ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Напряженно-деформированное состояние в точке

Напряжения являются результатом взаимодействия частиц тела при его нагружении.

Внешние силы стремятся изменить взаимное расположение частиц,

а возникающие при этом напряжения препятствуют их смещению.

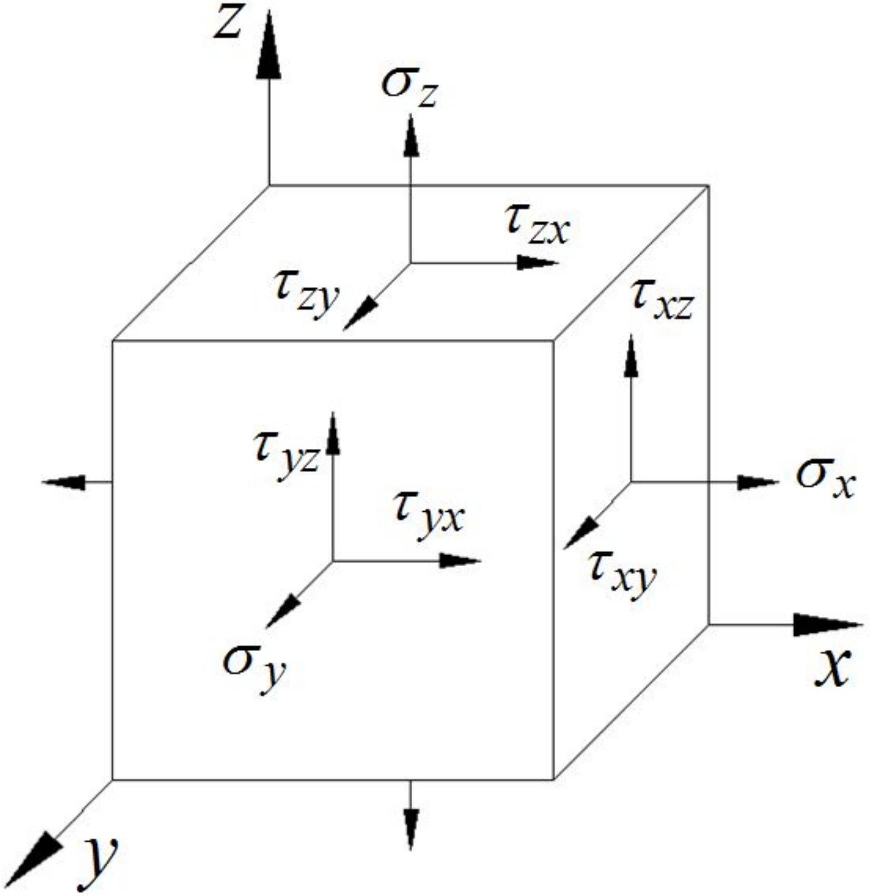
Расположенная в данной точке частица по- разному взаимодействует с каждой из соседних частиц.

Поэтому в общем случае в одной и той же точке напряжения различны по различным направлениям

Напряженное состояние в точке тела задано,

если известны напряжения

на любых трех проходящих через нее взаимно перпендикулярных площадках



Главные напряжения:

нормальные напряжения,
которые действуют по граням элементарного параллелепипеда, вырезанного в окрестностях исследуемой точки,
при условии, что
касательные напряжения
на этих гранях
отсутствуют

Главные напряжения обозначают

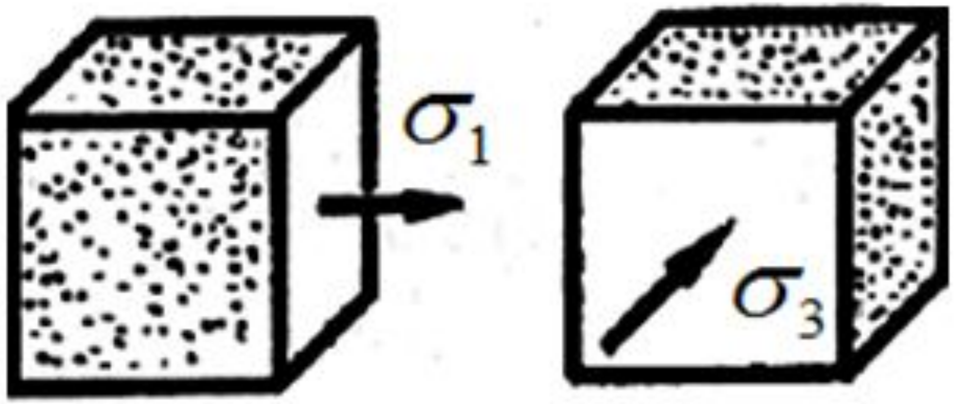
$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3.$$

При этом

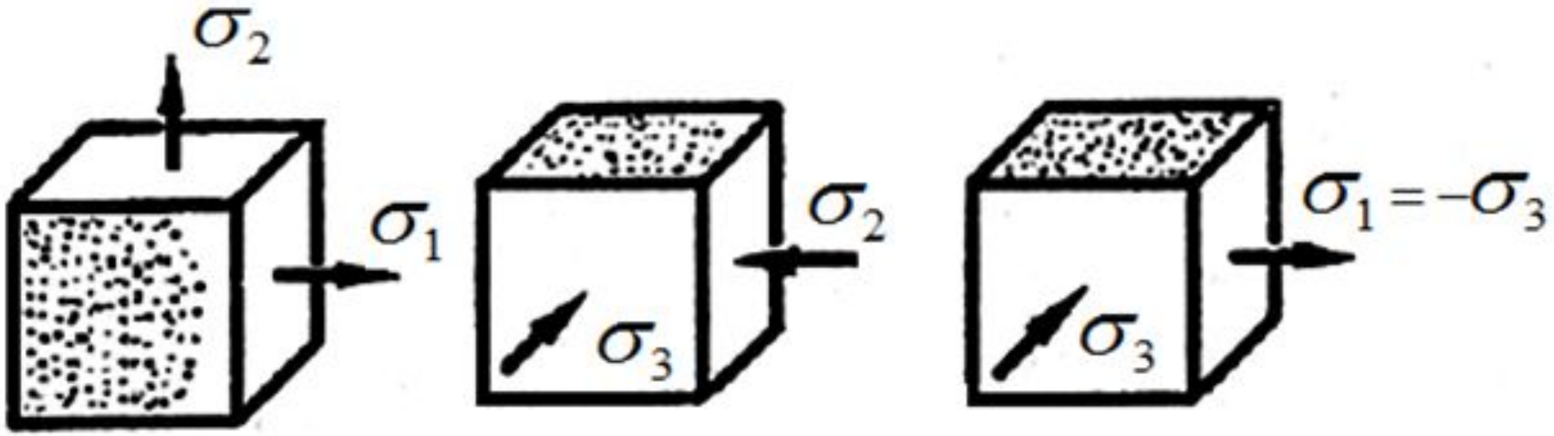
$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Классификация видов напряженного состояния

