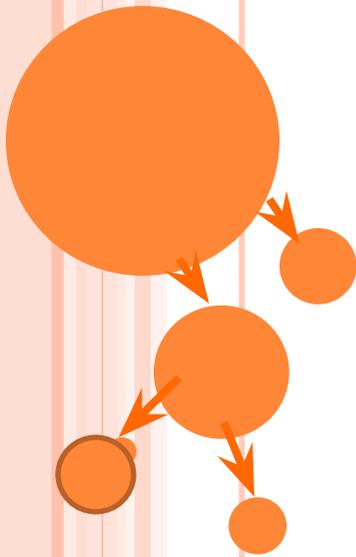


**Поиск решения задачи
коммивояжера на
взвешенных
ориентированных
сильносвязных графах
методами типа ветвей и
границ**



СОДЕРЖАНИЕ

- 1. Постановки задач коммивояжера.
- 2. Решение замкнутой задачи коммивояжера методами типа ветвей и границ.
- 3. Решение разомкнутой задачи коммивояжера методами типа ветвей и границ.



Часть 1

Постановки задач коммивояжера

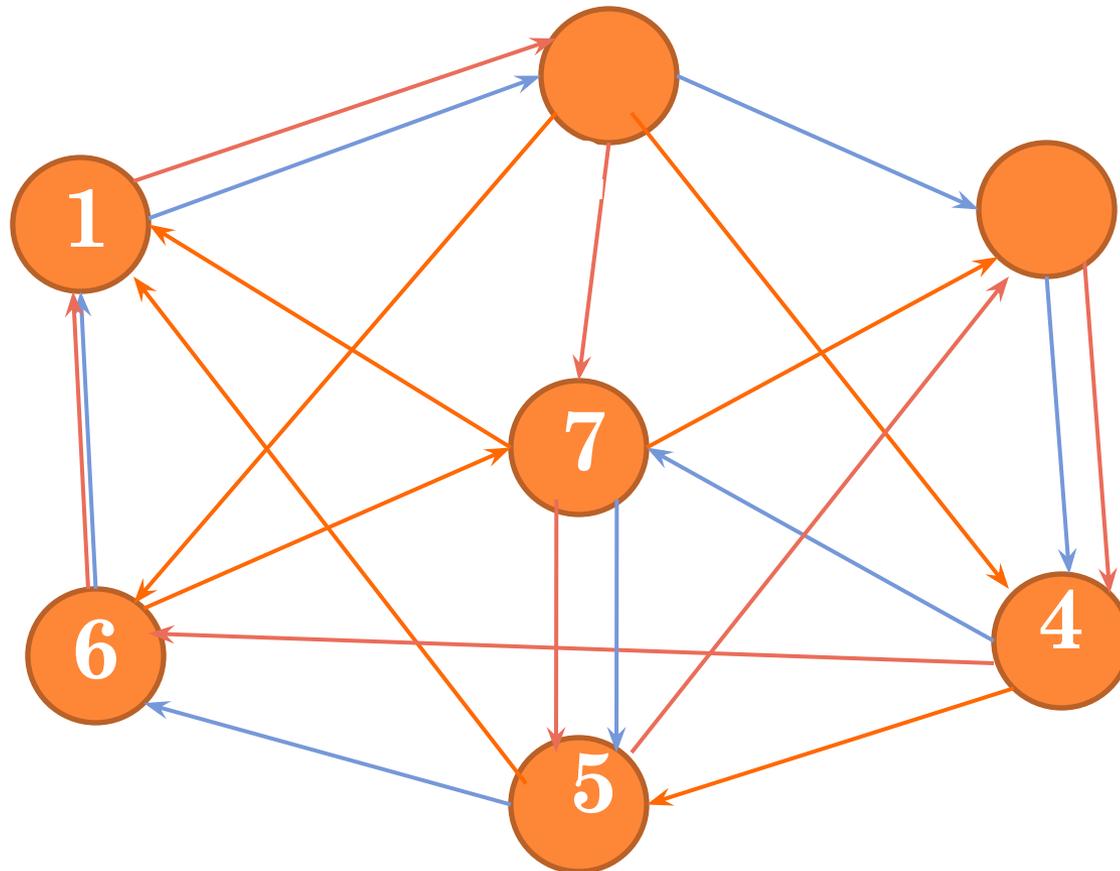


СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ ПОСТАНОВКИ «КЛАССИЧЕСКИХ» ЗАДАЧ КОММИВОЯЖЕРА

- 1. Разомкнутая постановка задачи: коммивояжер должен объехать все n городов, побывав в каждом по одному разу, и затратив: - минимум средств на путешествие либо
 - минимум средств на максимальный переход.
- 2. Замкнутая постановка задачи: коммивояжер должен объехать все n городов, побывав в каждом по одному разу и вернуться в город из которого стартовал, затратив:
 - минимум средств на путешествие (аддитивная задача коммивояжера)
 - минимум средств на максимальный переход (минимаксная задача коммивояжера).



ГРАФОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАМКНУТОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА



Гамильтонов контур $a_1=1,2,3,4,7,5,6,1$ -.

Гамильтонов контур $a_2=5,3,4,6,1,2,7,5$ -.



ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ



ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА АДДИТИВНОЙ ЗАМКНУТОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА



ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА АДДИТИВНОЙ РАЗОМКНУТОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА



ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА МИНИМАКСНОЙ РАЗОМКНУТОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

**Самостоятельно: дать
формальную
постановку
минимаксной
замкнутой задачи
коммивояжера.**



ПЕРЕМЕННЫЕ ДЛЯ ФОРМАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКИ РАЗОМКНУТОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА КАК ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕСТАНОВКИ

- Пусть $\pi = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ – некоторая перестановка вершин графа $G(X, U)$, $|X| = n$, где i_j – номер вершины, стоящей на j -м месте в перестановке π .
- Пусть переменная $y(i_j, i_{(j+1)})$ определена следующим образом:

$$\square y(i_j, i_{(j+1)}) = \begin{cases} r(i_j, i_{(j+1)}), & \text{если дуга } (i_j, i_{(j+1)}) \text{ принадлежит} \\ & \text{множеству } U; \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$



ФОРМАЛЬНЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ КОММИВОЯЖЕРА КАК ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕСТАНОВКИ

- Формальная постановка разомкнутой задачи коммивояжера:

$$\begin{cases} R(\pi) = \sum_{j=1}^{j=n-1} y(i_j, i_{j+1}); \\ R_{opt} = \min_{\pi} R(\pi). \end{cases}$$

- Формальная постановка замкнутой задачи коммивояжера:

$$\begin{cases} R(\pi) = \sum_{j=1}^{j=n-1} y(i_j, i_{j+1}) + y(i_n, i_1); \\ R_{opt} = \min_{\pi} R(\pi). \end{cases}$$



ЧАСТЬ 2.

**Методы типа ветвей и границ,
осуществляющие поиск решения
замкнутой задачи коммивояжера на
сильносвязном взвешенном
ориентированном графе.**



ПРОСТОЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНКИ

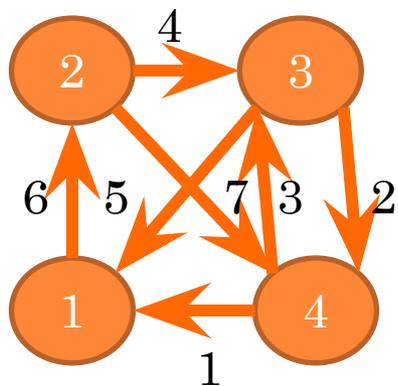
- Оценкой является суммарный вес удаленных дуг.
- Пусть I – подмножество удаленных дуг.
- Тогда оценка Δ равна:

$$\Delta = \sum_{(i,j) \in I} r(i,j).$$

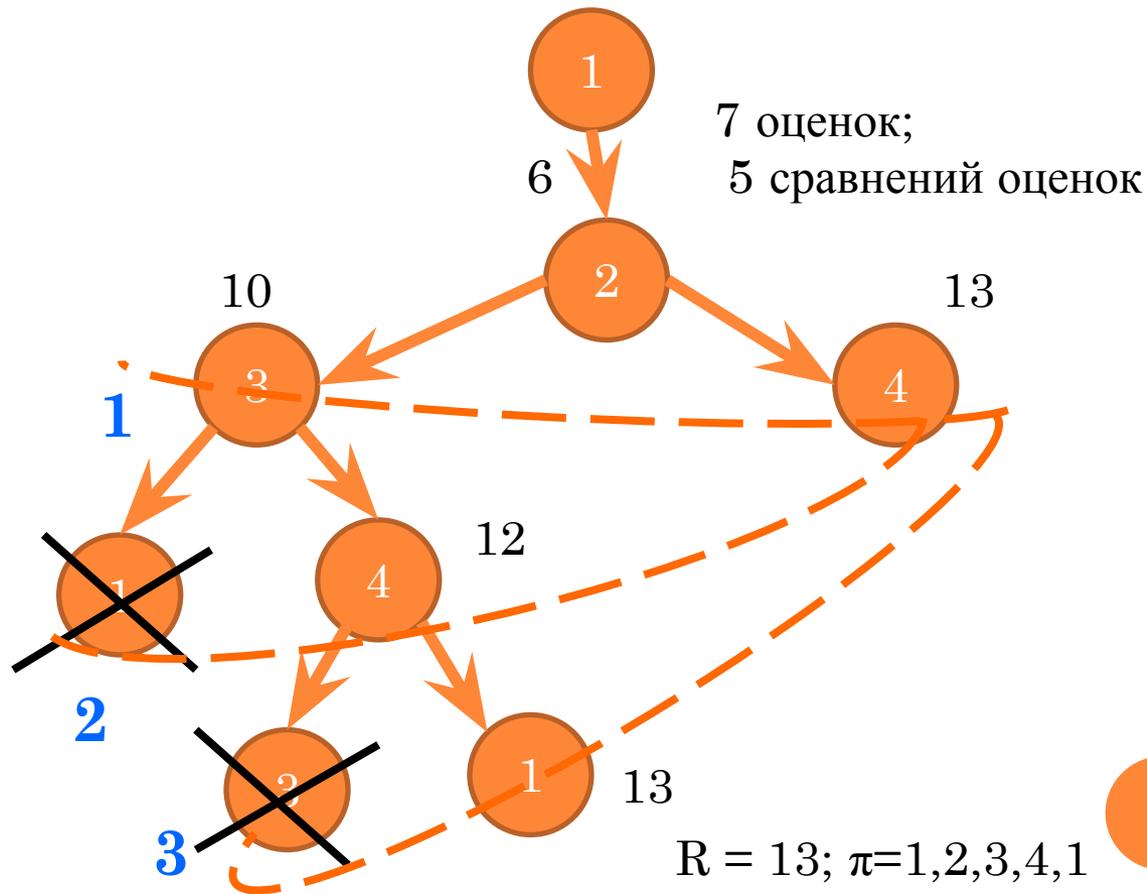


ПРОСТОЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНКИ И ФРОНТАЛЬНЫЙ СПУСК

Граф $G(X, U)$



Дерево поиска



$$\Delta(I) = \sum_{(i,j) \in I} r(i, j)$$

$R = 13; \pi = 1, 2, 3, 4, 1$

РЕШИТЬ ЗАМКНУТУЮ ЗАДАЧУ КОММИВОЯЖЕРА САМОСТОЯТЕЛЬНО, ПОЛЬЗУЯСЬ МВГ, РЕАЛИЗУЮЩИМ ФРОНТАЛЬНЫЙ СПУСК ПО ДЕРЕВУ ВЕТВЛЕНИЙ

0	7	2
3	0	1
4	5	0

1

0	1	4
8	0	7
3	2	0

2

0	5	1
9	0	10
2	4	0

3

0	1	10
5	0	3
6	2	0

4

0	7	1
2	0	5
8	4	0

5

0	2	8
7	0	3
1	4	0

6

0	4	3
5	0	9
6	6	0

7

0	9	6
8	0	5
7	4	0

8

0	2	3
5	0	4
6	7	0

9

0	7	6
8	0	4
9	3	0

10

0	11	4
5	0	7
6	12	0

11

0	3	9
8	0	1
2	7	0

12

0	12	1
2	0	11
10	3	0

13

0	17	16
8	0	14
9	2	0

14

0	11	14
5	0	17
16	13	0

15

0	13	10
18	0	2
12	17	0

16

0	3	4
6	0	5
7	8	0

17

0	4	5
7	0	6
8	9	0

18

0	9	12
3	0	15
14	11	0

19

0	16	13
11	0	5
15	20	0

20

0	7	8
10	0	9
11	12	0

21

0	9	10
12	0	11
13	14	0

22

0	15	18
9	0	21
20	17	0

23

0	23	30
18	0	12
22	27	0

24



УТОЧНЕННЫЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНКИ

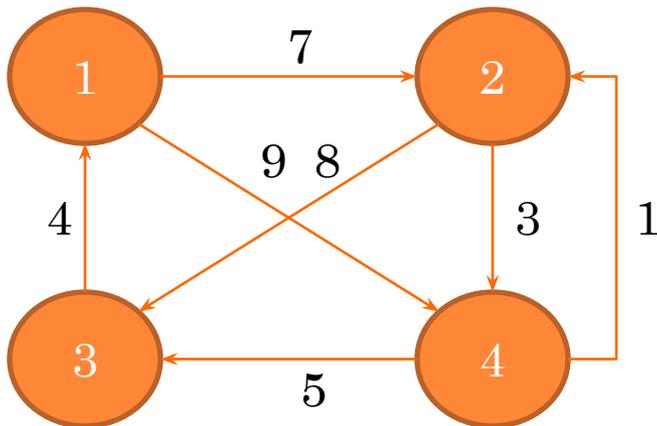
- Оценкой является сумма, включающая суммарный вес удаленных дуг и суммарный вес дуг с минимальным весом, заходящих в вершины, соответствующие городам, в которые коммивояжер еще не въезжал.
- Пусть I – подмножество удаленных дуг, а J – подмножество вершин, соответствующих городам, в которые коммивояжер еще не въезжал.
- Тогда оценка Δ равна:

$$\Delta = \sum_{(i,j) \in I} r(i,j) + \sum_{j \in J} \min_i r(i,j).$$



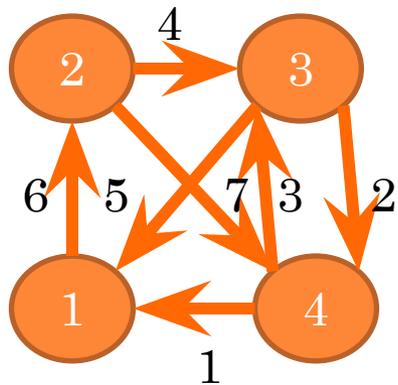
ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ УТОЧНЕННОЙ ОЦЕНКИ

- Пусть $I = \{(3,1)\}$ – подмножество удаленных дуг, а $J = \{2,3,4\}$ – подмножество вершин, соответствующих городам, в которые коммивояжер еще не въезжал.
- Тогда оценка Δ равна: $\Delta = 4 + \{1+3+5\} = 13$.

