

Обратная польская запись (ОПЗ)

Сложные вычислительные задачи обычно требуют больших объемов вычислений, поэтому к разработчикам языков программирования предъявлялось требование: максимально приблизить форму записи математических выражений в коде программы к естественному языку математики.

Одну из первых областей системного программирования составили исследования способов трансляции математических выражений.

В результате наибольшее распространение получил метод трансляции с помощью обратной польской записи, которую предложил польский математик Я. Лукашевич.

ОПЗ представляет собой выражение, записанное в постфиксной форме, без скобок, по специальным правилам.

Пусть для операндов A и B выполняется операция сложения.

Привычная форма записи $A+B$ называется *инфиксной*.

Форма записи, в которой знак операции следует перед операндами $+AB$, называется *префиксной*.

Если же операция записывается после операндов $AB+$, то это *постфиксная* форма.

Получение ОПЗ реализуется с использованием структур в виде стека и дерева.

Алгоритм, использующий стек

Получение ОПЗ с использованием стека может осуществляться весьма просто на основе алгоритма, предложенного Дейкстрой, который ввел понятие стекового приоритета операций, например:

Операция	Приоритет
(1
+ -	2
* /	3

Суть алгоритма в следующем

Исходное выражение, записанное в виде строки символов S , просматривается слева направо.

Операнды переписываются в выходную строку B , операции обрабатываются с использованием стека, который первоначально пуст, на основе следующих правил.

1. Если в строке S встретился операнд, то его помещаем в строку B .
2. Если в S встретилась *открывающая скобка*, то ее помещаем в стек.

3. Если в S встретилась *закрывающая скобка*, то извлекаем из стека и записываем в строку B все операции до "(", саму "(" скобку также извлекаем из стека; обе скобки игнорируются.
4. Если в S встретилась операция X , то выталкиваем из стека все операции, приоритет которых не ниже X , после чего саму операцию X записываем в стек.
5. При достижении конца строки S , анализируем стек и, если он не пуст, извлекаем и переписываем его элементы в выходную строку B .

Пример реализации

Исходное выражение задано в виде строки S

$$"a + b * c + (d * e + f) * g"$$

Запишем это выражение в форме ОПЗ.

Правильным ответом будет выражение

$$abc^*+de*f+g^*+$$

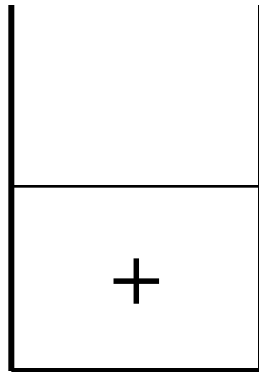
Результат будем получать в строке B .

Начинаем последовательно просматривать символы исходной строки, причем B – пустая строка и стек пуст.

Всего в строке 15 символов (15 п.п.).

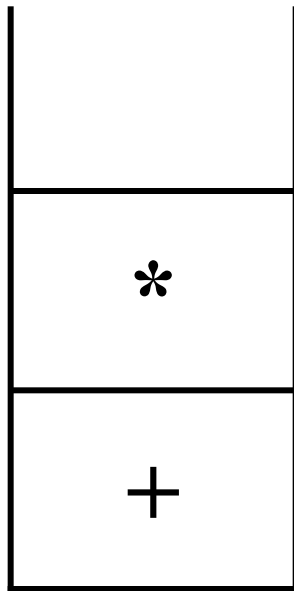
1. Букву «*a*» помещается в строку *B*
2. Операцию «*+*» помещаем в стек.
3. Букву «*b*» помещаем в строку *B*.

На этот момент стек и строка *B* выглядят следующим образом:



B = " *ab* "

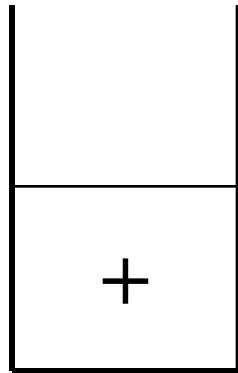
4. Операцию «*» помещаем в стек, т.к. элемент «+» в вершине стека имеет более низкий приоритет.
5. Букву «с» помещаем в строку *B*, после чего имеем



B = " abc "

6. Следующая операция «+»: анализируем стек и видим, что в вершине стека «*» и следующая за ней «+» имеют приоритеты не ниже текущей. Следовательно, обе операции извлекаем из стека и помещаем в строку *B*, а текущую операцию «+» помещаем в стек.