Одноосное (линейное)-
лишь одно из главных напряжений отлично от нуля

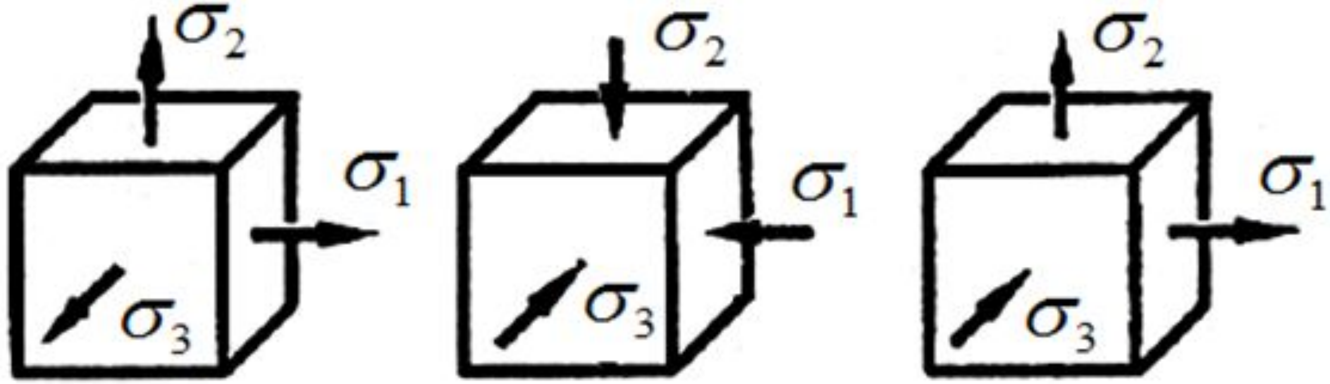


Плоское (***двухосное)*** –
одно из главных напряжений
равно нулю

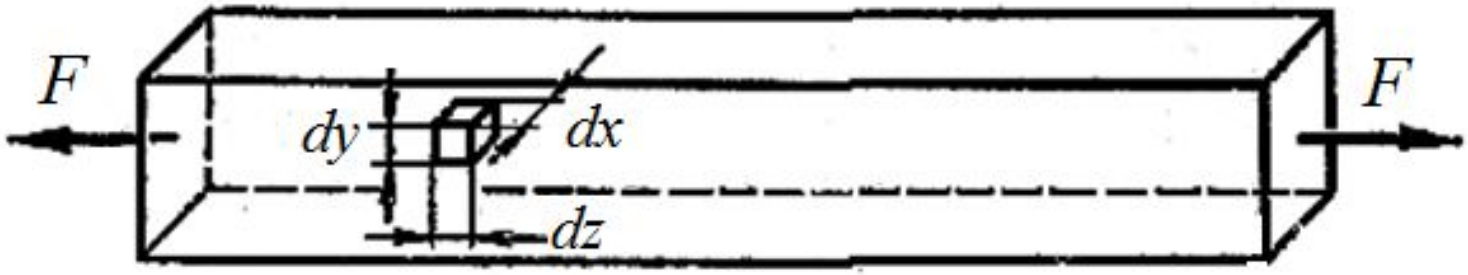


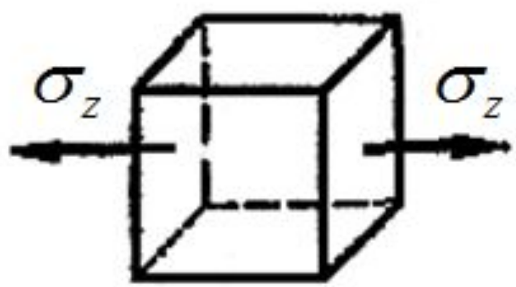
Объемное (трехосное)-

все три главных напряжения отличны от нуля

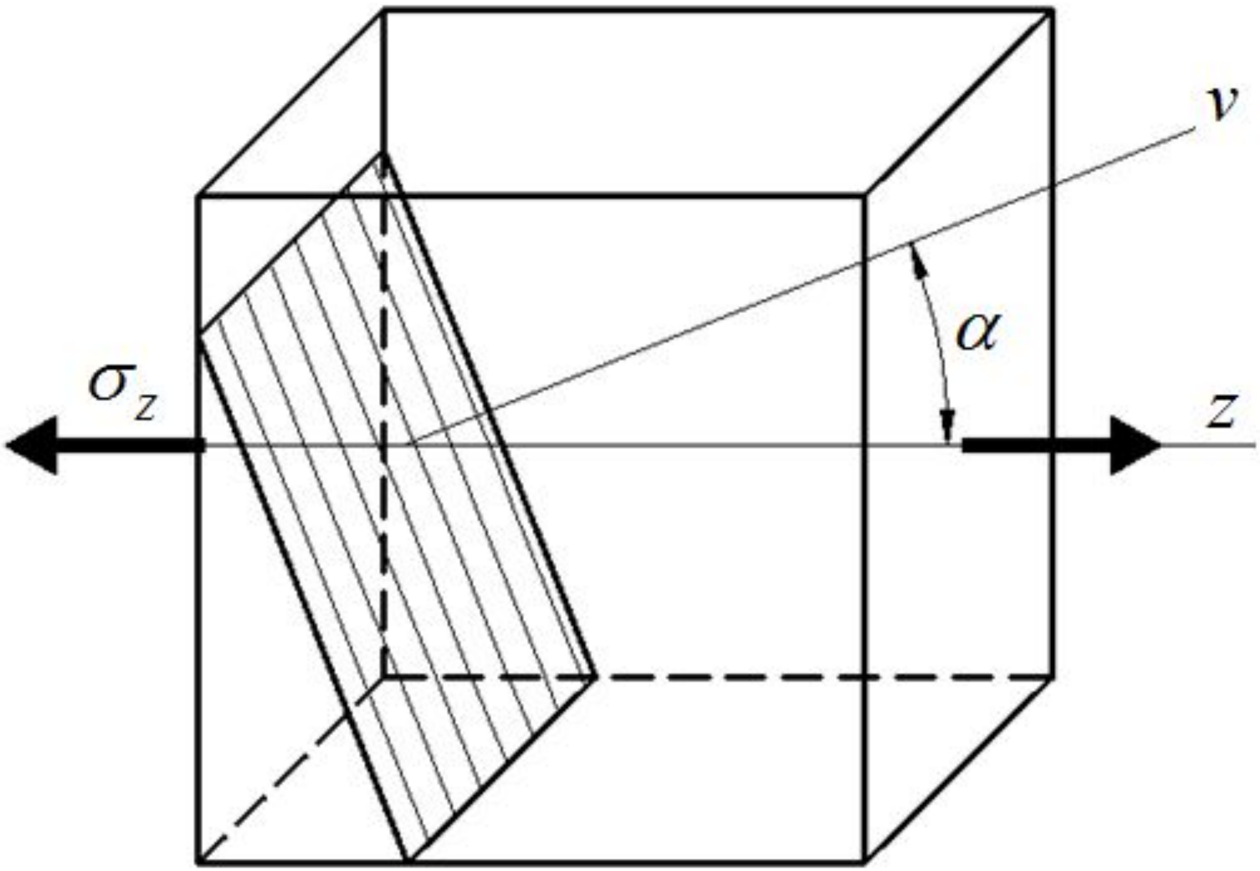


Напряженное состояние при растяжении (сжатии)