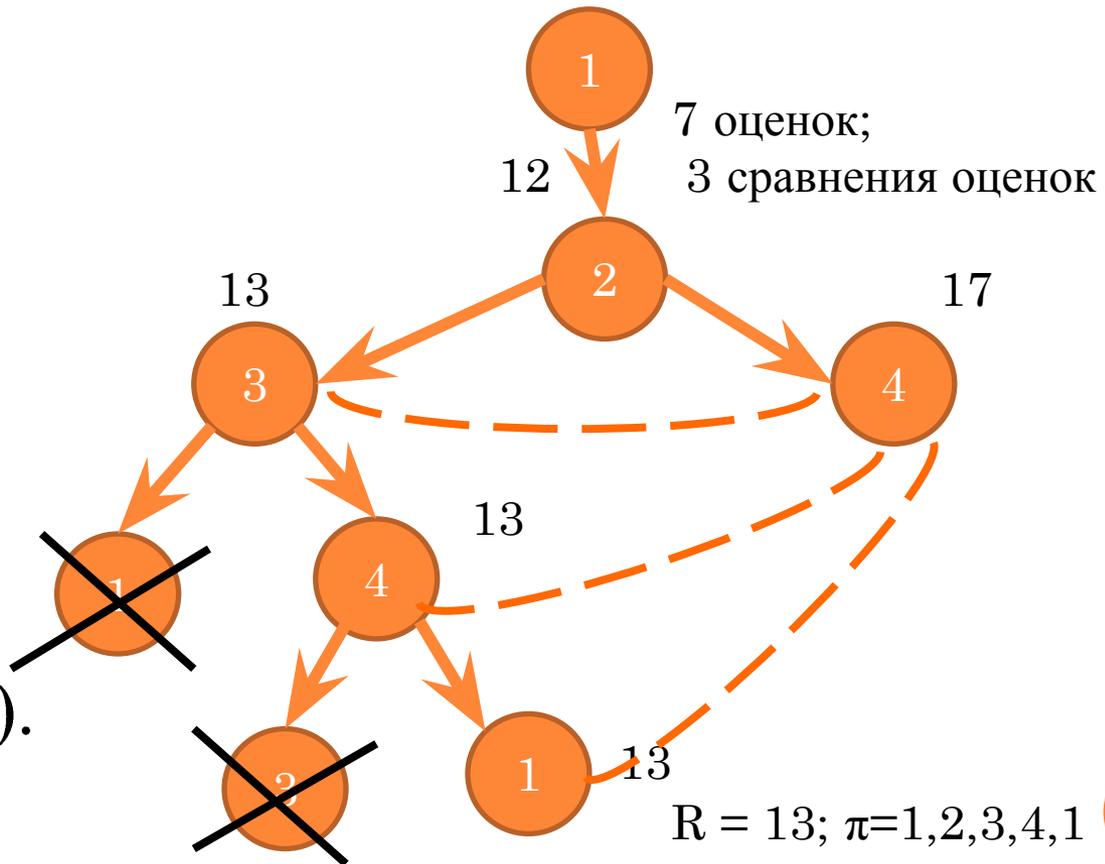


Уточненный способ вычисления оценки и фронтальный спуск

Граф $G(X, U)$



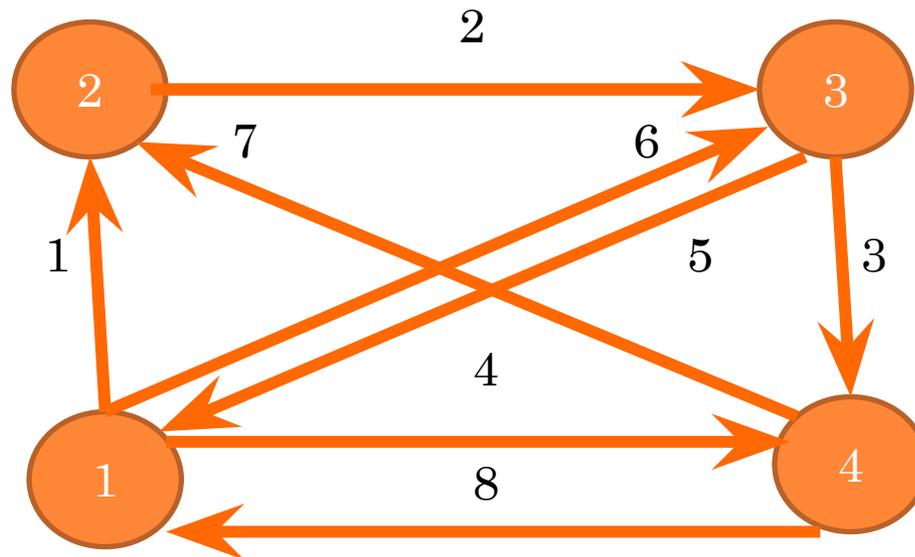
Дерево поиска



$$\Delta(I) = \sum_{(i,j) \in I} r(i,j) + \sum_{x_j \in X \setminus X(I)} \min_i r(i,j).$$

