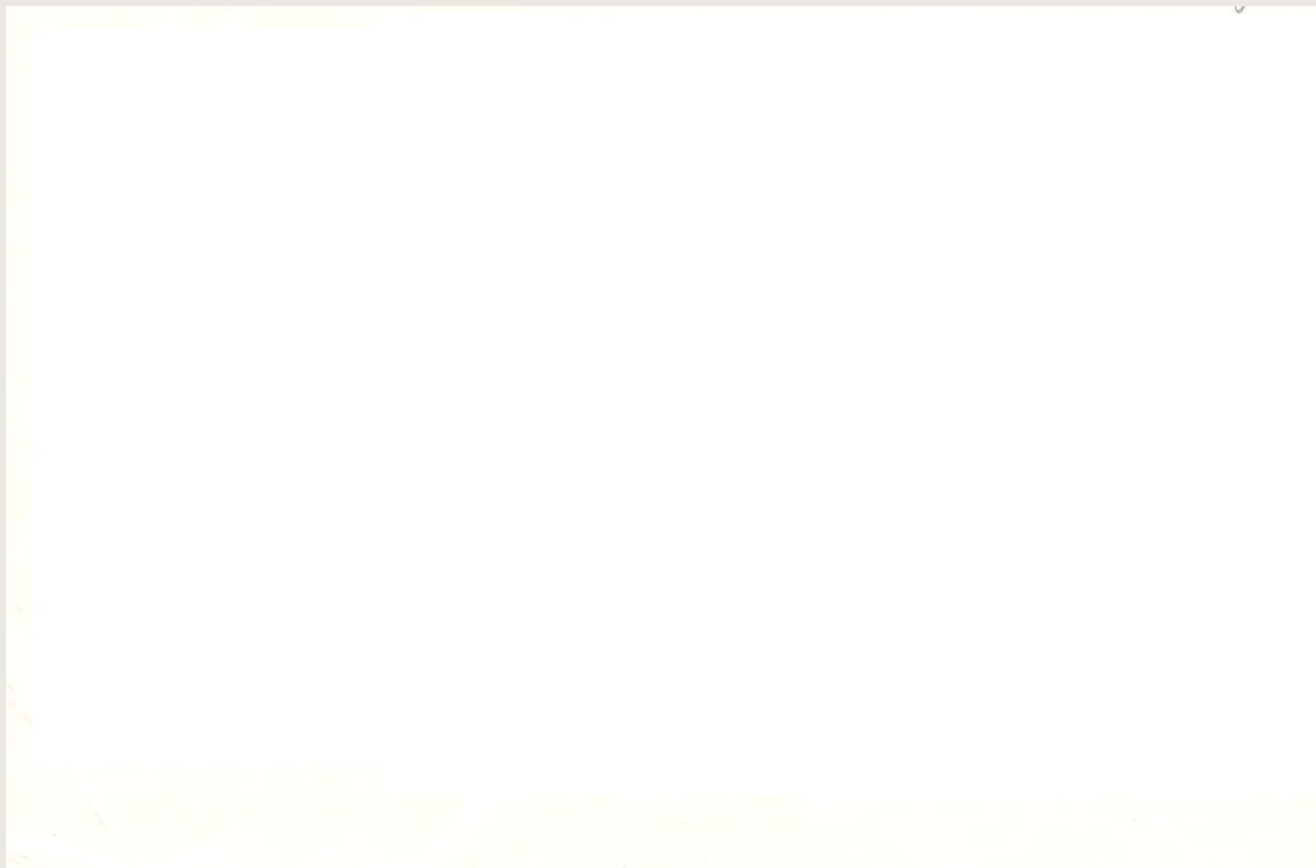
Определённый интеграл от произведения двух функций, одна из которых линейная, вторая нелинейная, равняется произведению площади