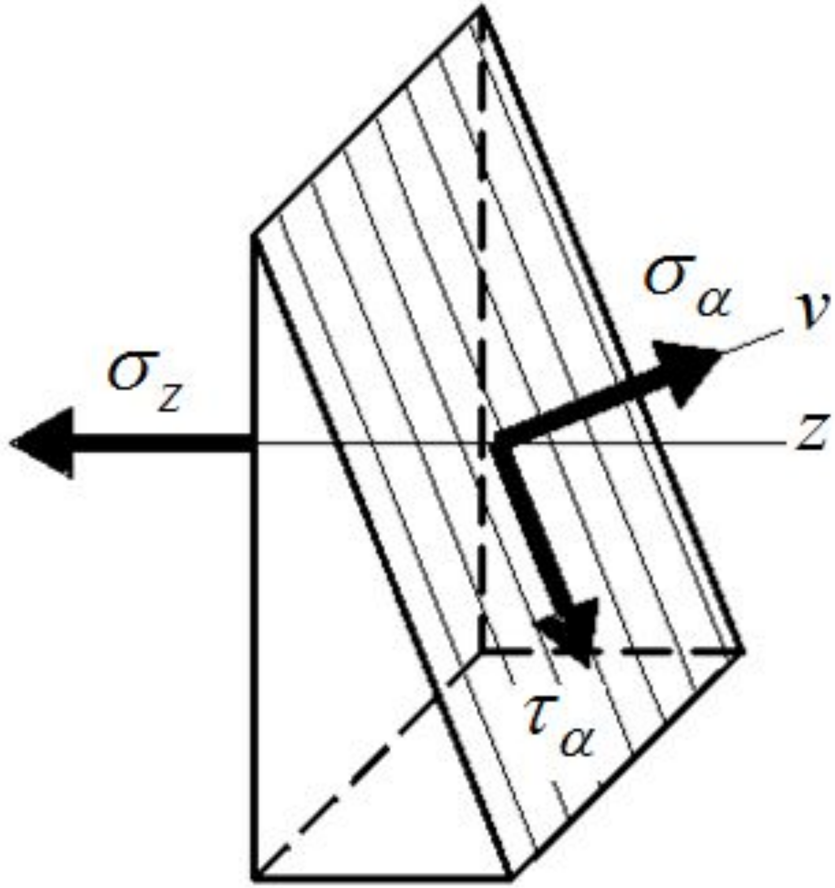




$$\sigma_z = F / A$$



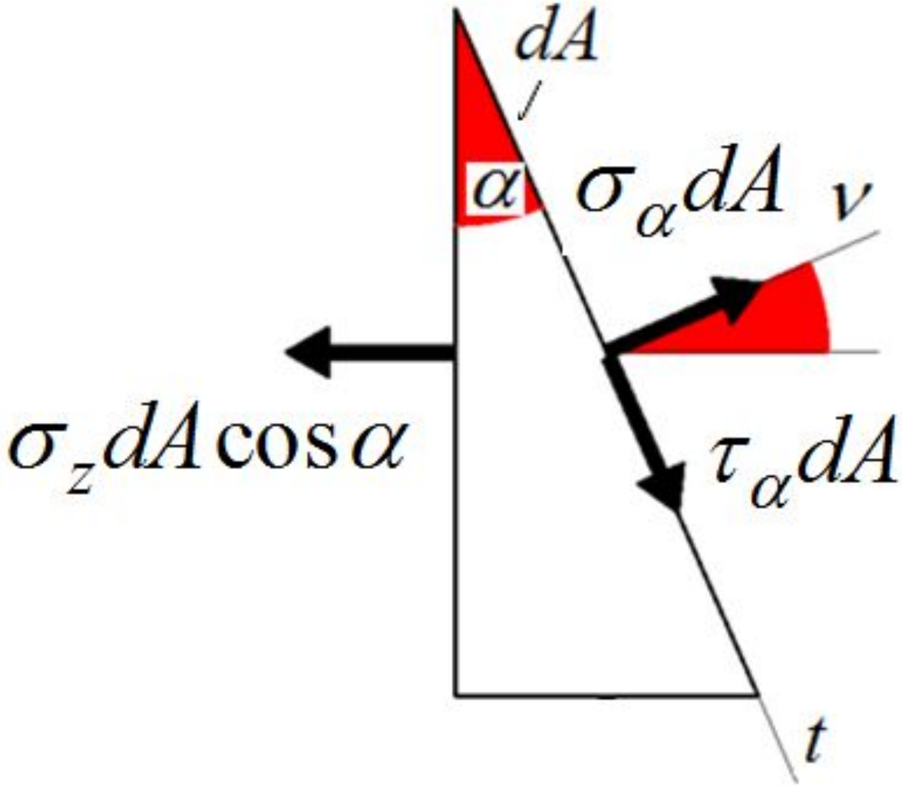
ν
α
σ_z
z



σ_z
σ_α
v
z
τ_α

Уравнения равновесия составляются ***для сил***,
а не для напряжений,
т. е. каждое из напряжений следует умножить
на площадь грани,

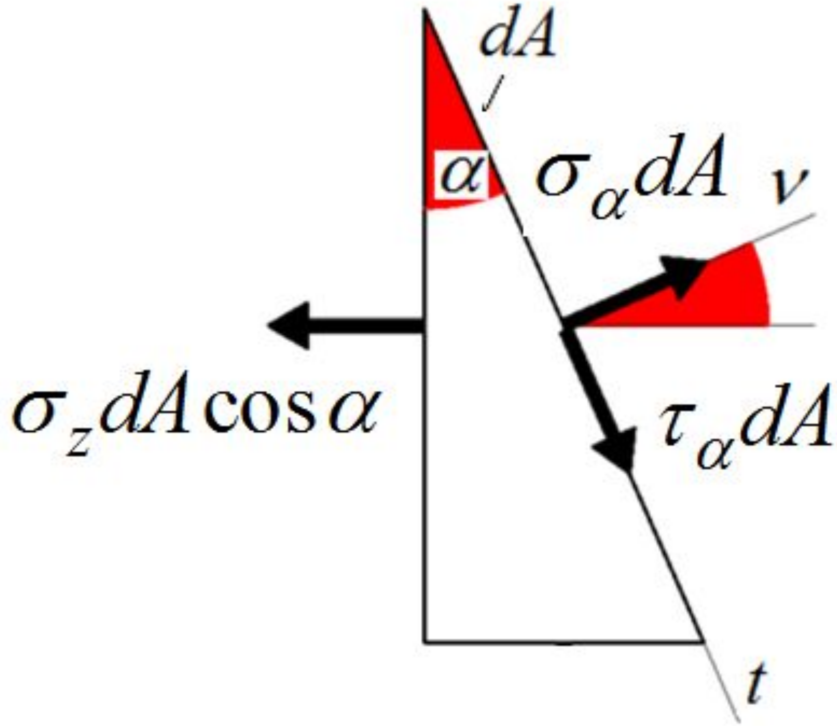
на которой оно возникает



$$\sum P_{i\nu} = 0;$$

$$-\sigma_z(dA\cdot\cos\alpha)\cos\alpha + \sigma_\alpha\cdot dA = 0;$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_z\cos^2\alpha; \quad (a)$$



$$\sum P_{it} = 0;$$

$$-\sigma_z \cdot dA \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \tau_\alpha \cdot dA = 0;$$

$$\tau_\alpha = \sigma_z \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha \;\; \textit{или} \;\; \tau_\alpha = \frac{1}{2}\sigma_z \cdot \sin 2\alpha \quad (b)$$

Некоторые выводы из полученных результатов

Наибольшее нормальное напряжение возникает в поперечном сечении бруса:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\alpha = 0^o} = \sigma_z = F / A$$

Наибольшее касательное напряжение возникает на площадке,

наклоненной под углом 45° к оси бруса,

и равно половине нормального напряжения, возникающего в соответствующей точке поперечного сечения:

$$\tau_{\max} = \tau_{\alpha = 45^o} = \sigma_z / 2$$

Из формулы $$\tau_\alpha = \frac{1}{2}\sigma_z \cdot \sin 2\alpha$$

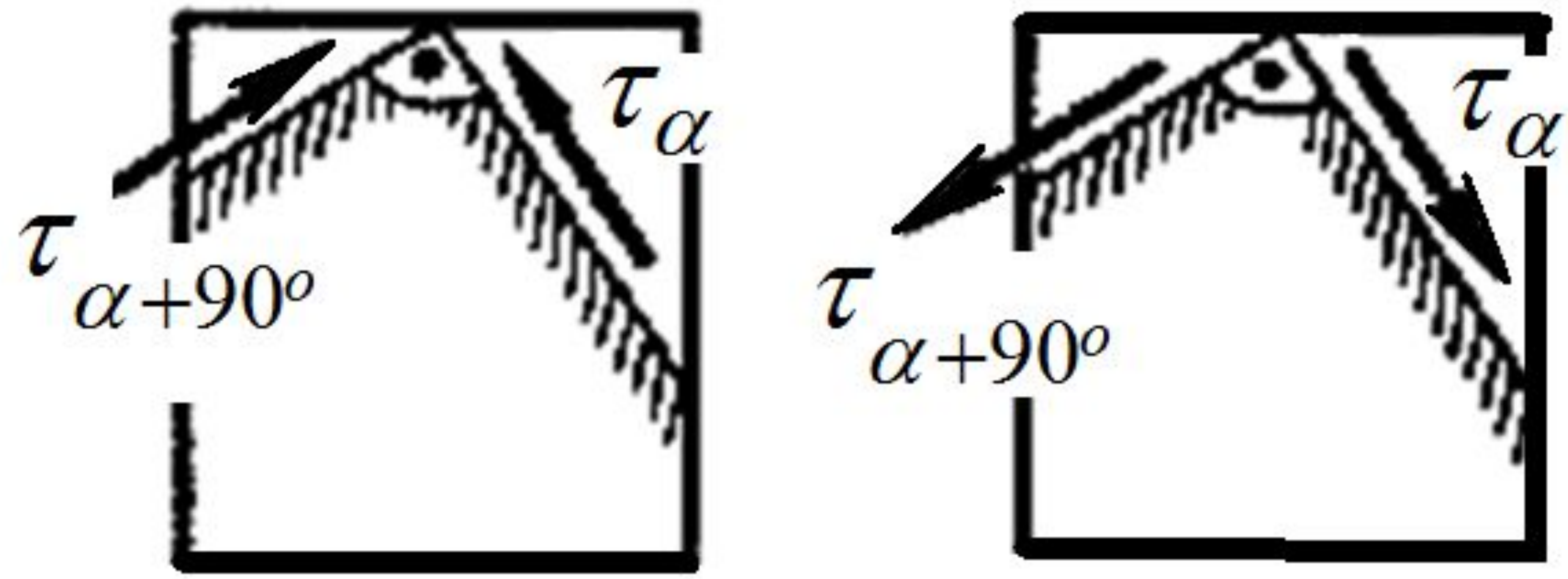
вытекает равенство (по абсолютному значению) касательных напряжений, возникающих на взаимно перпендикулярных площадках:

$$\tau_{\alpha+90} = \frac{1}{2}\sigma_z \cdot \sin 2(\alpha + 90^o) =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_z \cdot \sin(2\alpha + 180^o) =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_z \cdot \sin 2\alpha =$$