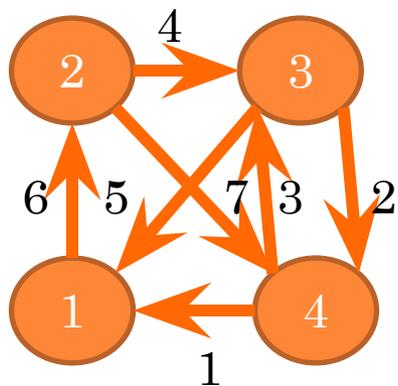
САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Решить замкнутую задачу коммивояжера фронтальным спуском по дереву ветвлений на графе $G(X,U)$, пользуясь простым и усложненным методами вычисления оценки:

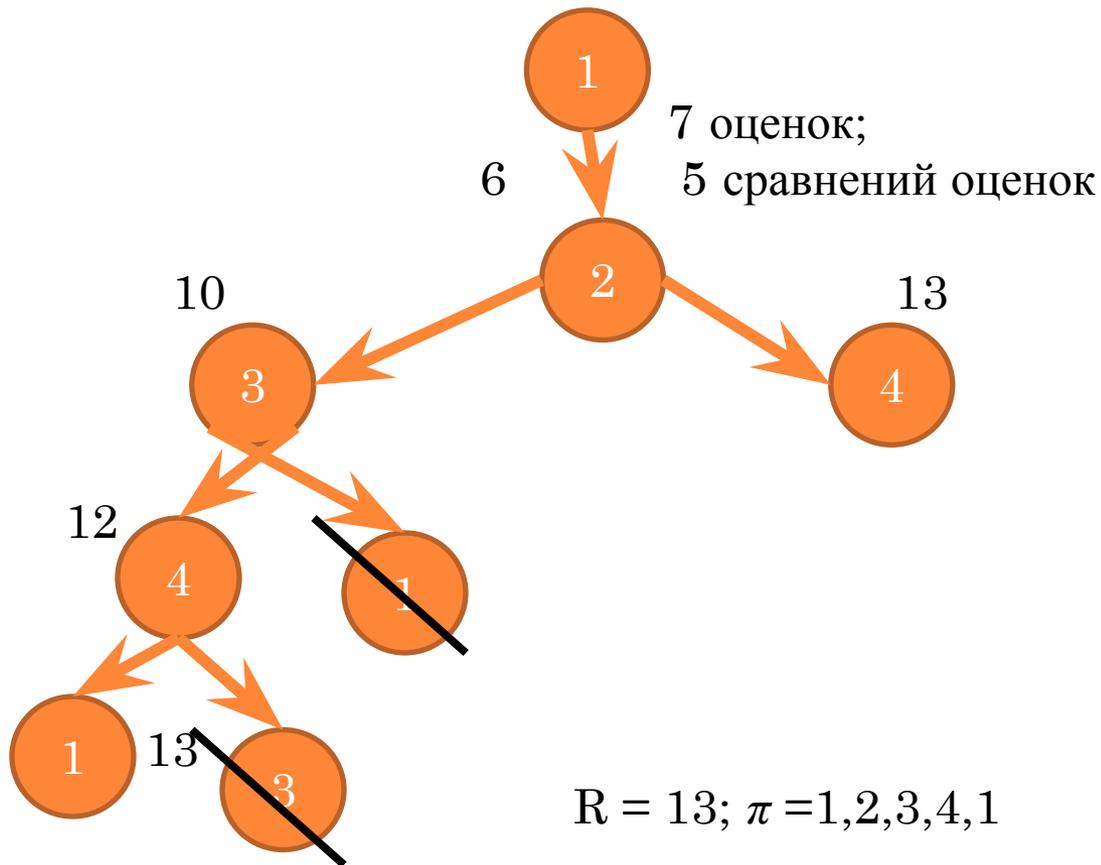


ПРОСТОЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНКИ И ПОИСК С ВОЗВРАТОМ

Граф $G(X, U)$



Дерево поиска



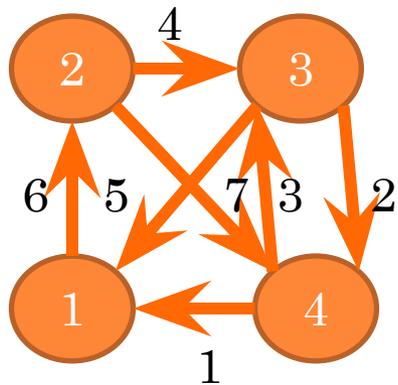
$$\Delta(I) = \sum_{(i,j) \in I} r(i, j)$$