В итоге имеем

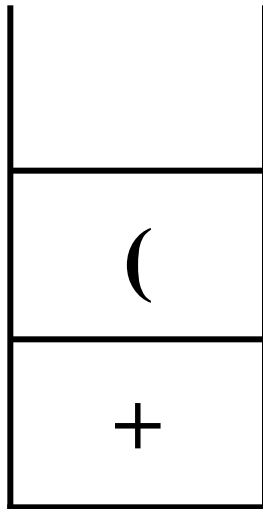


B = " abc*+ "

7. Далее следует символ «(», его помещаем в стек.

8. Букву «*d*» помещаем в строку *B*.

В результате получается

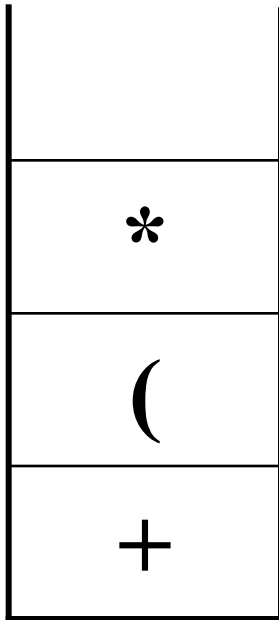


B = " *abc*+d* "

9. Операцию «*» помещаем в стек, т.к. приоритет у скобки самый низкий.

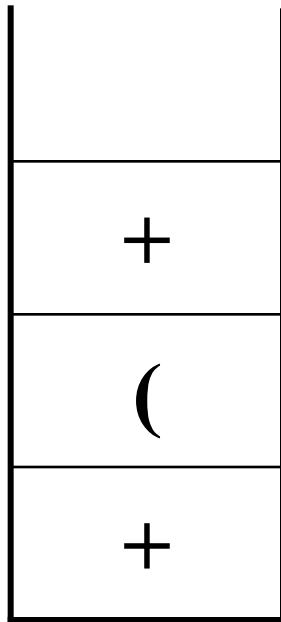
10. Букву «e» помещаем в строку *B*.

Получили



B = " *abc*+de* "

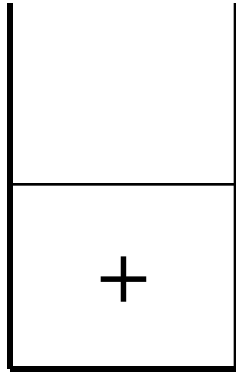
11. Следующая операция «+»: приоритет операции «*» в вершине стека выше, поэтому извлекаем из стека «*» и помещаем в строку *B*. Текущий символ «+» помещаем в стек.
12. Букву «*f*» помещаем в строку *B*. Получаем



$B = "abc^*+de^*f"$

13. Далее идет закрывающая скобка, все элементы до символа «(» извлекаем из стека и помещаем в строку B (это элемент «+»), сам символ «(» тоже извлекаем из стека.

Обе скобки игнорируются:

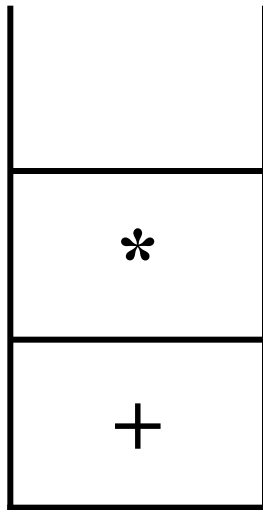


$B = "abc^*+de^*f+"$

14. Операцию «*» помещаем в стек, т.к. ее приоритет выше операции «+» в вершине стека.


15. Букву «g» записываем в строку *B*.

Получаем



B = " *abc*+de*f+g* "

Все символы строки S просмотрены, следовательно, анализируем состояние стека, если он не пуст, то переписываем все его элементы в строку B , т.е. операции «+» и «*» последовательно извлекаем из стека в строку:

 $B = "abc*+de*f+g*+"$

Просмотрев исходную информацию только один раз, мы решили поставленную задачу.

Вычисление выражения, записанного в ОПЗ, может проводиться путем однократного просмотра, что является весьма удобным при генерации объектного кода программ.

Рассмотрим простой пример.