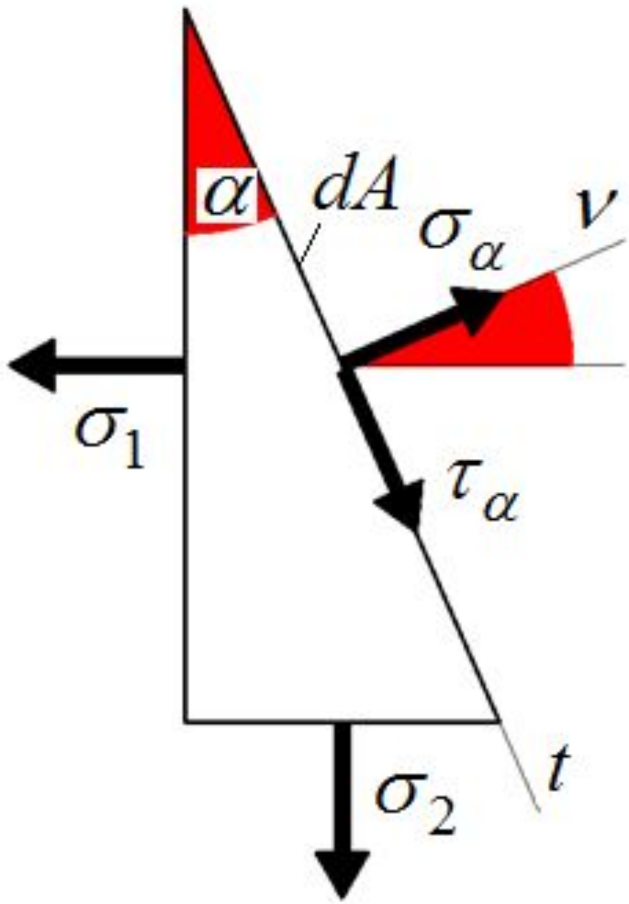
$$= \tau_\alpha$$



Это равенство носит название

закона парности касательных напряжений

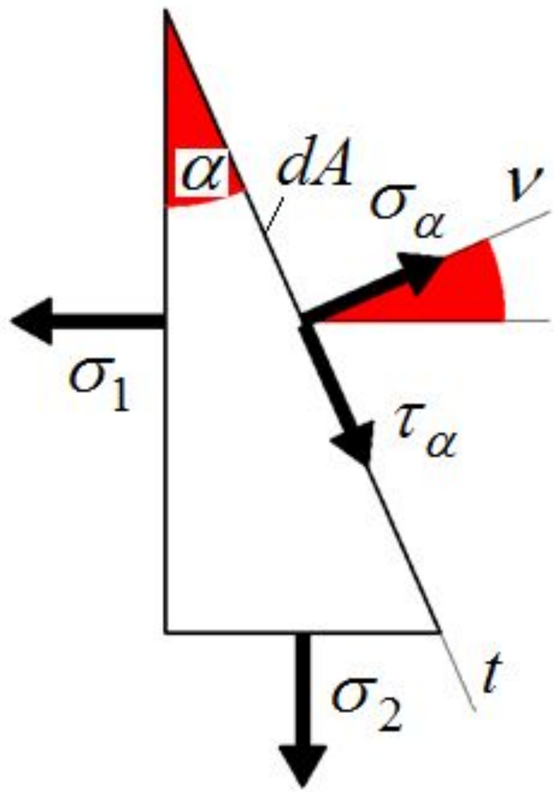
Исследование напряженного состояния при известных главных напряжениях



$$\sum P_{i\nu} = 0;$$

$$\sigma_\alpha \cdot dA - (\sigma_1 \cdot dA \cdot \cos\alpha)\cos\alpha - $$
$$-(\sigma_2 \cdot dA \cdot \sin\alpha)\sin\alpha = 0;$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha$$



$$\sum P_{it} = 0;$$

$$\tau_\alpha \cdot dA - (\sigma_1 \cdot dA \cdot \cos\alpha)\sin\alpha -$$

$$-(\sigma_2 \cdot dA \cdot \sin\alpha)\cos\alpha = 0;$$

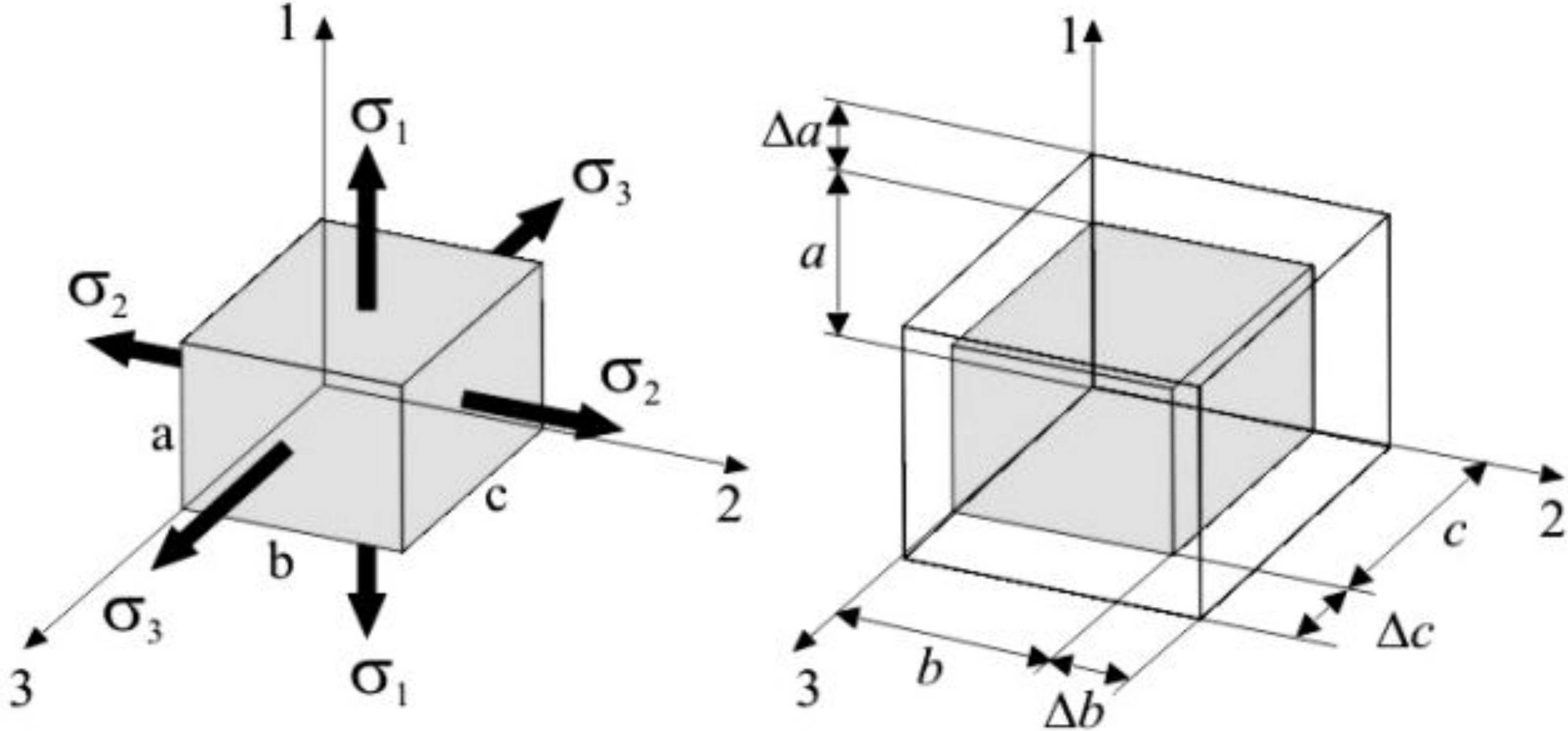
$$\tau_\alpha = (\sigma_1 - \sigma_2)\sin\alpha \cdot \cos\alpha,$$

