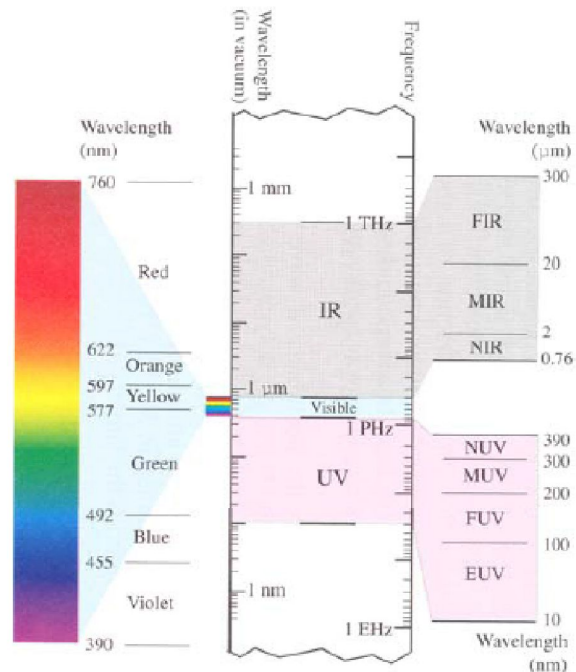


**Лекция 3:**  
**Волновая оптика**  
*Дифракция*  
*Фурье оптика*

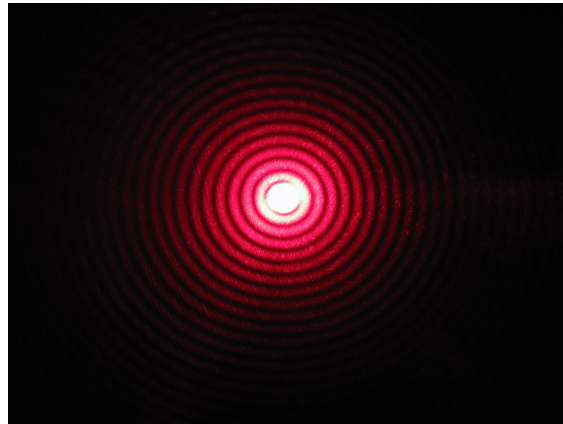
# Волновая оптика

- Свет описывается как скалярная волновая функция (решение волнового уравнения)
- Длина волны порядка размеров объектов



# Дифракция света

- Дифракция волн (лат. diffractus — буквально разломанный, переломанный) — явление, которое можно рассматривать как отклонение от законов геометрической оптики при распространении волн.
- Первоначально понятие дифракции относилось к огибанию волнами препятствий, но в современном, более широком толковании, с дифракцией связывают весьма широкий круг явлений, возникающих при распространении волн в неоднородных средах, а также при распространении ограниченных в пространстве волн.
- Дифракция тесно связана с явлением интерференции. Более того, само явление дифракции зачастую трактуют как частный случай интерференции (интерференция вторичных волн).

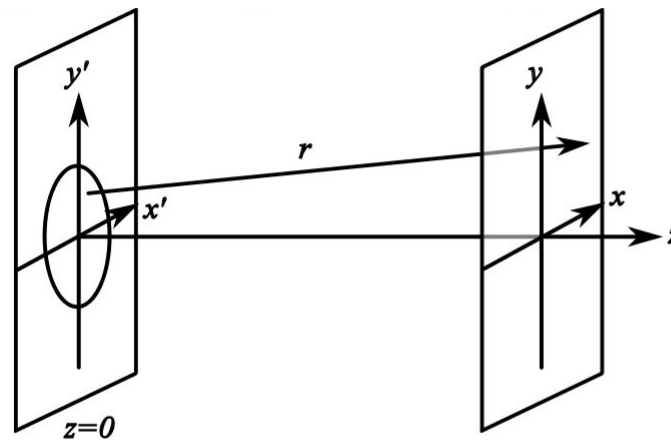
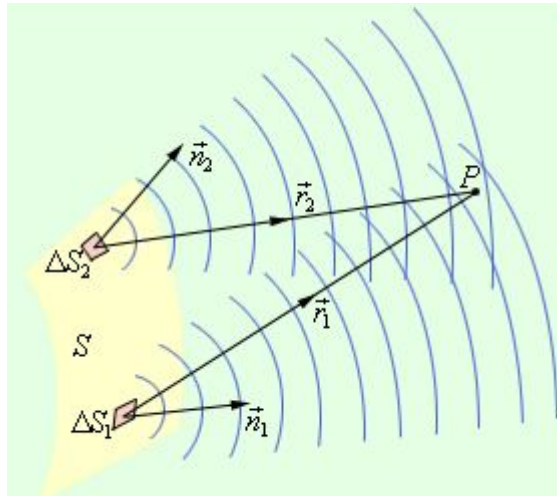