$$\int_{x_a}^{x_b} f F dx = f_c \Omega$$

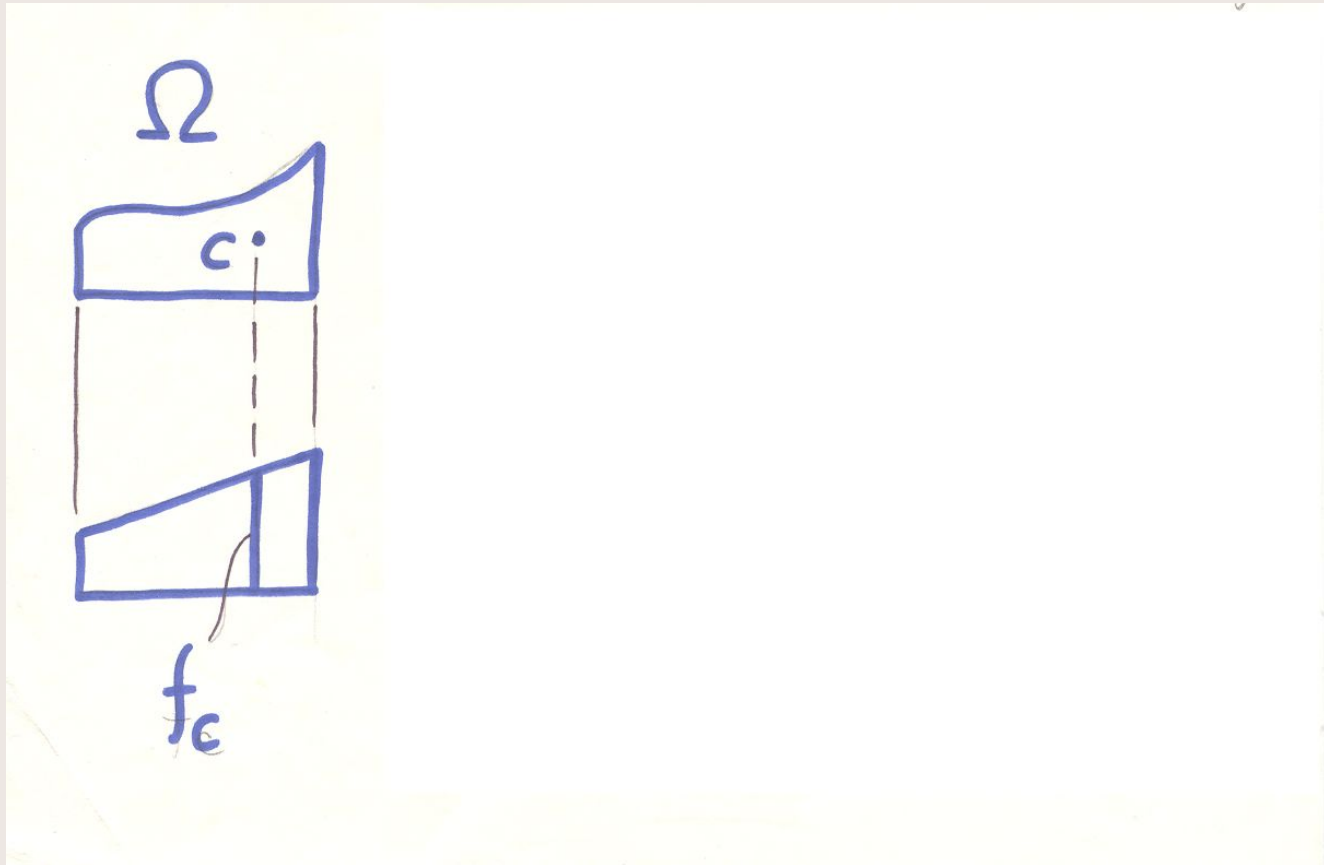
графика нелинейной функции на ординату графика линейной функции, взятую под центром тяжести графика нелинейной функции