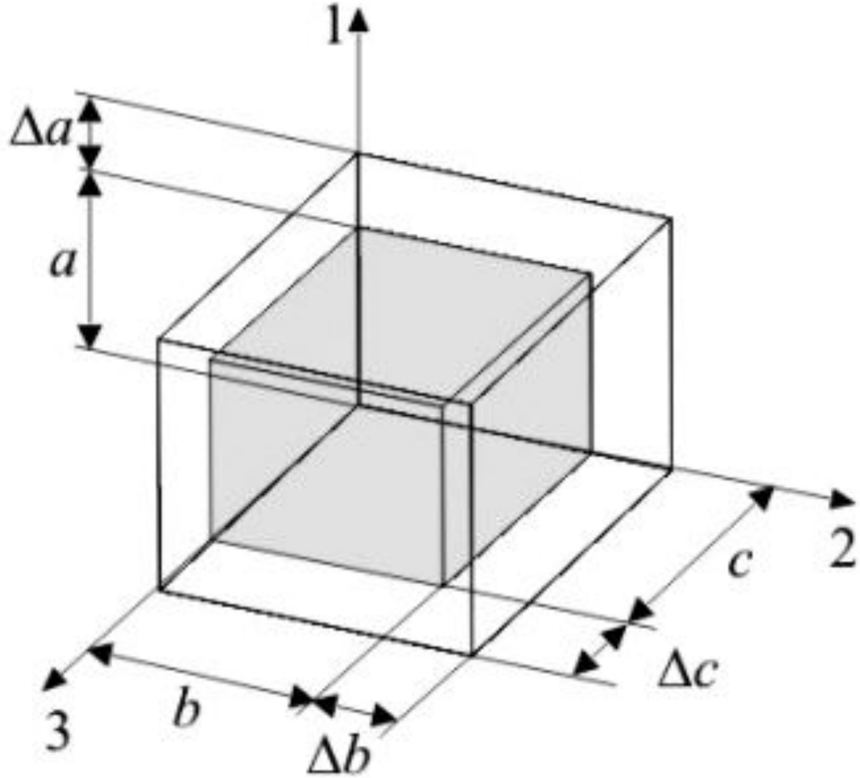
или

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Обобщенный закон Гука





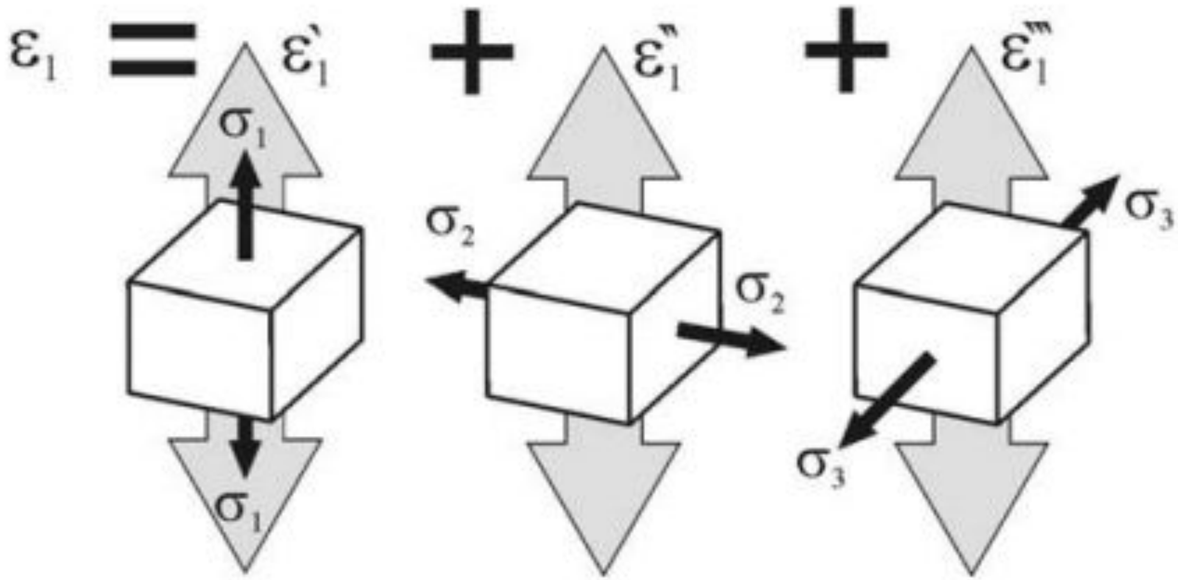
Величины

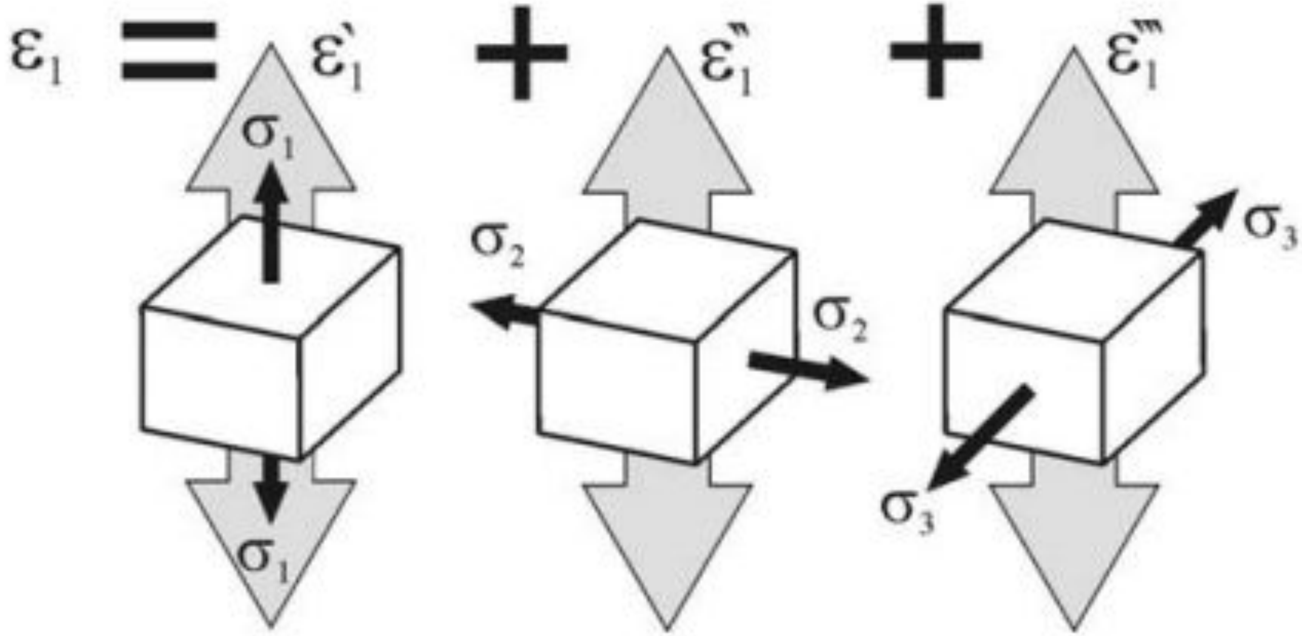
$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}; \;\; \varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b}; \;\; \varepsilon_3 = \frac{\Delta c}{c}$$

называются **главными деформациями** и представляют собой относительные удлинения в *главных направлениях*

Применяя принцип суперпозиции

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{'} + \varepsilon_1^{''} + \varepsilon_1^{'''}$$





$$\varepsilon_1^{'}=\frac{\sigma_1}{E};\;\; \varepsilon_1^{''}=-\mu\frac{\sigma_2}{E};\;\; \varepsilon_1^{'''}=-\mu\frac{\sigma_3}{E}$$

Сложив эти величины, будем иметь

$$\varepsilon_1=\frac{\sigma_1}{E}-\mu\frac{\sigma_2}{E}-\mu\frac{\sigma_3}{E}=\frac{1}{E}\left[\sigma_1-\mu\left(\sigma_2+\sigma_3\right)\right]$$

Обобщенный закон Гука

для изотропного тела:

зависимость между линейными деформациями и главными напряжениями

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right];$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\right];$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right]$$

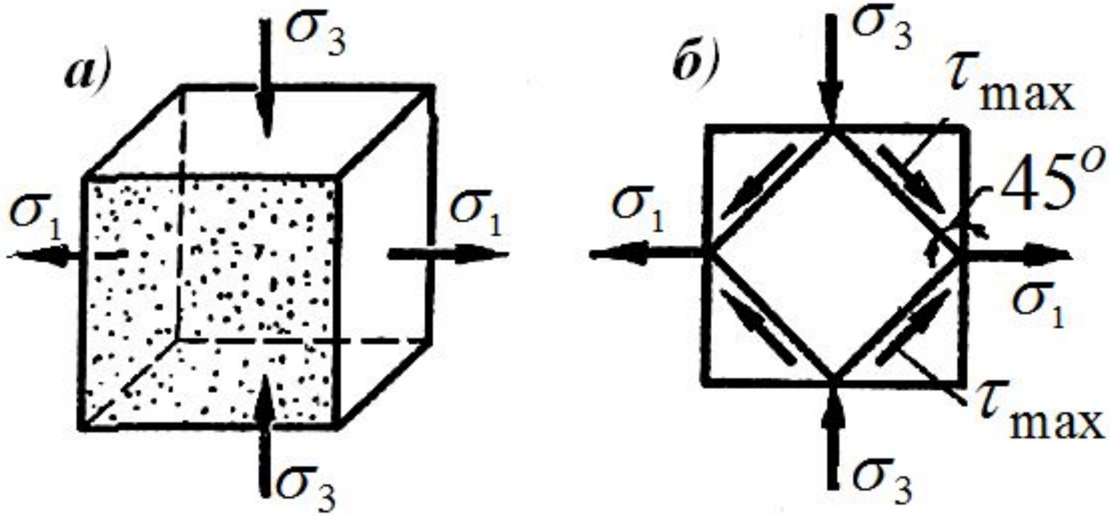
Выражения справедливы и для относительных деформаций по любым трем взаимно перпендикулярным направлениям