# Теория дифракции

## Принцип Гюйгенса Френеля

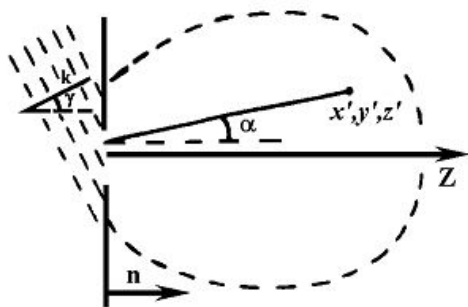


Огюстен Жан Френель



Предполагается что амплитуда волны в отверстии такая же как и при отсутствии экрана, т.е. существенна только форма отверстия.

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0$$



$$\int_V (\Psi\Delta\chi - \chi\Delta\Psi)dV = -\int_S \left( \Psi\frac{\partial\chi}{\partial n} - \chi\frac{\partial\Psi}{\partial n} \right) dS$$

$$\chi = \frac{1}{r} \exp(ikr)$$

Интеграл Кирхгофа

$$\Psi = \int_{slit} \frac{i}{r\lambda} \Psi' e^{-ikr} dslit$$

# Дифракция Френеля

$$z \gg |(x - x')| \quad \rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = z\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{z^2}}$$

$$r = z\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{z^2}} = z \left[ 1 + \frac{\rho^2}{2z^2} - \frac{1}{8} \left( \frac{\rho^2}{z^2} \right)^2 + \dots \right] = z + \frac{\rho^2}{2z} - \frac{\rho^4}{8z^3} + \dots$$

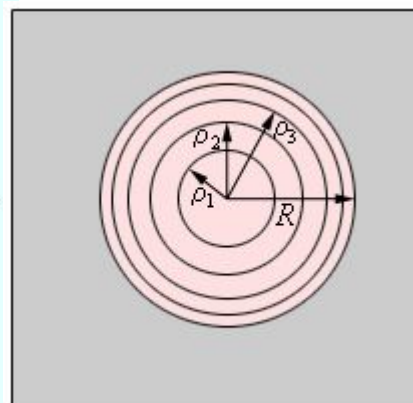
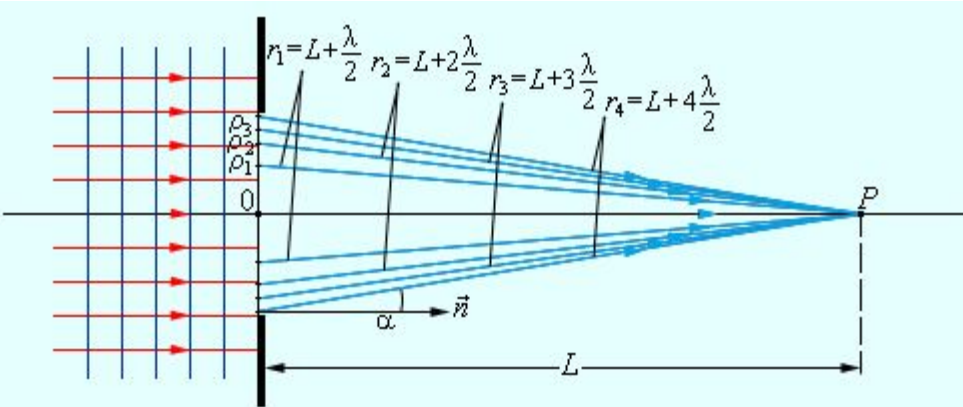
$$k \frac{\rho^4}{8z^3} \ll 2\pi, \quad \frac{\rho^4}{z^2 \lambda^2} \ll 8 \frac{z}{\lambda} \quad F = \frac{\rho^2}{z\lambda} \geq 1 \quad \text{Число зон Френеля}$$

$$\Psi = \int_{slit} \frac{i}{r\lambda} \Psi' e^{-ikr} dslit = \Psi' \sqrt{\frac{i}{z\lambda}} e^{-\frac{ikx^2}{2z}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{\frac{ikxx'}{z}} e^{-\frac{ikx'^2}{2z}} dx'$$