$R = 13; \pi = 1, 2, 3, 4, 1$

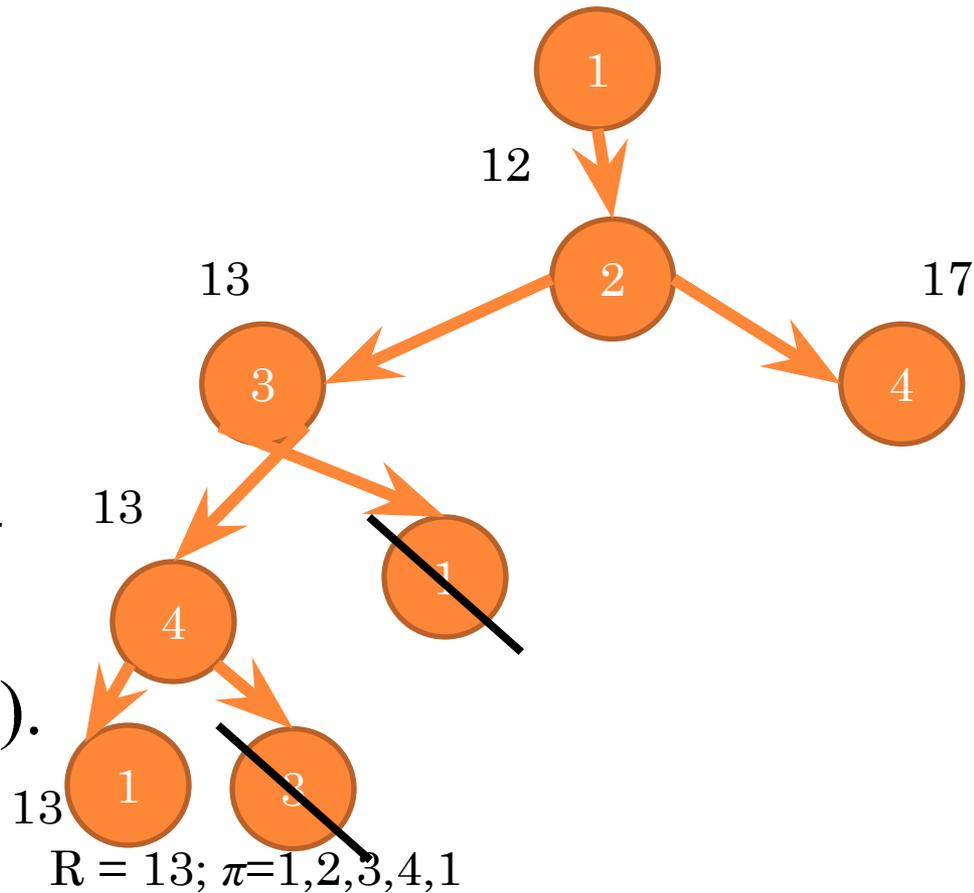


УТОЧНЕННЫЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНКИ И ПОИСК С ВОЗВРАТОМ

Граф $G(X, U)$



Дерево поиска

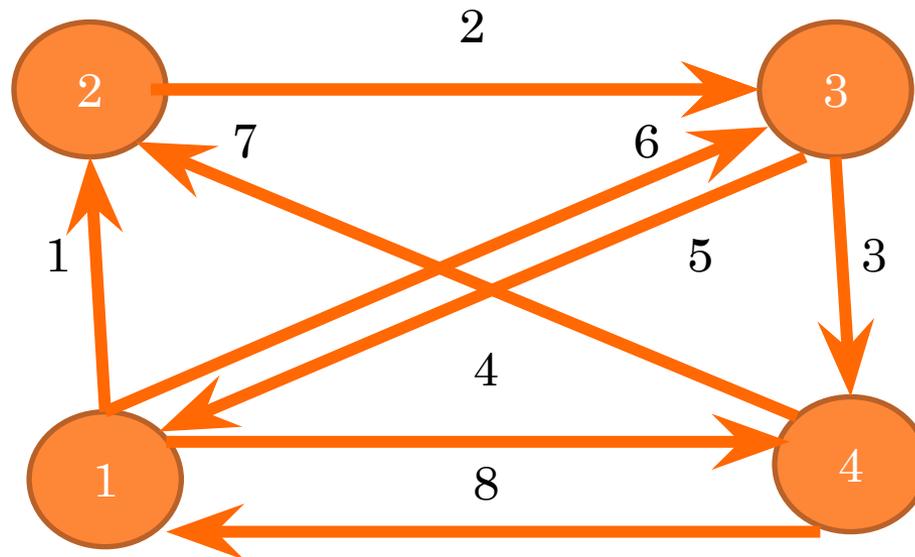


$$\Delta(I) = \sum_{(i,j) \in I} r(i,j) + \sum_{x_j \in X \setminus X(I)} \min_i r(i,j).$$



САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Определить решение замкнутой задачи коммивояжера, осуществляя поиск с возвратом по дереву ветвлений на графе $G(X, U)$, и пользуясь простым и усложненным методами вычисления оценки.



