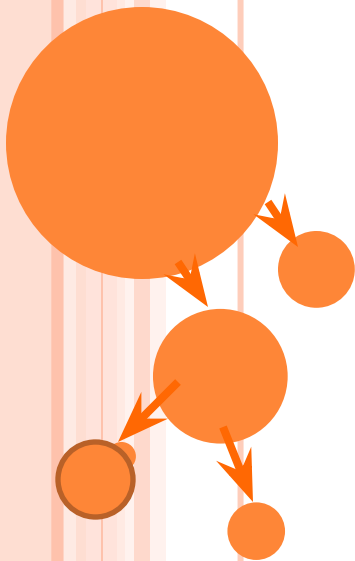


**Поиск решения задачи
коммивояжера на
взвешенных
ориентированных
сильносвязных графах
методами типа ветвей и
границ**



СОДЕРЖАНИЕ

- 1. Постановки задач коммивояжера.
- 2. Решение замкнутой задачи коммивояжера методами типа ветвей и границ.
- 3. Решение разомкнутой задачи коммивояжера методами типа ветвей и границ.



Часть 1

Постановки задач коммивояжера

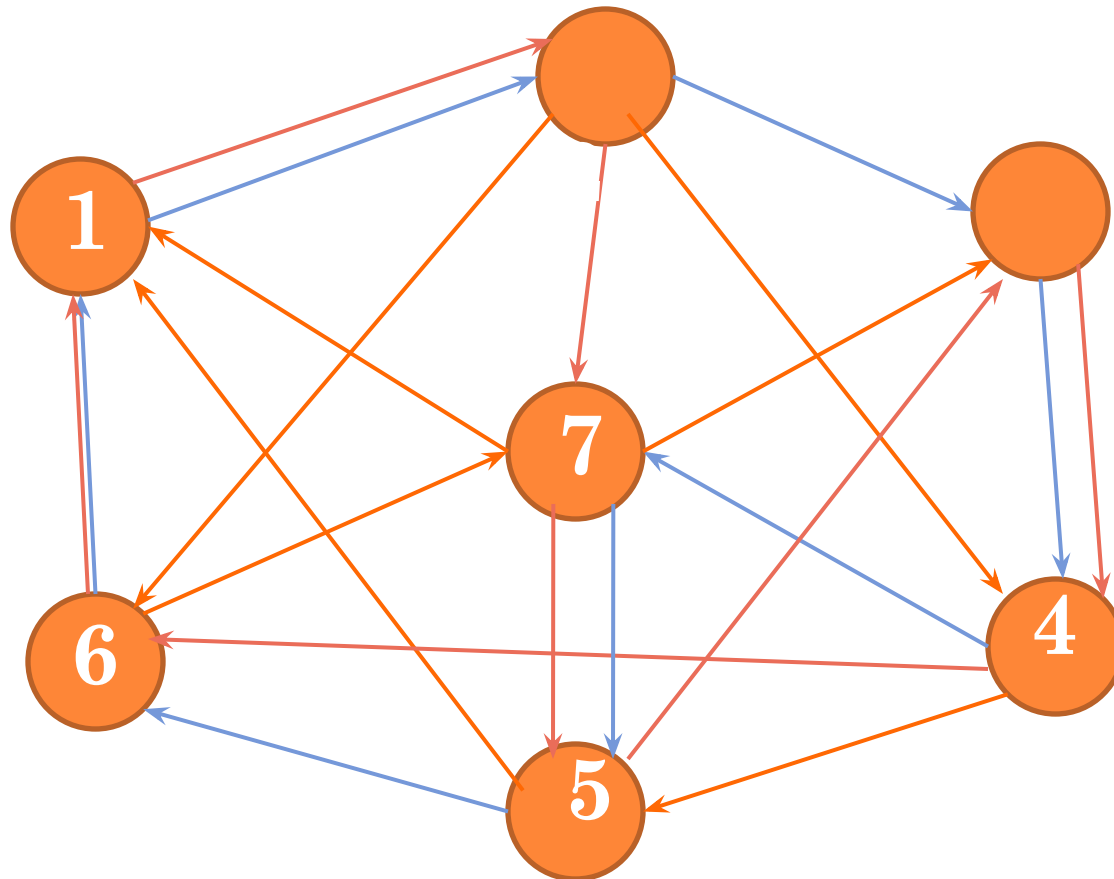


СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ ПОСТАНОВКИ «КЛАССИЧЕСКИХ» ЗАДАЧ КОММИВОЯЖЕРА

- 1. Разомкнутая постановка задачи: коммивояжер должен объехать все n городов, побывав в каждом по одному разу, и затратив: - минимум средств на путешествие либо
 - минимум средств на максимальный переход.
- 2. Замкнутая постановка задачи: коммивояжер должен объехать все n городов, побывав в каждом по одному разу и вернуться в город из которого стартовал, затратив:
 - минимум средств на путешествие (аддитивная задача коммивояжера)
 - минимум средств на максимальный переход (минимаксная задача коммивояжера).



ГРАФОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАМКНУТОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА



Гамильтонов контур $a_1=1,2,3,4,7,5,6,1$ -.

Гамильтонов контур $a_2=5,3,4,6,1,2,7,5$ -.



ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ



ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА АДДИТИВНОЙ ЗАМКНУТОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА




ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА АДДИТИВНОЙ РАЗОМКНУТОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА



ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА МИНИМАКСНОЙ РАЗОМКНУТОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

**Самостоятельно: дать
формальную
постановку
минимаксной
замкнутой задачи
коммивояжера.**



ПЕРЕМЕННЫЕ ДЛЯ ФОРМАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКИ РАЗОМКНУТОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОВАЖЕРА КАК ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕСТАНОВКИ

- Пусть $\pi = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ – некоторая перестановка вершин графа $G(X, U)$, $|X| = n$, где i_j – номер вершины, стоящей на j -м месте в перестановке π .
- Пусть переменная $y(i_j, i_{(j+1)})$ определена следующим образом:

$$\square y(i_j, i_{(j+1)}) = \begin{cases} r(i_j, i_{(j+1)}), & \text{если дуга } (i_j, i_{(j+1)}) \text{ принадлежит} \\ & \text{множеству } U; \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$



ФОРМАЛЬНЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ КОММИВОЯЖЕРА КАК ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕСТАНОВКИ

- Формальная постановка разомкнутой задачи коммивояжера:

$$\begin{cases} R(\pi) = \sum_{j=1}^{j=n-1} y(i_j, i_{j+1}); \\ R_{opt} = \min_{\pi} R(\pi). \end{cases}$$

- Формальная постановка замкнутой задачи коммивояжера:

$$\begin{cases} R(\pi) = \sum_{j=1}^{j=n-1} y(i_j, i_{j+1}) + y(i_n, i_1); \\ R_{opt} = \min_{\pi} R(\pi). \end{cases}$$



ЧАСТЬ 2.

**Методы типа ветвей и границ,
осуществляющие поиск решения
замкнутой задачи коммивояжера на
сильносвязном взвешенном
ориентированном графе.**



ПРОСТОЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНКИ

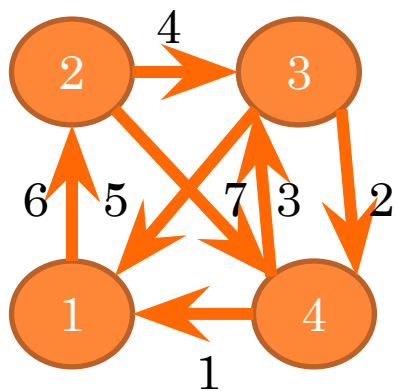
- Оценкой является суммарный вес удаленных дуг.
- Пусть I – подмножество удаленных дуг.
- Тогда оценка Δ равна:

$$\Delta = \sum_{(i,j) \in I} r(i,j).$$

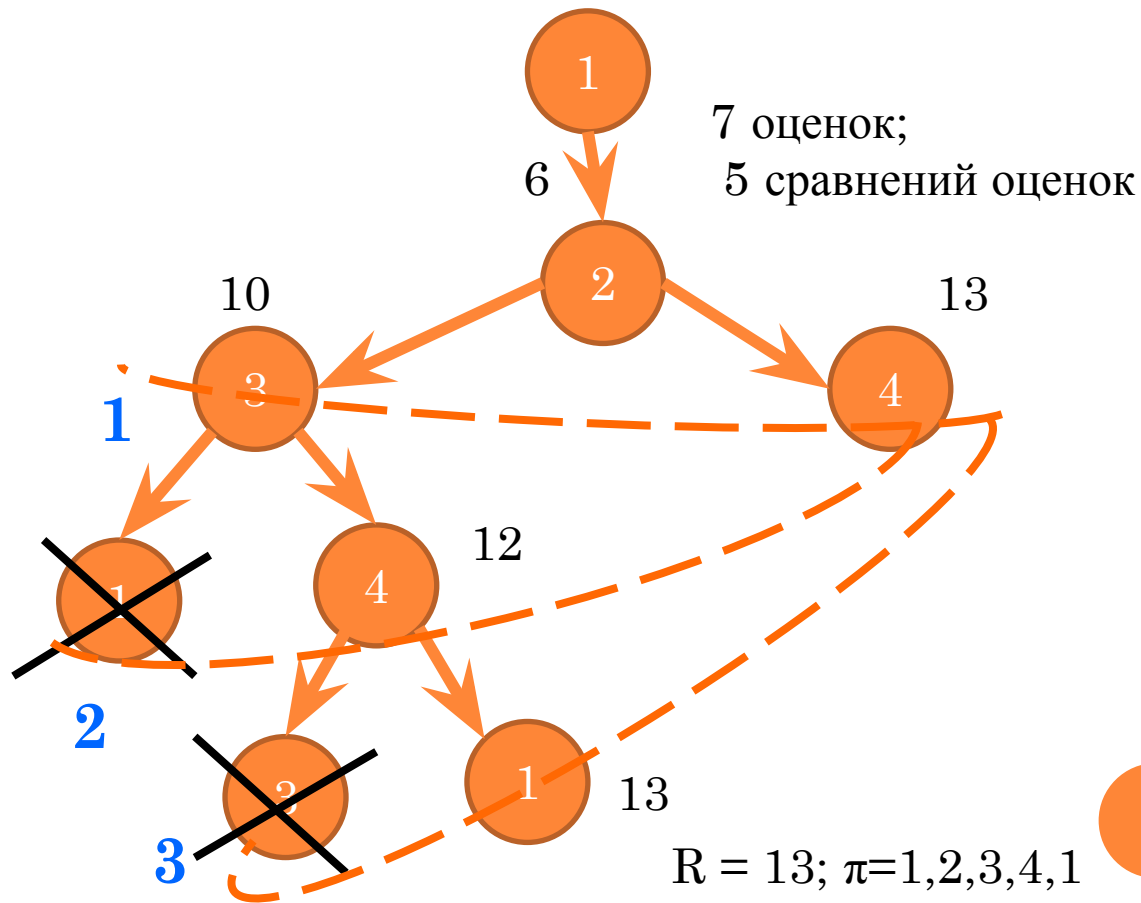


ПРОСТОЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНКИ И ФРОНТАЛЬНЫЙ СПУСК

Граф $G(X, U)$



Дерево поиска



$$\Delta(I) = \sum_{(i,j) \in I} r(i, j)$$

$R = 13; \pi = 1, 2, 3, 4, 1$

РЕШИТЬ ЗАМКНУТУЮ ЗАДАЧУ КОММИВОЯЖЕРА САМОСТОЯТЕЛЬНО, ПОЛЬЗУЯСЬ МВГ, РЕАЛИЗУЮЩИМ ФРОНТАЛЬНЫЙ СПУСК ПО ДЕРЕВУ ВЕТВЛЕНИЙ

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 7 | 2 |
| 3 | 0 | 1 |
| 4 | 5 | 0 |

1

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 4 |
| 8 | 0 | 7 |
| 3 | 2 | 0 |

2

| | | |
|---|---|----|
| 0 | 5 | 1 |
| 9 | 0 | 10 |
| 2 | 4 | 0 |

3

| | | |
|---|---|----|
| 0 | 1 | 10 |
| 5 | 0 | 3 |
| 6 | 2 | 0 |

4

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 7 | 1 |
| 2 | 0 | 5 |
| 8 | 4 | 0 |

5

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 8 |
| 7 | 0 | 3 |
| 1 | 4 | 0 |

6

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 4 | 3 |
| 5 | 0 | 9 |
| 6 | 6 | 0 |

7

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 9 | 6 |
| 8 | 0 | 5 |
| 7 | 4 | 0 |

8

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 3 |
| 5 | 0 | 4 |
| 6 | 7 | 0 |

9

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 7 | 6 |
| 8 | 0 | 4 |
| 9 | 3 | 0 |

10

| | | |
|---|----|---|
| 0 | 11 | 4 |
| 5 | 0 | 7 |
| 6 | 12 | 0 |

11

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 3 | 9 |
| 8 | 0 | 1 |
| 2 | 7 | 0 |

12

| | | |
|----|----|----|
| 0 | 12 | 1 |
| 2 | 0 | 11 |
| 10 | 3 | 0 |

13

| | | |
|---|----|----|
| 0 | 17 | 16 |
| 8 | 0 | 14 |
| 9 | 2 | 0 |

14

| | | |
|----|----|----|
| 0 | 11 | 14 |
| 5 | 0 | 17 |
| 16 | 13 | 0 |

15

| | | |
|----|----|----|
| 0 | 13 | 10 |
| 18 | 0 | 2 |
| 12 | 17 | 0 |

16

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 3 | 4 |
| 6 | 0 | 5 |
| 7 | 8 | 0 |

17

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 4 | 5 |
| 7 | 0 | 6 |
| 8 | 9 | 0 |

18

| | | |
|----|----|----|
| 0 | 9 | 12 |
| 3 | 0 | 15 |
| 14 | 11 | 0 |

19

| | | |
|----|----|----|
| 0 | 16 | 13 |
| 11 | 0 | 5 |
| 15 | 20 | 0 |

20

| | | |
|----|----|---|
| 0 | 7 | 8 |
| 10 | 0 | 9 |
| 11 | 12 | 0 |

21

| | | |
|----|----|----|
| 0 | 9 | 10 |
| 12 | 0 | 11 |
| 13 | 14 | 0 |

22

| | | |
|----|----|----|
| 0 | 15 | 18 |
| 9 | 0 | 21 |
| 20 | 17 | 0 |

23

| | | |
|----|----|----|
| 0 | 23 | 30 |
| 18 | 0 | 12 |
| 22 | 27 | 0 |

24



УТОЧНЕННЫЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНКИ

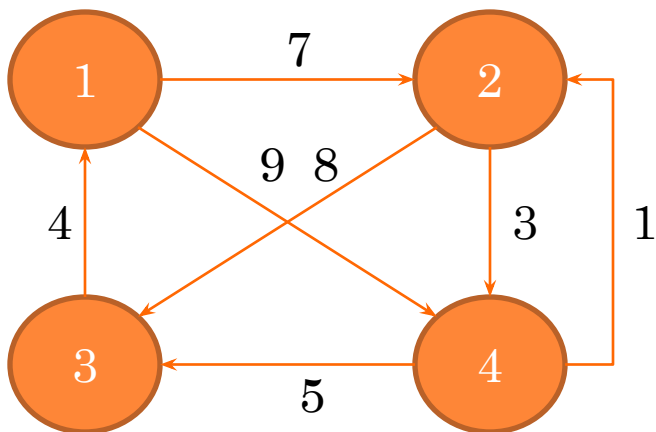
- Оценкой является сумма, включающая суммарный вес удаленных дуг и суммарный вес дуг с минимальным весом, заходящих в вершины, соответствующие городам, в которые коммивояжер еще не въезжал.
- Пусть I – подмножество удаленных дуг, а J – подмножество вершин, соответствующих городам, в которые коммивояжер еще не въезжал.
- Тогда оценка Δ равна:

$$\Delta = \sum_{(i,j) \in I} r(i,j) + \sum_{j \in J} \min_i r(i,j).$$



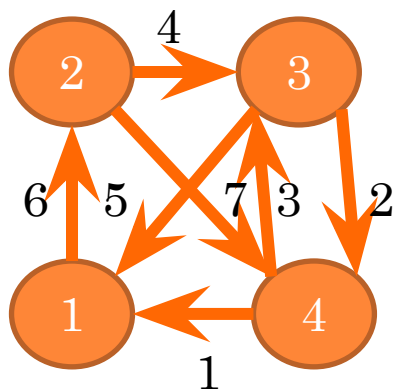
ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ УТОЧНЕННОЙ ОЦЕНКИ

- Пусть $I = \{(3,1)\}$ – подмножество удаленных дуг, а $J = \{2,3,4\}$ – подмножество вершин, соответствующих городам, в которые коммивояжер еще не въезжал.
- Тогда оценка Δ равна: $\Delta = 4 + \{1+3+5\} = 13$.

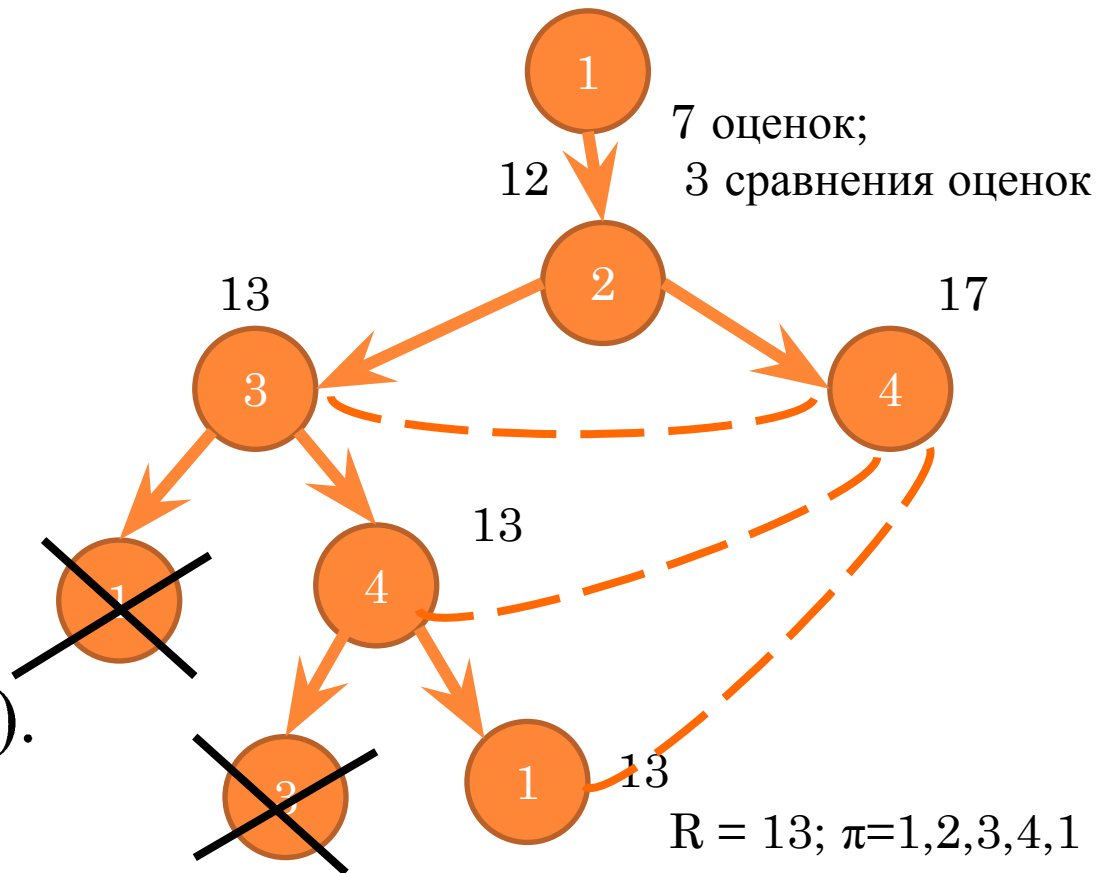


Уточненный способ вычисления оценки и фронтальный спуск

Граф $G(X, U)$