# Дифракция на круглом отверстии

Метод разбиения волнового фронта на зоны Френеля

$$\rho_m = \sqrt{r_m^2 - L^2} = \sqrt{m\lambda L + m^2 \frac{\lambda^2}{4}} \approx \sqrt{m\lambda L}$$



$$m = \frac{R^2}{\lambda L}$$

$$L = 1 \text{ м}, \lambda = 600 \text{ нм}$$

$$\rho_1 = \sqrt{L\lambda} \approx 0,77 \text{ мм.}$$

$$m = \frac{R^2}{L\lambda} \geq 1 \text{ или } R^2 \geq L\lambda.$$

Условие наблюдения дифракции Френеля

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots + A_i$$

$$\Delta S_i = S_i - S_{i-1} = \frac{\pi R L \lambda}{R + l} (i - i + 1) = \frac{\pi R L \lambda}{R + l}$$

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_i > \dots$$

$$A = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots = \frac{A_1}{2}$$

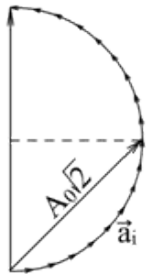
$$m = \frac{R^2}{L\lambda} \gg 1 \text{ или } R^2 \gg L\lambda.$$

Геометрическая оптика

# Графический метод сложения амплитуд

## Спираль Френеля

а) I зона Френеля открыта



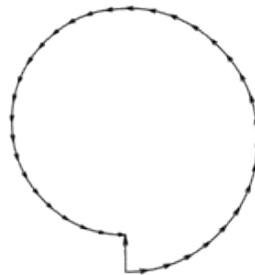
$$\vec{A}_{\text{рез}} = \vec{A}_1; A_1 = 2A_0; I \approx 4I_0$$

б) II зона Френеля открыта



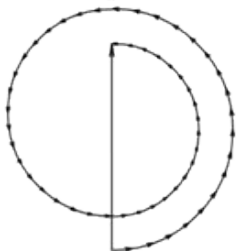
$$\vec{A}_{\text{рез}} = \vec{A}_2; A_2 \approx 2A_0; I \approx 4I_0$$

в) I и II зоны Френеля открыты



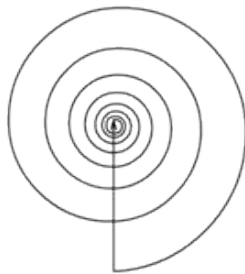
$$\vec{A}_{\text{рез}} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2; A_{\text{рез}} \approx 0; I \approx 0$$

г) I, II и III зоны Френеля открыты



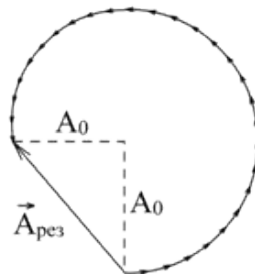
$$\vec{A}_{\text{рез}} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3; A_{\text{рез}} \approx A_1; I \approx 4I_0$$