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

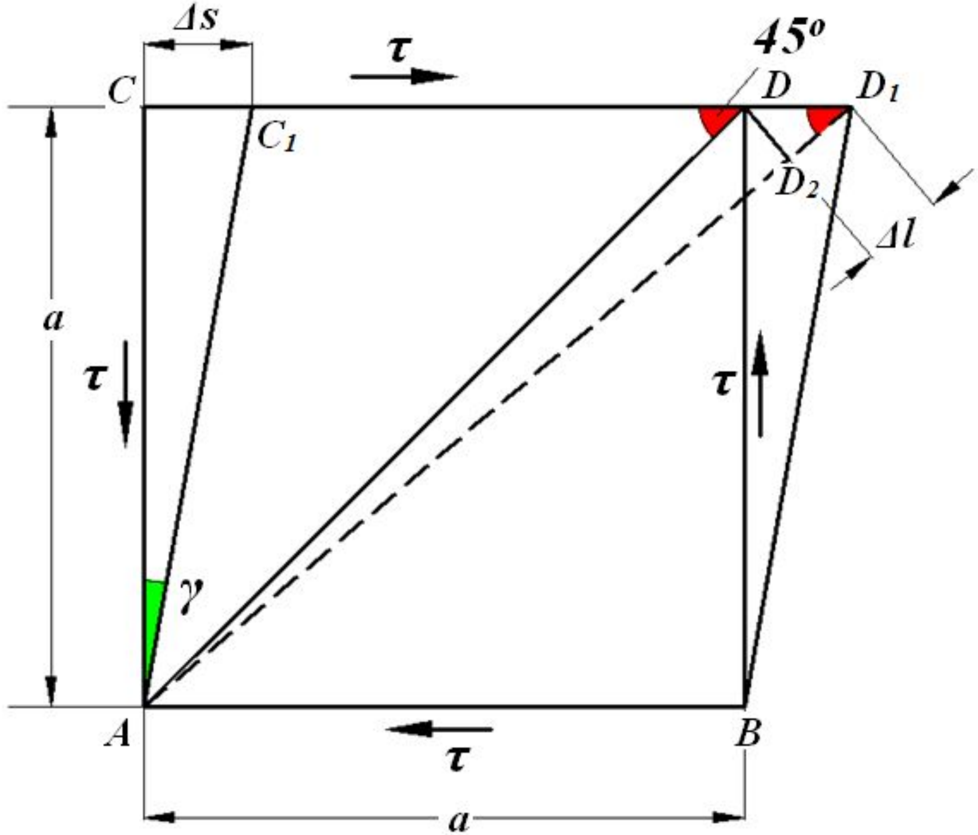
Чистый сдвиг



$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_3 \sin^2\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha - \sigma_1 \sin^2\alpha = \sigma_1 \cos 2\alpha;$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - (-\sigma_1)}{2} \sin 2\alpha = \sigma_1 \sin 2\alpha$$

Деформации при чистом сдвиге



$$\gamma = tg\gamma = \frac{\Delta s}{a};\ \ \Delta l = \Delta s \cos 45^o;\ \ \varepsilon = \frac{\Delta l}{l};\ \ l = a / sin 45^o;$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta s}{a}\cos 45^o \cdot \sin 45^o = \gamma / 2 = \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_3}{E} = \frac{\tau}{E}(1+\mu);$$

$$\frac{\tau}{E}(1+\mu) = \gamma / 2;\ \ \tau = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma = G\gamma;\ \ G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

Модуль сдвига *G*
(модуль упругости второго рода)

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

E – модуль Юнга
(модуль упругости первого рода)

μ - коэффициент Пуассона

Основные понятия о гипотезах прочности

Предельное напряженное состояние – мера прочностных свойств материала, при котором происходит переход от одного механического состояния к другому

Предельное напряжение определяют при механических испытаниях данного материала на одноосное растяжение и сжатие

Коэффициент запаса прочности n равен отношению предельного напряжения к рабочему (расчетному)

$$n = \sigma_{пред} / \sigma_{расч}$$

Напряженные состояния, для которых отношения главных напряжений одинаковы, называют ***подобными***

$$\sigma_1^{I} / \sigma_2^{I} / \sigma_3^{I} = \sigma_1^{II} / \sigma_2^{II} / \sigma_3^{II}$$

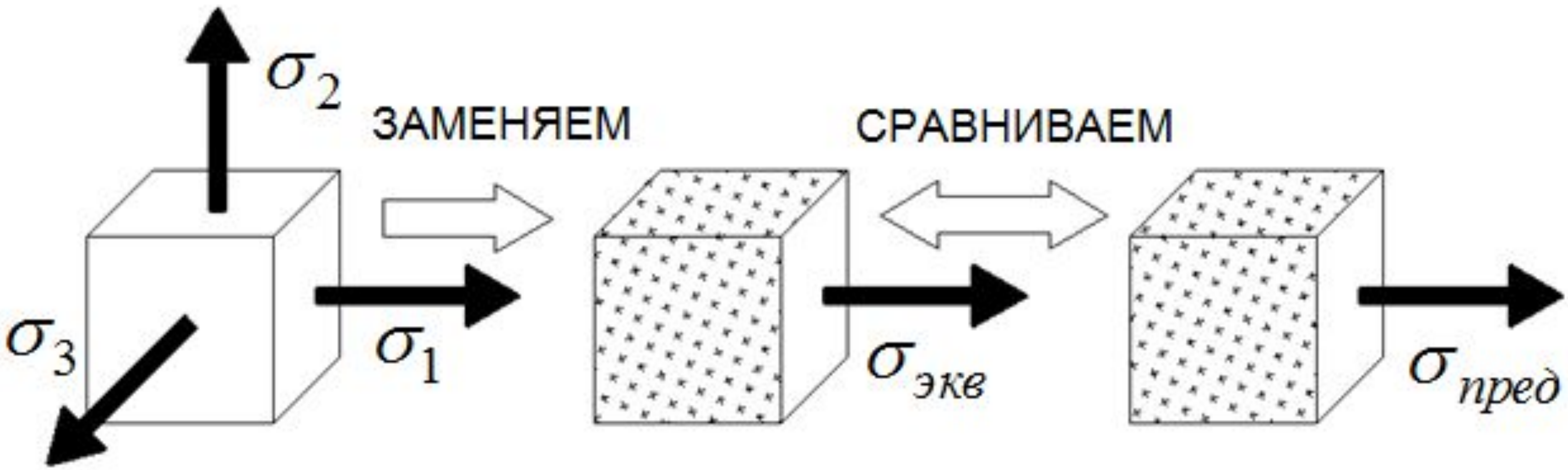
Коэффициент запаса прочности

- величина, показывающая, во сколько раз нужно увеличить возникающие в исследуемой точке главные напряжения для того, чтобы напряженное состояние стало предельным

Равноопасными называются такие напряженные состояния, для которых коэффициенты запаса прочности равны

- Это дает возможность сравнивать все напряженные состояния между собой, заменяя их равноопасным одноосным напряженным состоянием (растяжением)

- **Эквивалентное напряжение** - напряжение, которое следует создать в ***растянутом*** образце, чтобы его напряженное состояние стало равноопасным заданному напряженному состоянию



$$n = \sigma_{пред} / \sigma_{экв}$$

Определение эквивалентных напряжений по различным гипотезам прочности

ПЕРВАЯ ГИПОТЕЗА-

Гипотеза наибольших нормальных напряжений
***(предложена Галилеем)*:**

«Причиной разрушения материала являются наибольшие по абсолютному значению нормальные напряжения»

Условие прочности

$$\sigma_{экв}^{I} = \sigma_1 \leq [\sigma]_p$$

Если наибольшим по значению будет
сжимающее главное напряжение,
условие прочности по первой гипотезе прочности:

$$\sigma^{I}_{экв} = |\sigma_3| \le [\sigma]_{сж}$$

Недостаток первой гипотезы прочности:

не учитываются два других главных напряжения, оказывающих влияние на прочность материала. Первая гипотеза прочности подтверждается экспериментальными данными только для хрупкого материала при растяжении,

когда напряжения $\sigma_2, \ \sigma_3$

значительно меньше σ_1

При всестороннем сжатии цементного кубика,
первая гипотеза прочности приводит к ошибочным результатам,
поскольку кубик выдерживает напряжения,
во много раз превышающие предел прочности при одноосном сжатии.