ЧАСТЬ 3

РЕШЕНИЕ РАЗОМКНУТОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА МЕТОДАМИ ТИПА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

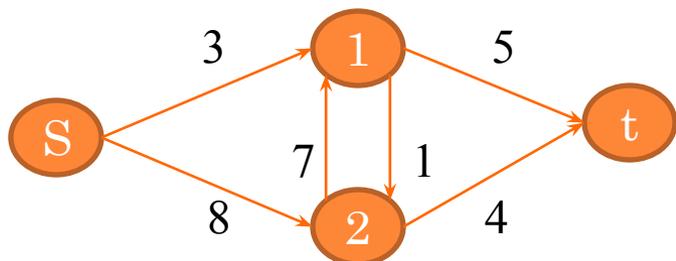


АЛГОРИТМ ПЕРЕХОДА ОТ РАЗОМКНУТОЙ «КЛАССИЧЕСКОЙ» ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА К ЗАМКНУТОЙ

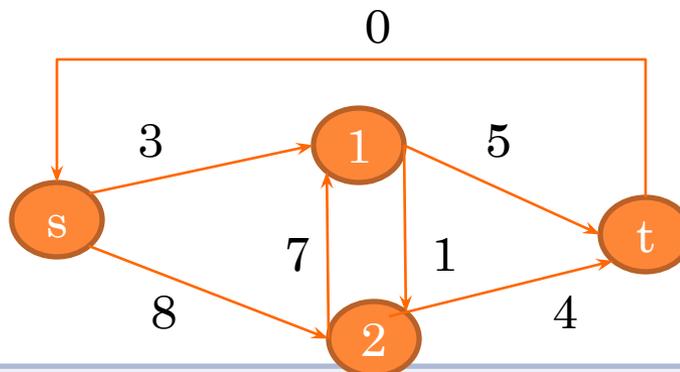
- Пусть задан орграф $G'(X', U')$ на котором следует решить разомкнутую задачу коммивояжера при условии, что выделена стартовая вершина x_s и терминальная вершина x_t .
- Преобразуем $G'(X', U')$ в орграф $G''(X', U'')$ добавлением дуги (t, s) , обладающей нулевым весом.
- На орграфе $G''(X', U'')$ ищется оптимальное решение замкнутой задачи коммивояжера.
- Отбрасывая в полученном на предыдущем шаге подмножестве дуг, дугу (t, s) , получим решение разомкнутой задачи коммивояжера.



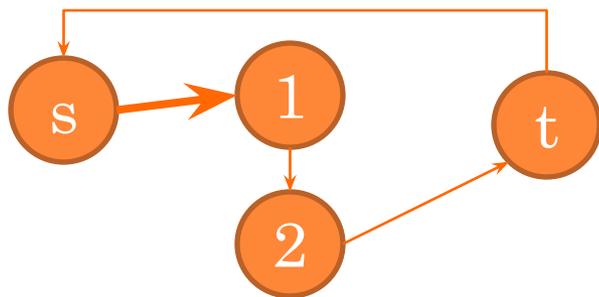
ПРИМЕР



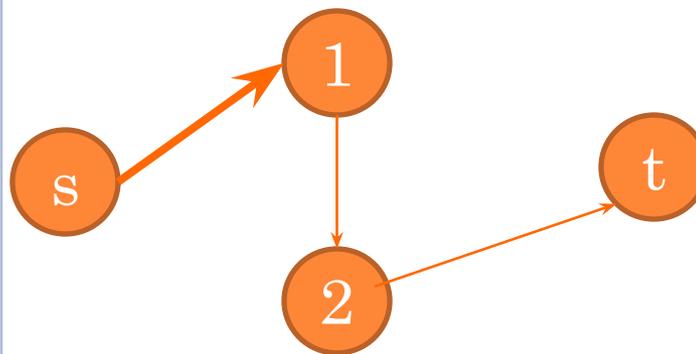
а) Граф $G'(X', U')$



б) Граф $G''(X', U'')$



в) Решение замкнутой задачи коммивояжера на $G''(X', U'')$.



г) Решение разомкнутой задачи коммивояжера на $G'(X', U')$.