Выражение $(A + B) * (C + D) - E$ в виде ОПЗ:

$$AB + CD + * E -$$

Его вычисление проводится следующим образом (R_1 и R_2 – вспомогательные переменные):

Шаг	Анализируемая строка	Действие
1	$AB + CD + * E -$	$R_1 = A + B$
2	$R_1 CD + * E -$	$R_2 = C + D$
3	$R_1 R_2 * E -$	$R_1 = R_1 * R_2$
4	$R_1 E -$	$R_1 = R_1 - E$
5	R_1	

Текст программы, реализующий рассмотренный алгоритм в консольном режиме, может иметь следующий вид:

...

```
struct Stack {  
    char c;          // Символ операции  
    Stack *next;  
};  
  
int Prior (char);  
  
Stack* InS ( Stack*, char);  
  
Stack* OutS ( Stack*, char*);
```

```
void main ()
{
    Stack *t,
    *Op = NULL;    // Стек операций Op – пуст
    char a, In [81], Out [81];
    // In – входная (S), Out – выходная (B) строки
    int k = 0, l = 0;
    // Текущие индексы для строк
    cout << " Input formula : ";
    cin >> In;
```

// Анализируем символы строки *In*

```
while ( In[k] != '\0' ) {
```

// 1. Если символ – буква, заносим ее в *Out*

```
if ( In[k] >= 'a' && In[k] <= 'z' )
```

```
    Out[l++] = In[k];
```

// 2. Если «(», записываем ее в стек

```
if ( In[k] == '(' )
```

```
    Op = InS ( Op, In[k] );
```

/* 3. Если «)», извлекаем из стека в строку *Out*
все операции до открывающей скобки */

```
if ( In[k] == ')' ) {
```

```
    while ( (Op -> c) != '(' ) {
```

```
// Считываем элемент a из стека
```

```
    Op = OutS ( Op, &a );
```

```
    !Op ) a = '\0';
```

```
if (
```

```
// и записываем его в строку Out.
```

```
    Out[l++] = a; }
```

// Удаляем из стека открывающую скобку

t = Op;

Op = Op -> next;

delete t;

}

```

/* 4. Если операция, извлекаем из стека в Out опе-
рации с большим или равным приоритетом */
if (In[k]== '+' || In[k]== '-' || In[k]== '*' || In[k]== '/') {
    while ( Op != NULL &&
        Prior (Op -> c) >= Prior (In[k])) {
        Op = OutS (Op, &a);
        Out[l++] = a;
    }
// Текущий символ – в стек
    Op = InS (Op, In[k]);
}
k++;
} // Конец цикла анализа входной строки

```


/* 5. Если стек не пуст, переписываем все операции в выходную строку */

```
while ( Op != NULL) {
```

```
    Op = OutS (Op, &a);
```

```
    Out[l++] = a;
```

```
}
```

```
Out[l] = '\0';
```

```
cout << "\n Polish = " << Out << endl;
```

```
getch();
```

```
}
```

//----- Реализация приоритета операций -----

```
int Prior ( char a ) {  
    switch ( a ) {  
        case '*': case '/': return 3;  
        case '-': case '+':   return 2;  
        case '(': return 1;  
    }  
    return 0;  
}
```

// ----- Добавление элемента в стек -----

```
Stack* InS ( Stack *p, char s)
```

```
{
```

```
    Stack *t = new Stack;
```

```
    t->c = s;
```

```
    t->next = p;
```

```
    return t;
```

```
}
```

// ----- Извлечение элемента из стека -----

Stack* *OutS* (Stack *p, char *s)

{

Stack *t = p;

*s = p -> c;

p = p -> next;

delete t;

return p;

}

Рассмотрим пример, реализованный в методичке для оконного приложения:

The screenshot shows a window titled "Польская запись" (Polish notation). On the left is a table with two columns: "Имя" (Name) and "Знач." (Value). The table contains the following data:

Имя	Знач.
a	1
b	2
c	4
d	1,5
e	2
f	2,25
g	7

In the center, there are two input fields. The top one is labeled "Введите выражение" (Enter expression) and contains the infix expression $a+b*(c-d)/e+f$. The bottom one is labeled "Полученная ОПЗ" (Obtained postfix notation) and contains the postfix expression $abcd-*e/+f+$.

On the right side, there are two buttons: "Перевести" (Convert) and "Посчитать" (Calculate). The "Посчитать" button has a dashed border.