д) Полностью открытый фронт

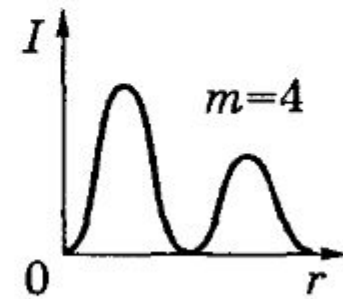
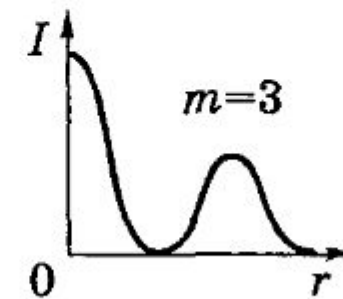
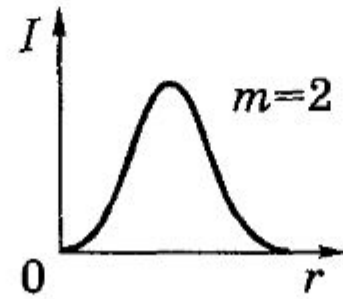
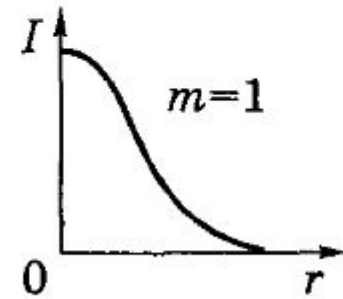


$$\vec{A}_{\text{рез}} = \vec{A}_0; I = I_0$$

е) открыты полторы зоны Френеля



$$A_{\text{рез}} = A_0\sqrt{2}; I = 2I_0$$



Пятно Пуассона

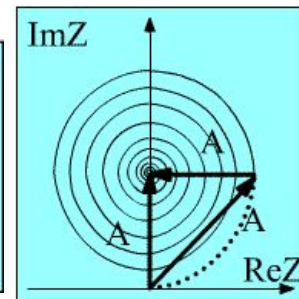
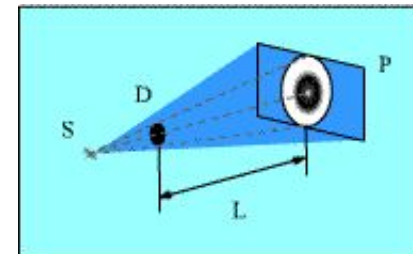
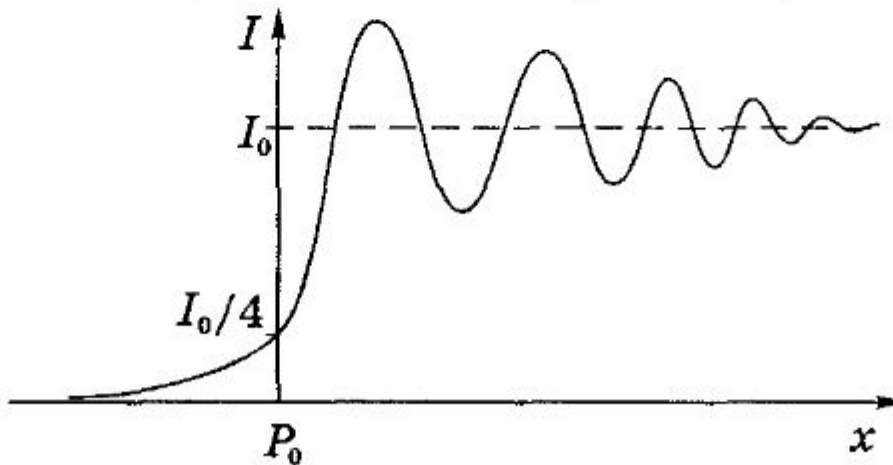
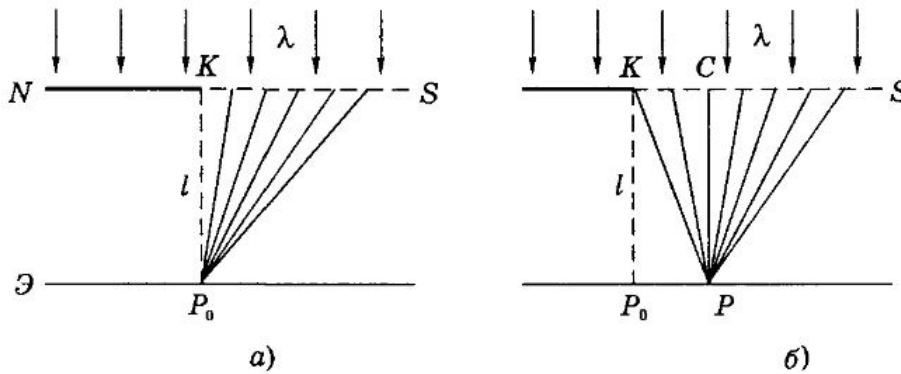
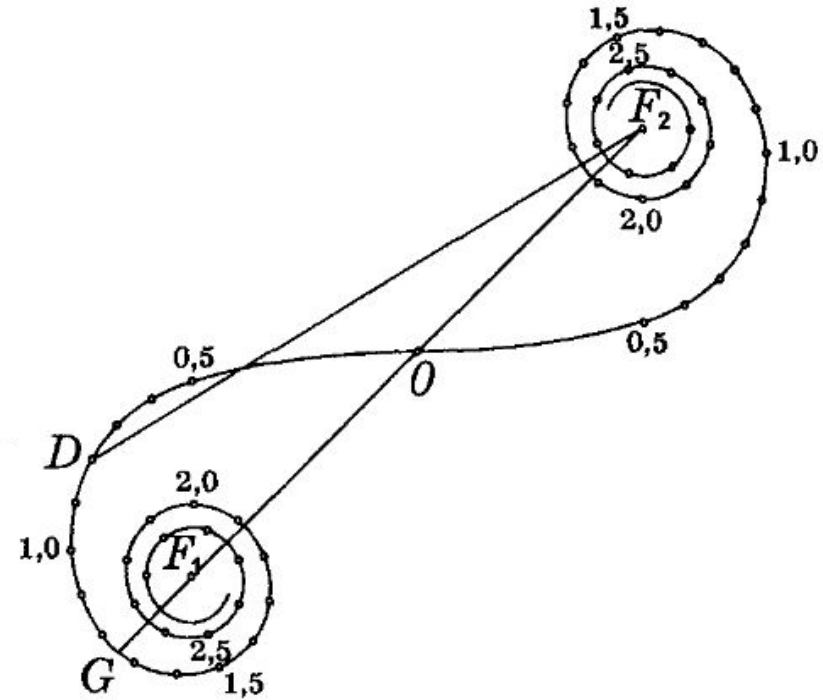