В настоящее время первая гипотеза прочности не применяется и имеет лишь историческое значение

Гипотеза наибольших линейных деформаций
***(предложена Мариоттом и развита Сен-Венаном)*:**

«Причиной разрушения материала являются наибольшие линейные деформации»

Эквивалентные напряжения вычисляются по формуле

$$\sigma_{экв}^{II} = \sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) \le \left[\sigma\right],$$

где μ – коэффициент Пуассона

Считается, что для пластичных материалов
закон Гука выполняется вплоть до предела текучести,
а для хрупких – до предела прочности,
что является грубым допущением.
Достоинством второй гипотезы прочности является то, что
при вычислении эквивалентного напряжения
она учитывает все три главных напряжения.
С помощью гипотезы наибольших линейных деформаций
можно объяснить разрушение хрупких материалов при простом
сжатии. Однако вторая гипотеза прочности недостаточно
подтверждается опытами и не применяется

Гипотеза наибольших касательных напряжений (предложена Треска)

«Два напряженных состояния равноопасны, если максимальные касательные напряжения для них одинаковы»

$$\tau_{\max} = \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)/2; \ \ \tau_{экв} = \sigma_{экв}/2;$$

$$\tau_{\max} = \tau_{экв};$$

$$\sigma_{экв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \le \left[\sigma\right]$$

Недостаток гипотезы:
не учитывается второе главное напряжение.
Однако, опыты показывают, что
для *пластичных материалов* гипотеза
наибольших касательных напряжений дает
удовлетворительные результаты.
Ошибка от пренебрежения влиянием
второго главного напряжения
не превышает 10 – 15 %

Гипотеза удельной потенциальной энергии изменения формы (предложена фон Мизесом)

«Два напряженных состояния равноопасны, если удельная потенциальная энергия изменения формы для них одинакова»

$$\sigma_{экв}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$$

ГИПОТЕЗА ПРОЧНОСТИ МОРА:

Два напряженных состояния равноопасны, если для соответствующих главных напряжений соблюдается соотношение:

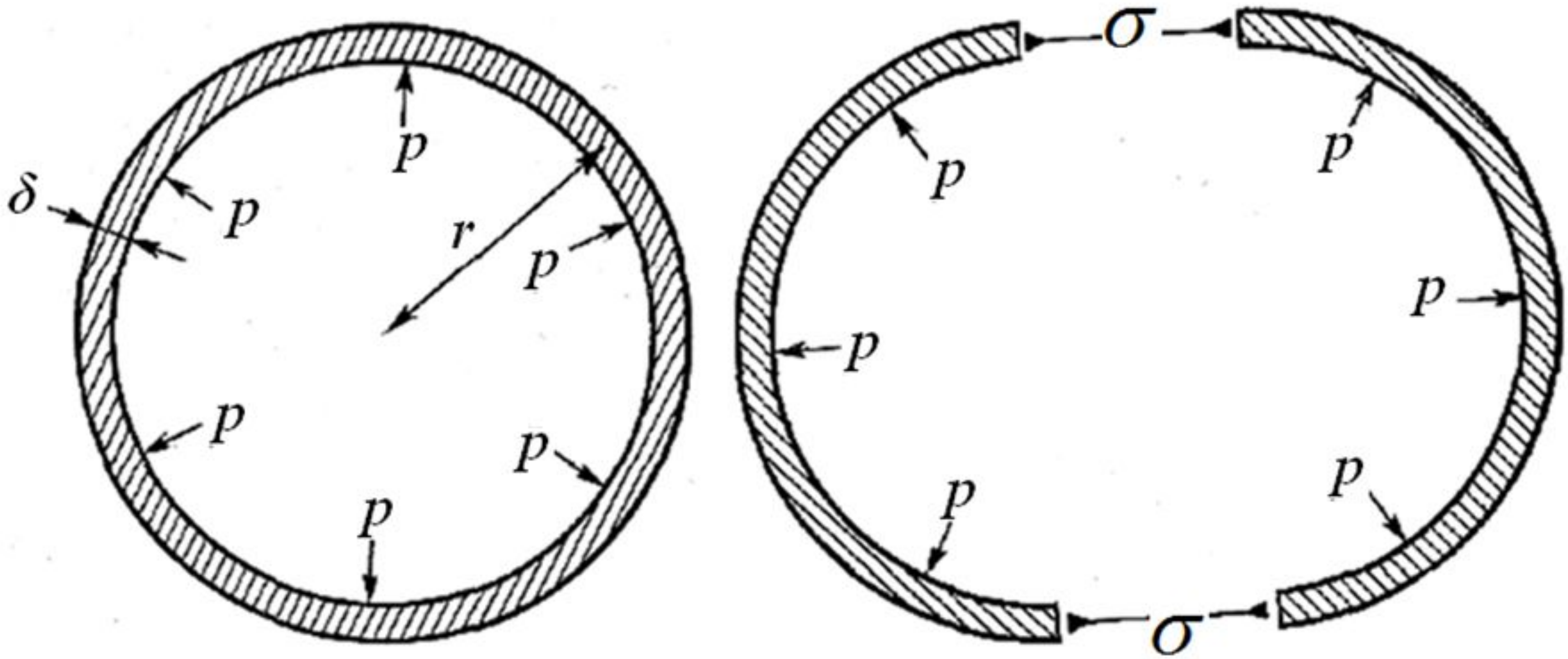
$$\sigma_1^{'} - \nu\sigma_3^{'} = \sigma_1^{''} - \nu\sigma_3^{''} \leq [\sigma].$$

$$\nu = \frac{\sigma_{пч(раст)}}{\sigma_{пч(сж)}} \quad \textit{для пластичных материалов.}$$

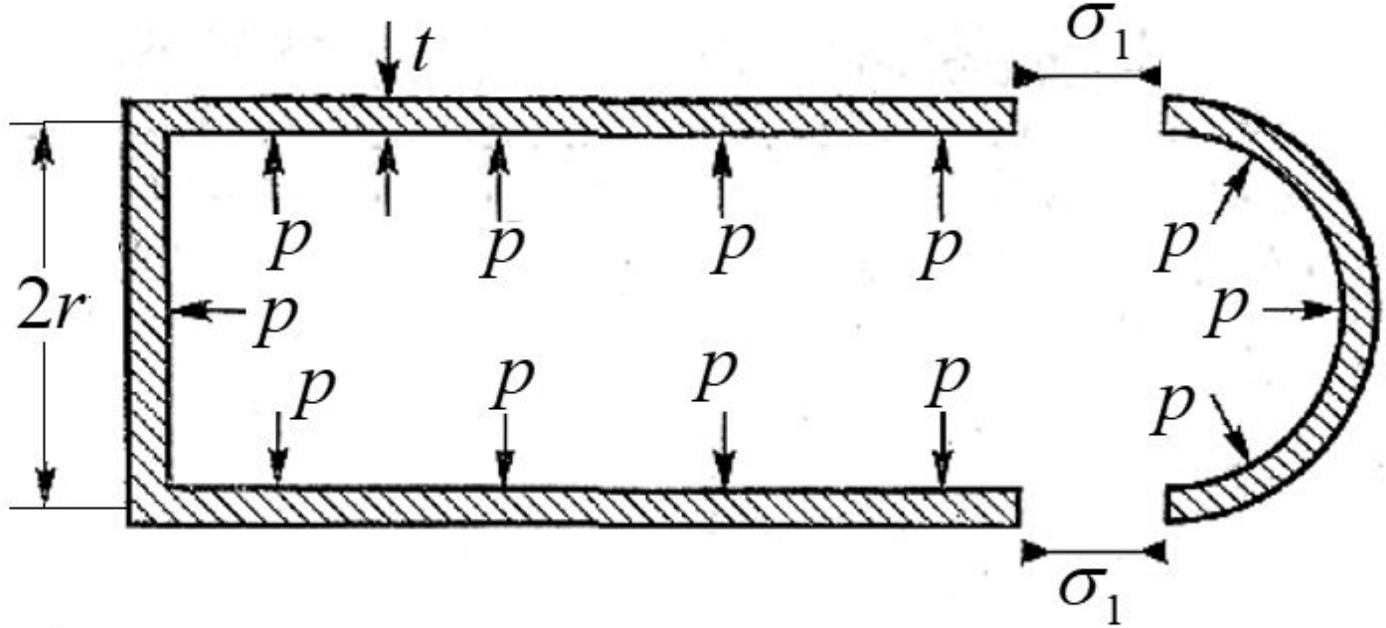
$$\textit{Для хрупких } \nu = 1.$$

Гипотеза прочности Мора рекомендуется
для хрупких материалов.
Для пластичных материалов
гипотеза тождественна
третьей гипотезе прочности