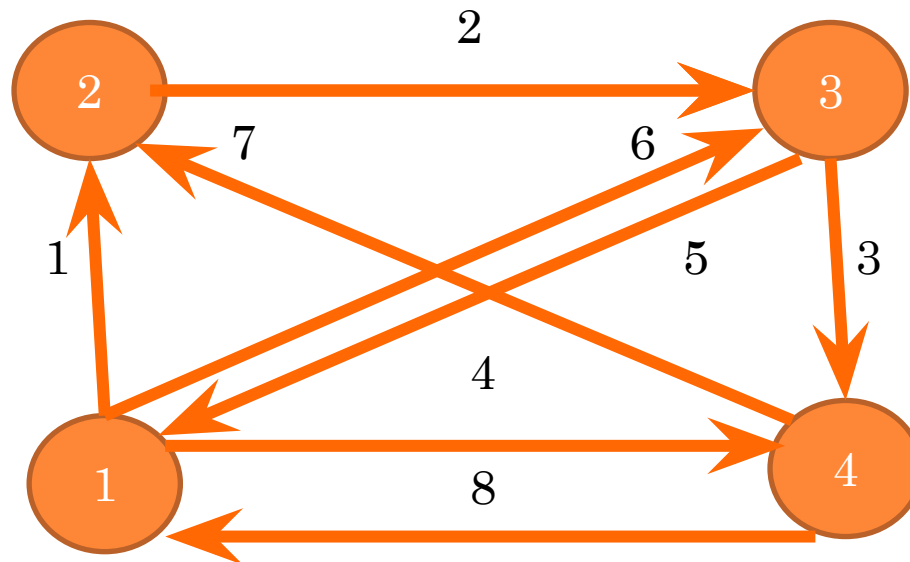
Дерево поиска



$$\Delta(I) = \sum_{(i,j) \in I} r(i,j) + \sum_{x_j \in X \setminus X(I)} \min_i r(i,j).$$

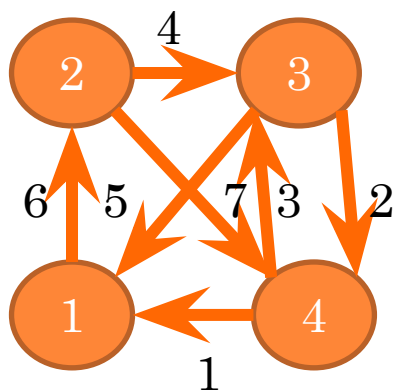
САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Решить замкнутую задачу коммивояжера фронтальным спуском по дереву ветвлений на графе $G(X,U)$, пользуясь простым и усложненным методами вычисления оценки:

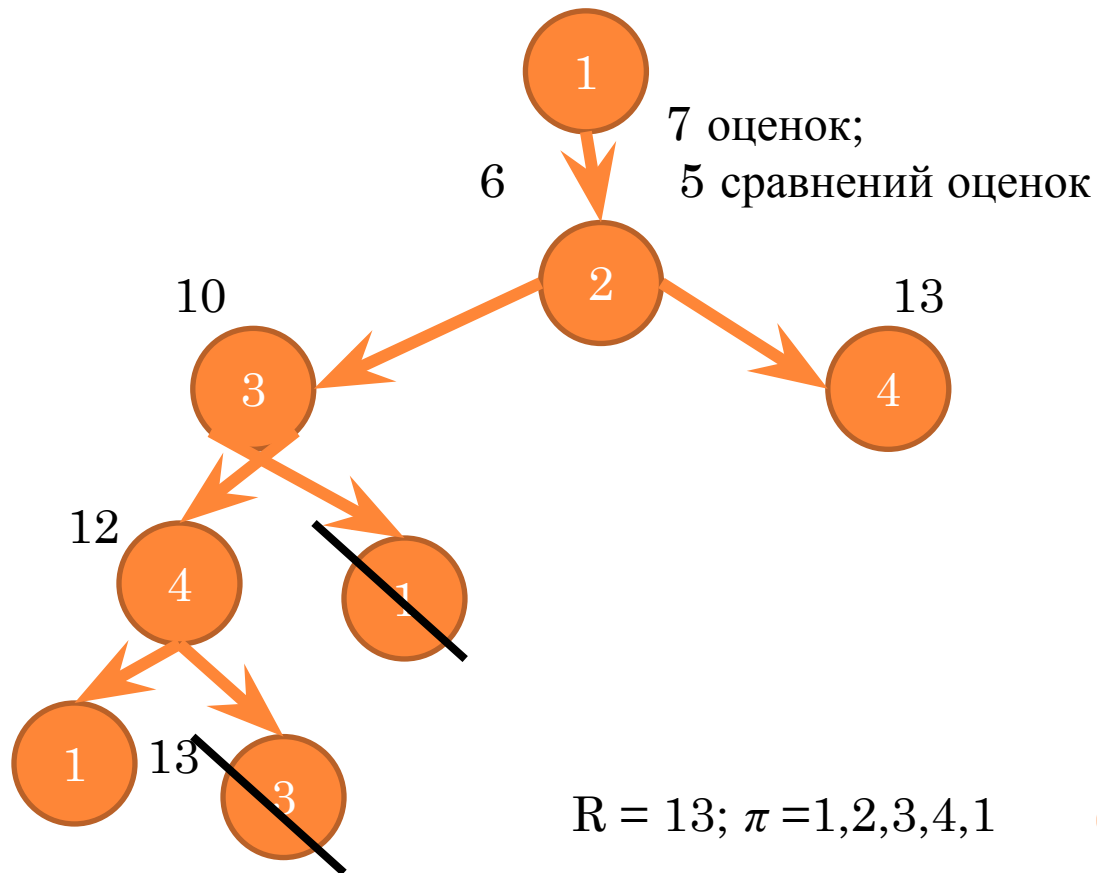


ПРОСТОЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНКИ И ПОИСК С ВОЗВРАТОМ