At the bottom, there is a label "Результат" (Result) next to a text box containing the value "5,75".

```
struct Stack {  
    char info;  
    Stack *next;  
} *begin;  
  
int Prior (char);  
Stack* InStack ( Stack*, char);  
Stack* OutStack ( Stack*, char*);  
double Rezult (String);  
double mas[201]; // Массив для вычисления  
Set < char, 0, 255 > znak;  
// Множество символов-знаков  
int Kol = 10;
```

//----- Текст функции-обработчика *FormCreate* -----

```
Edit1->Text = "a+b*(c-d)/e";  
Edit2->Text = "";  
char a = 'a';  
StringGrid1->Cells[0][0] = "Имя";  
StringGrid1->Cells[1][0] = "Знач.";  
for (int i = 1; i <= Kol; i++) {  
    StringGrid1->Cells[0][i] = a++;  
    StringGrid1->Cells[1][i] = i;  
}
```

```
// ---- Текст обработчика кнопки Перевести ----  
Stack *t;  
begin = NULL;  
char ss, a;  
String InStr, OutStr;  
OutStr = "";  
Edit2->Text = "";  
InStr = Edit1->Text;  
znak << '*' << '/' << '+' << '-' << '^';  
int len = InStr.Length(), k;
```



```
for (k = 1; k <= len; k++) {
```

```
    ss = InStr[k];
```

```
// ----- ПУНКТ 1 алгоритма -----
```

```
    if (ss >= 'a' && ss <= 'z' )
```

```
        OutStr += ss;
```

```
// ----- ПУНКТ 2 алгоритма -----
```

```
    if ( ss == '(' )
```

```
        begin = InStack ( begin, ss);
```

// ----- ПУНКТ 3 алгоритма -----

```
if ( ss == ')' ) {
```

```
    while ( (begin -> info) != '(' ) {
```

```
        begin = OutStack ( begin, &a );
```

```
        OutStr += a;
```

```
    }
```

```
    begin = OutStack ( begin, &a );
```

```
}
```

// ----- Пункт 4 алгоритма -----

if (znak.*Contains* (ss)) {

while (begin != NULL &&

Prior (begin->info) >= *Prior* (ss)) {

begin = *OutStack* (begin, &a);

OutStr += a;

}

begin = *InStack* (begin, ss);

} // Конец оператора *if*

} // Конец оператора *for*

```
// ----- Пункт 5 алгоритма -----
```

```
while ( begin != NULL) {
```

```
    begin = OutStack ( begin, &a );
```

```
    OutStr += a;
```

```
}
```

```
Edit2 -> Text = OutStr;
```

```
// Выводим полученную строку
```

```
}
```

//---- Текст обработчика кнопки *Посчитать* ----

```
char ch;
```

```
String OutStr = Edit2 -> Text;
```

```
for ( int i = 1; i <= Kol; i++) {
```

```
    ch = StringGrid1 -> Cells[0][i][1];
```

```
    mas[int(ch)] = StrToFloat(SG1->Cells[1][i]);
```

```
}
```

// **SG** это *StringGrid*

```
Edit3->Text=FloatToStr( Rezult ( OutStr ) );
```

//-- Функция реализации приоритета операций --

```
int Prior ( char a ) {  
    switch ( a ) {  
        case '^':          return 4;    // !!!  
        case '*': case '/': return 3;  
        case '-': case '+': return 2;  
        case '(':          return 1;  
    }  
    return 0;  
}
```

//----- Расчет арифметического выражения -----

```
double Rezult(String Str)
{
    char ch, ch1, ch2, chr;
    double op1, op2, rez;
    znak << '*' << '/' << '+' << '-' << '^';
    chr = 'z' + 1;
    for (int i=1; i <= Str.Length(); i++) {
        ch = Str[i];
```

```
if (! znak.Contains (ch) )
    begin = InStack ( begin, ch );
else {
    begin = OutStack ( begin, &ch1 );
    begin = OutStack ( begin, &ch2 );
    op1 = mas[int (ch1)];
    op2 = mas[int (ch2)];
}
```



```
switch (ch) {
    case '+': rez = op2 + op1;      break;
    case '-': rez = op2 - op1;      break;
    case '*': rez = op2 * op1;      break;
    case '/': rez = op2 / op1;      break;
    case '^': rez = pow(op2,op1);   break;
}
mas[int (chr)] = rez;
begin = InStack ( begin, chr);
chr++;
} // Конец else
} // Конец оператора for
return rez;
}
```