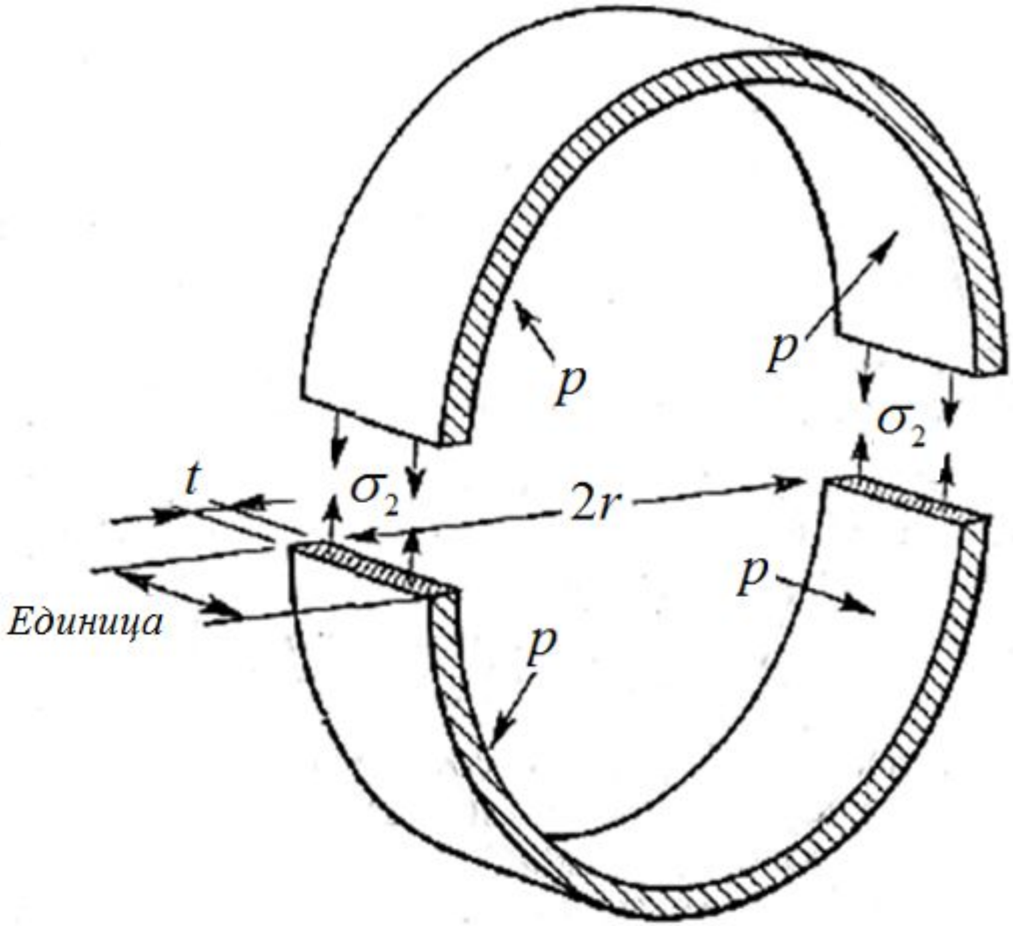
Сферические сосуды высокого давления



Цилиндрические сосуды высокого давления



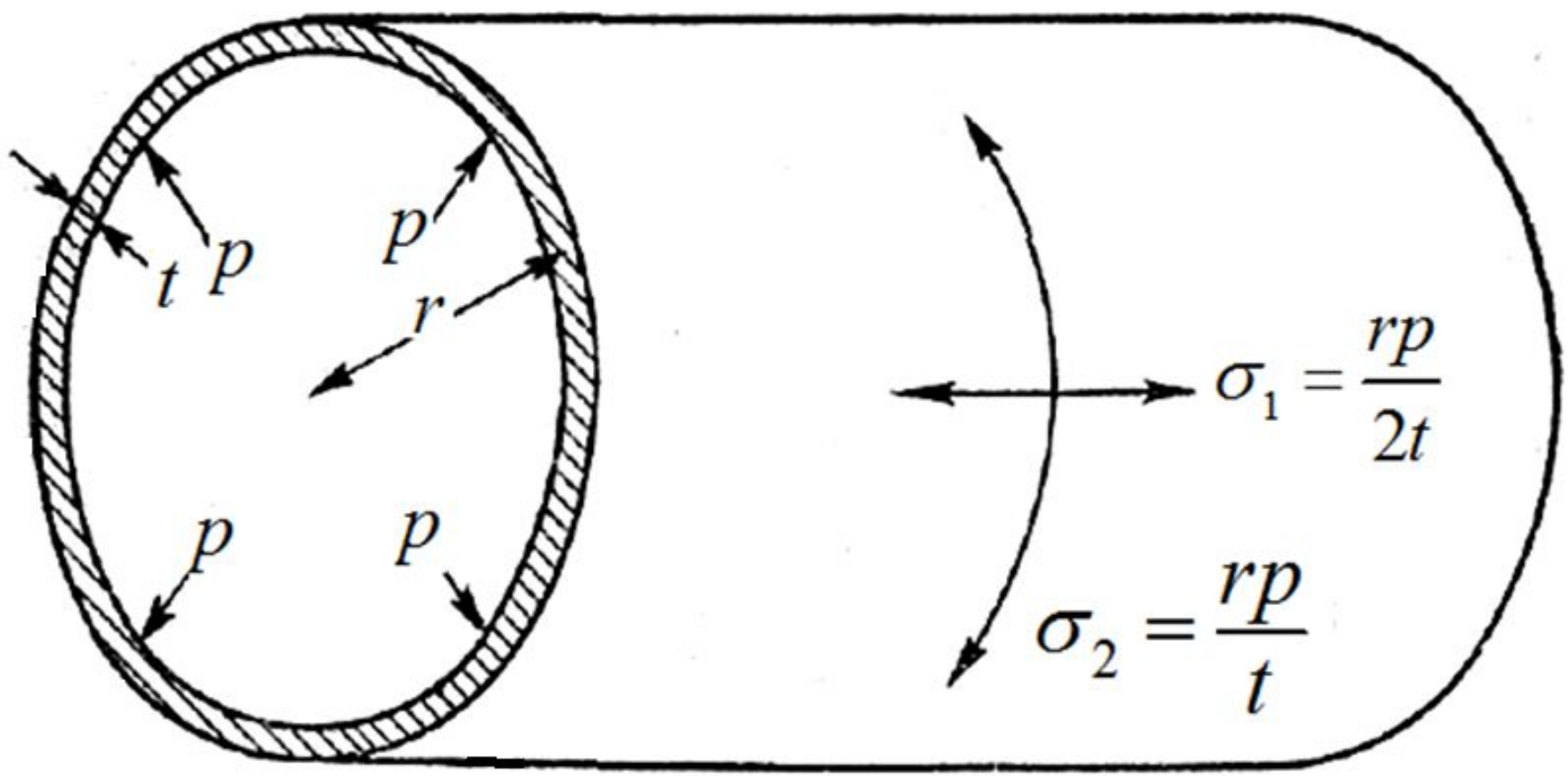
$$\sigma_1 = \frac{\pi r^2 p}{2\pi r t} = \frac{rp}{2t}$$



$$\sigma_2 = \frac{2r \cdot 1 \cdot p}{2t \cdot 1} =$$

$$= \frac{rp}{t}$$

Напряжение в стенках цилиндрического сосуда высокого давления равняется удвоенному осевому напряжению



Одно из следствий этого мог наблюдать каждый, кто хоть однажды отваривал сосиски

Когда содержимое сосиски чрезмерно разбухает

и шкурка лопается,

разрыв всегда бывает продольным