Граф $G(X, U)$



Дерево поиска

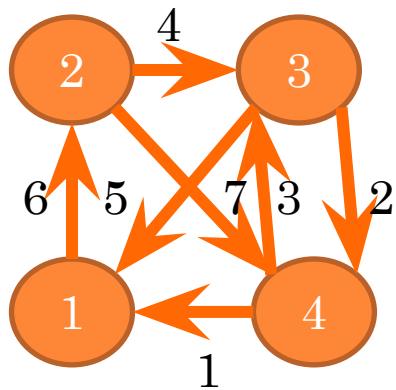


$$\Delta(I) = \sum_{(i,j) \in I} r(i, j)$$

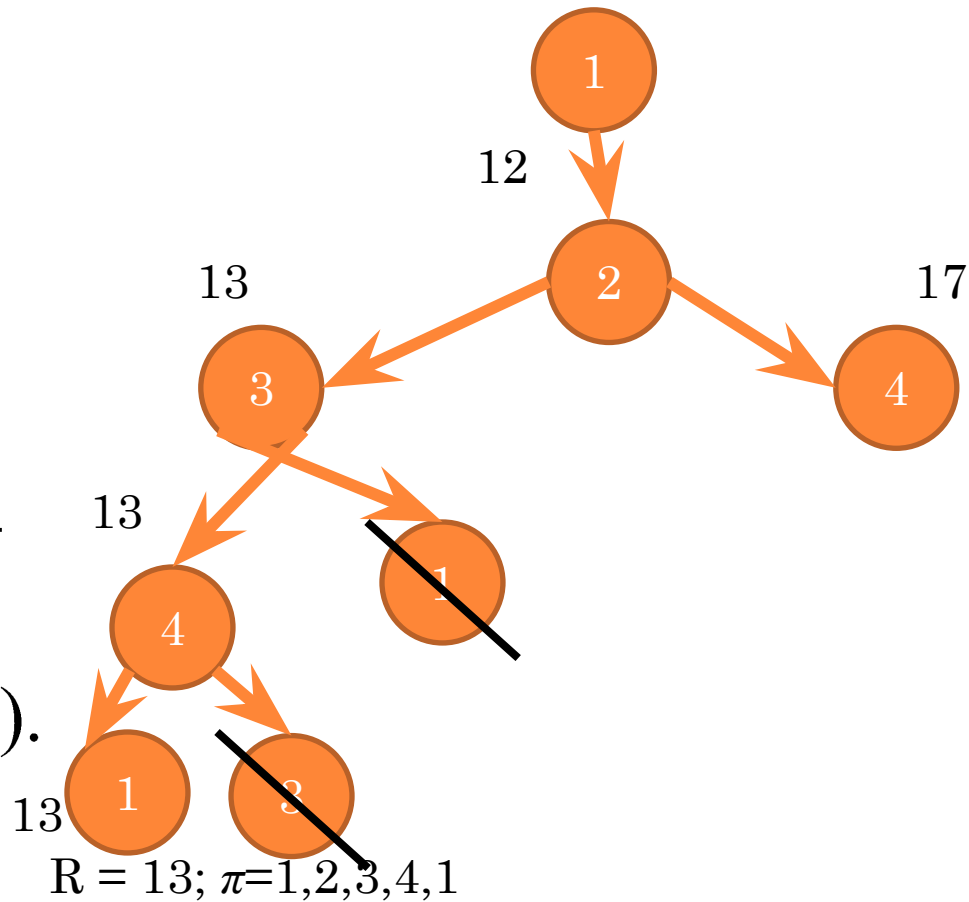


Уточненный способ вычисления оценки и ПОИСК С ВОЗВРАТОМ

Граф $G(X, U)$



Дерево поиска

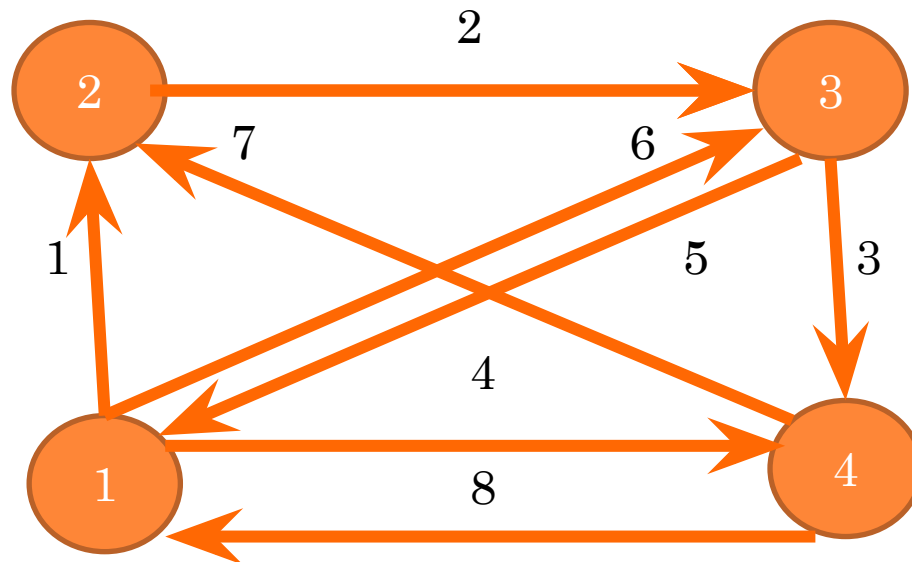


$$\Delta(I) = \sum_{(i,j) \in I} r(i,j) + \sum_{x_j \in X \setminus X(I)} \min_i r(i,j).$$



САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Определить решение замкнутой задачи коммивояжера, осуществляя поиск с возвратом по дереву ветвлений на графе $G(X, U)$, и пользуясь простым и усложненным методами вычисления оценки.



ЧАСТЬ 3

РЕШЕНИЕ РАЗОМКНУТОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА МЕТОДАМИ ТИПА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

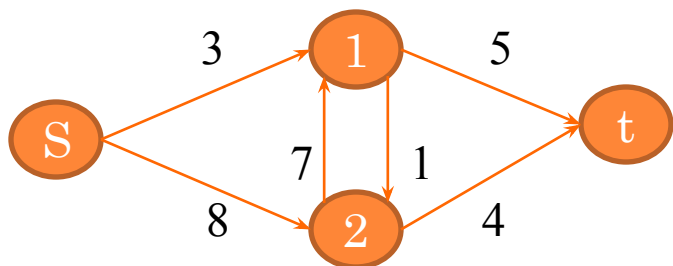


АЛГОРИТМ ПЕРЕХОДА ОТ РАЗОМКНУТОЙ «КЛАССИЧЕСКОЙ» ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА К ЗАМКНУТОЙ

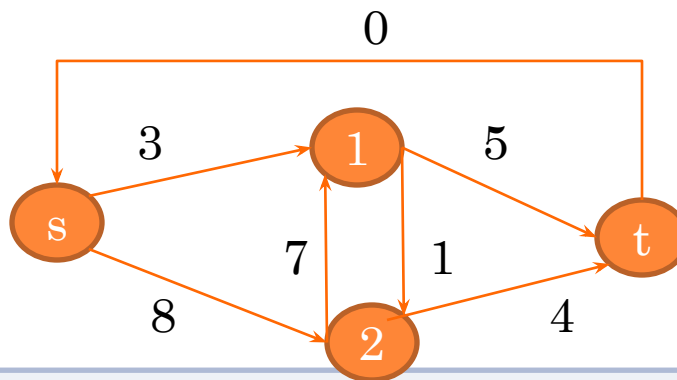
- Пусть задан орграф $G'(X', U')$ на котором следует решить разомкнутую задачу коммивояжера при условии, что выделена стартовая вершина x_s и терминальная вершина x_t .
- Преобразуем $G'(X', U')$ в орграф $G''(X', U'')$ добавлением дуги (t, s) , обладающей нулевым весом.
- На орграфе $G''(X', U'')$ ищется оптимальное решение замкнутой задачи коммивояжера.
- Отбрасывая в полученном на предыдущем шаге подмножестве дуг, дугу (t, s) , получим решение разомкнутой задачи коммивояжера.



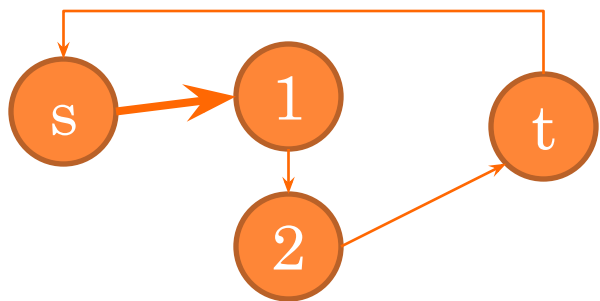
ПРИМЕР



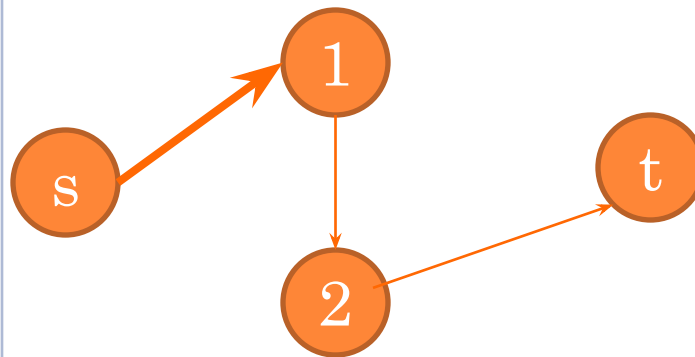
а) Граф $G'(X', U')$



б) Граф $G''(X', U'')$



в) Решение замкнутой задачи коммивояжера на $G''(X', U'')$.



г) Решение разомкнутой задачи коммивояжера на $G'(X', U')$.