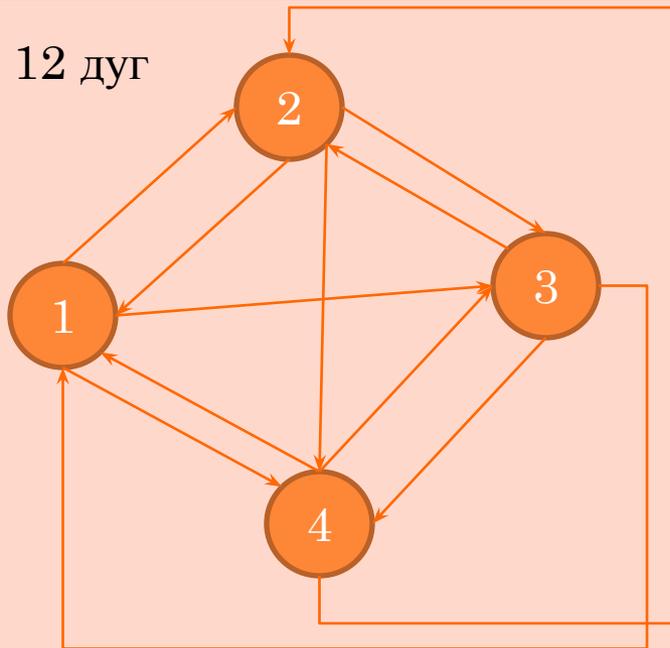
**ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФА, НА КОТОРОМ РЕШАЕТСЯ
РАЗОМКНУТАЯ ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА**

- 1. Если на исходном графе существует дуга, ведущая из стартовой вершины в терминальную, то она может быть отброшена.
- Если на исходном графе существуют дуги, ведущие в стартовую вершину, то они могут быть отброшены.
- Если на исходном графе существуют дуги, ведущие из терминальной вершины, то они могут быть отброшены.

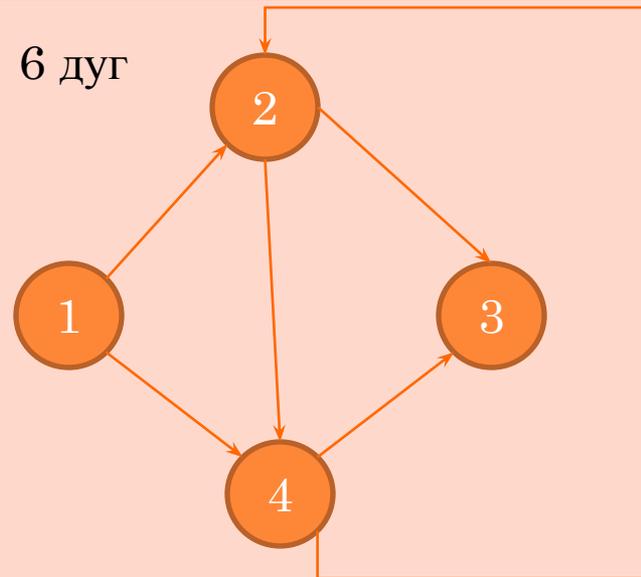


ПРИМЕР ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРАФА

Исходный граф $G(X,U)$ ($s=1$,
 $t=3$)

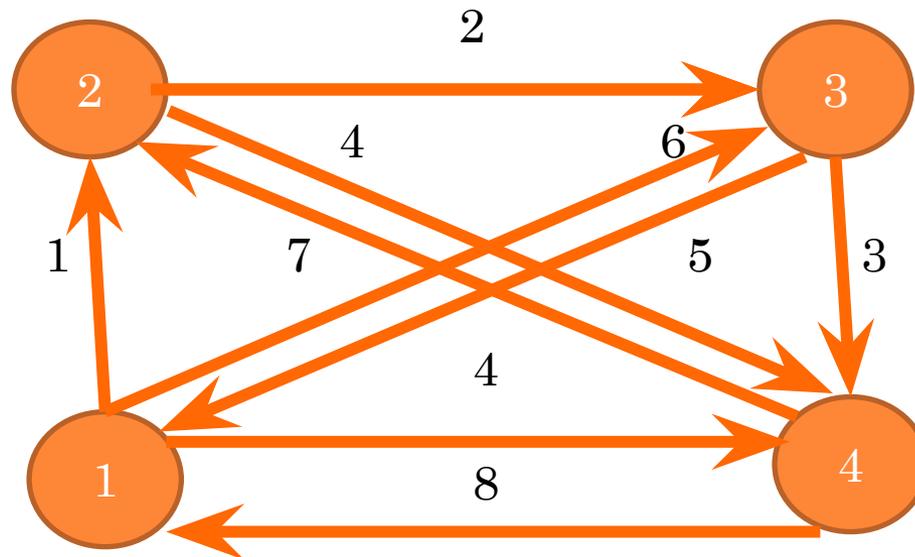


Преобразованный граф $G(X,U)$



САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Определить решение методом типа ветвей и границ разомкнутой задачи коммивояжера фронтальным спуском по дереву ветвлений на графе $G(X,U)$ и поиском с возвратом, пользуясь:
 - а) переходом к замкнутой задаче;
- б) простым и усложненным методами вычисления оценки $G(X,U)$



$s = 2; t = 3.$



САМОСТОЯТЕЛЬНО

Предложите свой способ решения разомкнутой задачи коммивояжера, опирающийся на метод типа ветвей и границ и не требующий перехода к замкнутой задаче.