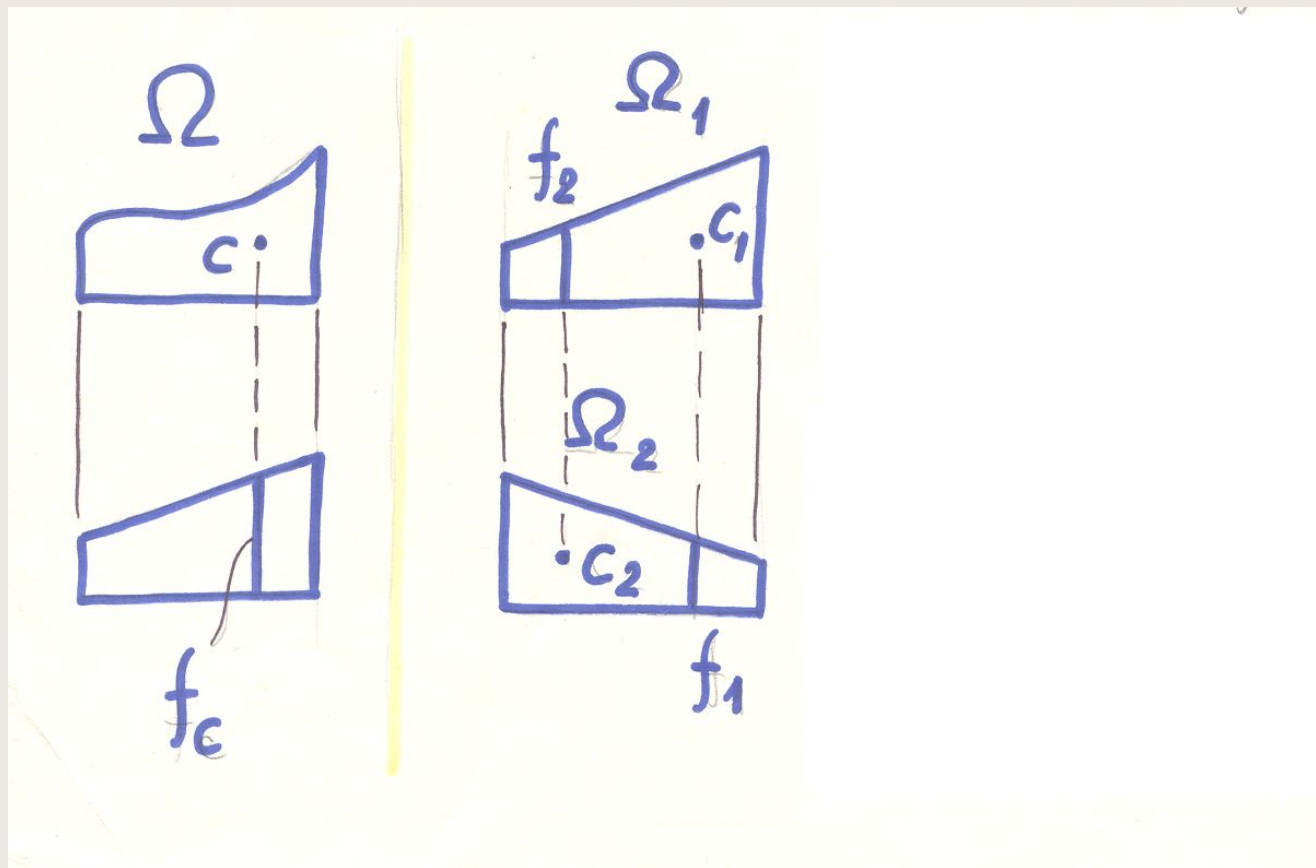
Границы применения правила Верещагина



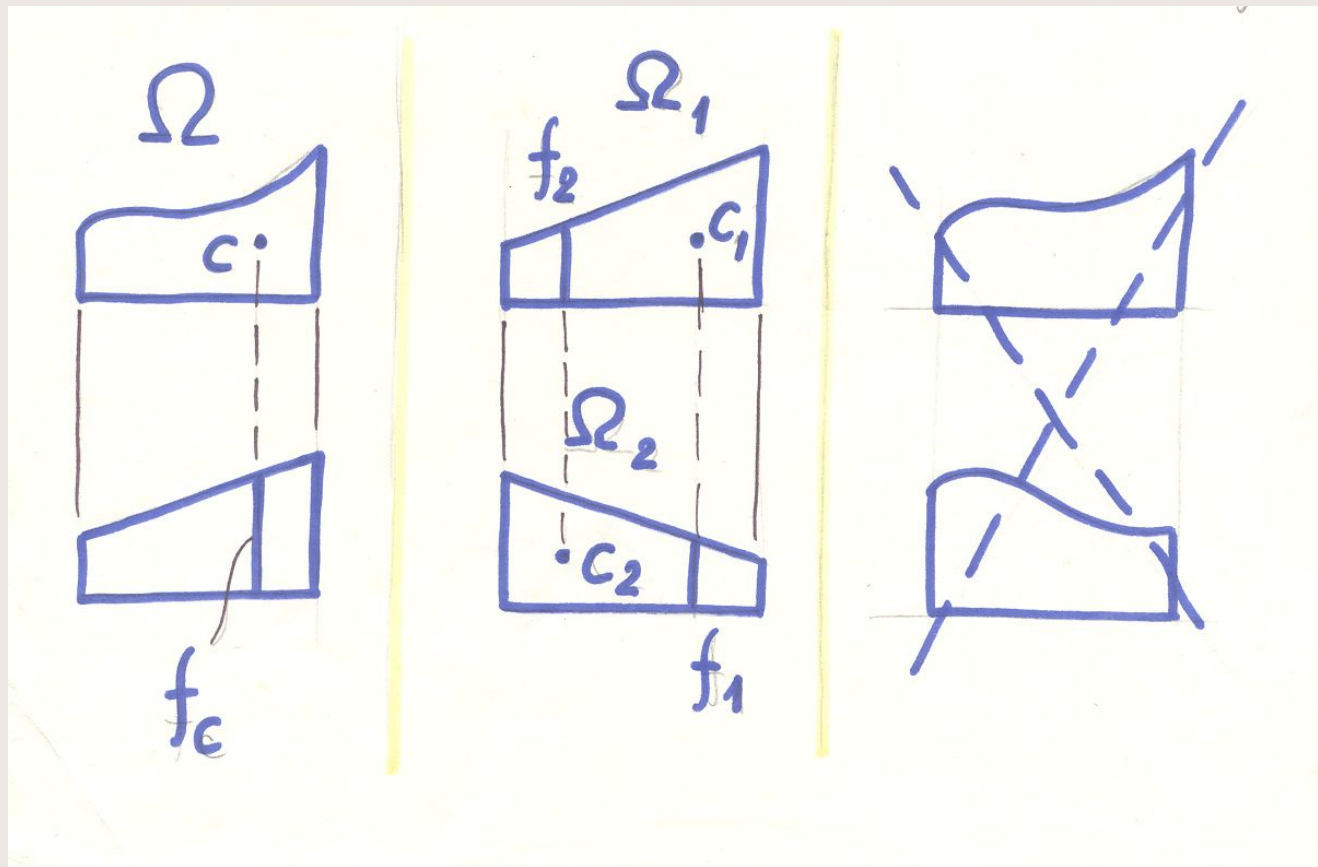
Границы применения правила Верещагина



Границы применения правила Верещагина



Границы применения правила Верещагина



Какие есть вопросы?



Совет от Конфуция

**Вчерашний день
учитель
сегодняшнего.**



551 до н. э. — 479 до н. э.



Лекция завершена
Всем спасибо