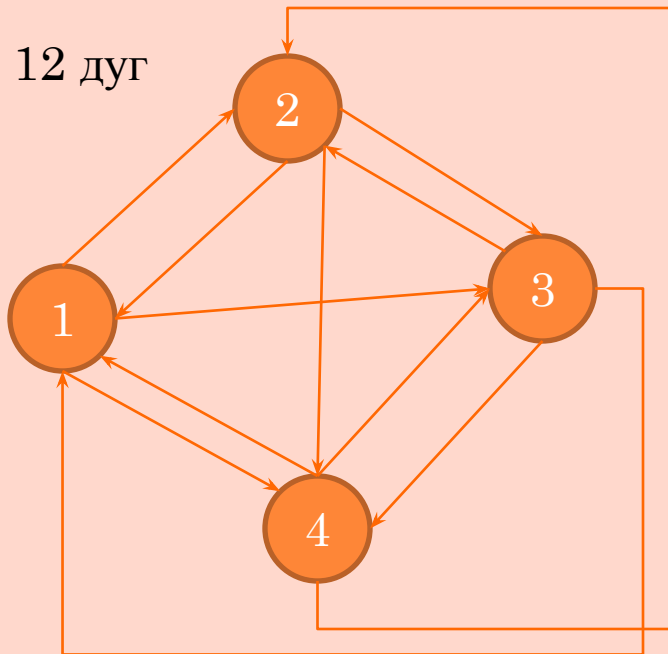
**ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФА, НА КОТОРОМ РЕШАЕТСЯ
РАЗОМКНУТАЯ ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА**

- 1. Если на исходном графе существует дуга, ведущая из стартовой вершины в терминальную, то она может быть отброшена.
- Если на исходном графе существуют дуги, ведущие в стартовую вершину, то они могут быть отброшены.
- Если на исходном графе существуют дуги, ведущие из терминальной вершины, то они могут быть отброшены.

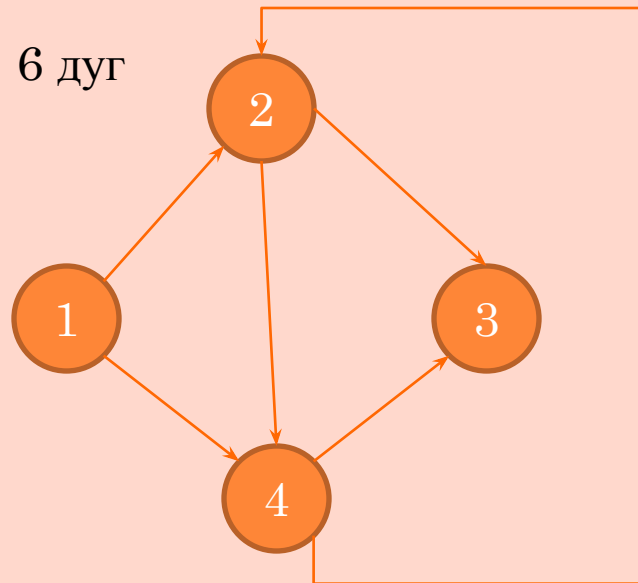


ПРИМЕР ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРАФА

Исходный граф $G(X,U)$ ($s=1$,
 $t=3$)

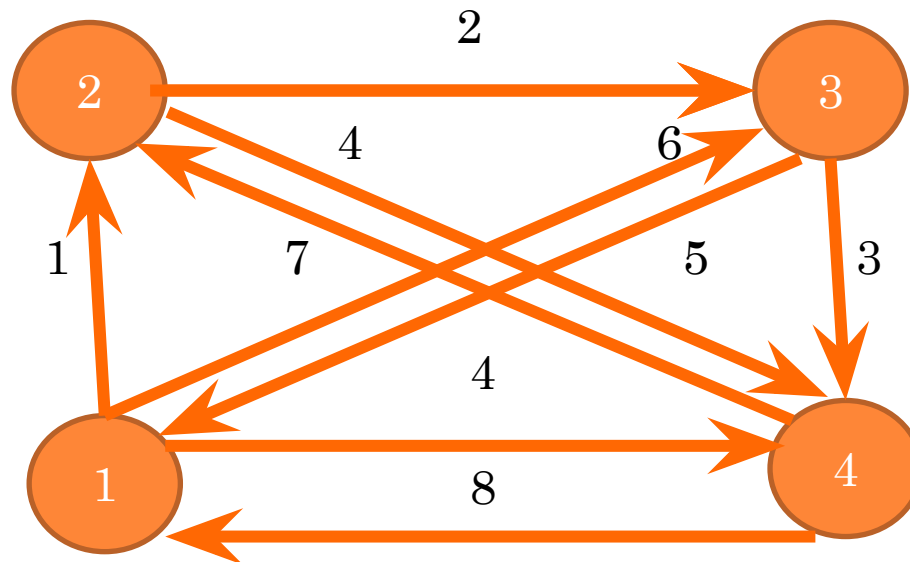


Преобразованный граф $G(X,U)$



САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Определить решение методом типа ветвей и границ разомкнутой задачи коммивояжера фронтальным спуском по дереву ветвлений на графе $G(X,U)$ и поиском с возвратом, пользуясь:
а) переходом к замкнутой задаче;
- б) простым и усложненным методами вычисления оценки $G(X,U)$



$s = 2; t = 3.$



САМОСТОЯТЕЛЬНО

Предложите свой способ решения разомкнутой задачи коммивояжера, опирающийся на метод типа ветвей и границ и не требующий перехода к замкнутой задаче.