Рис. 4

# Дифракция на полуплоскости и щели



Спираль Корню



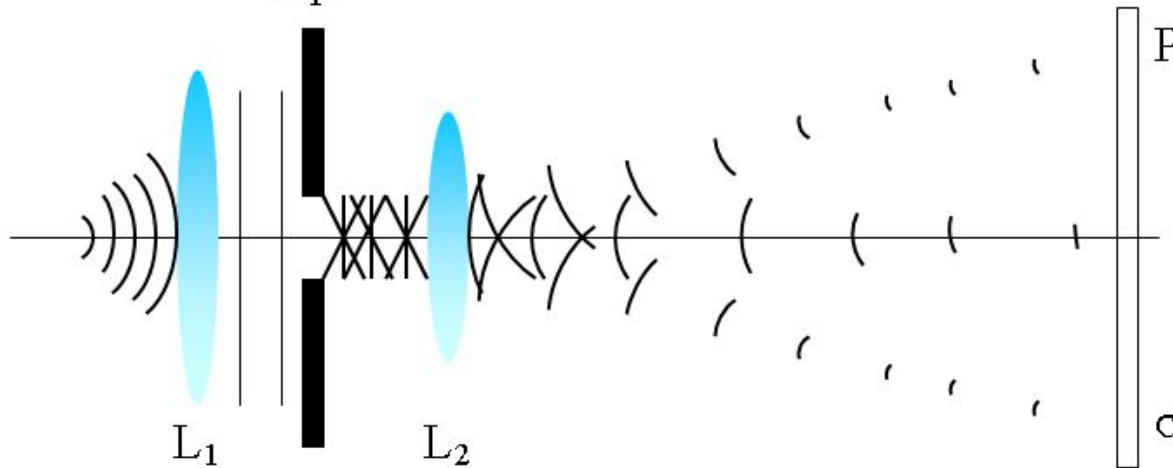


# Дифракция Фраунгофера

$$F = \frac{\rho^2}{z\lambda} \ll 1$$

- Свет, распространяющийся в направлениях, отличных от первоначального направления распространения.
- Распределение его интенсивности на очень большом (в пределе – бесконечно большом) расстоянии

Ар.      Можно использовать линзу



$$U(x, y) = \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} u(x', y') e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x'x+y'y)} dx' dy'.$$

# Дифракция на щели

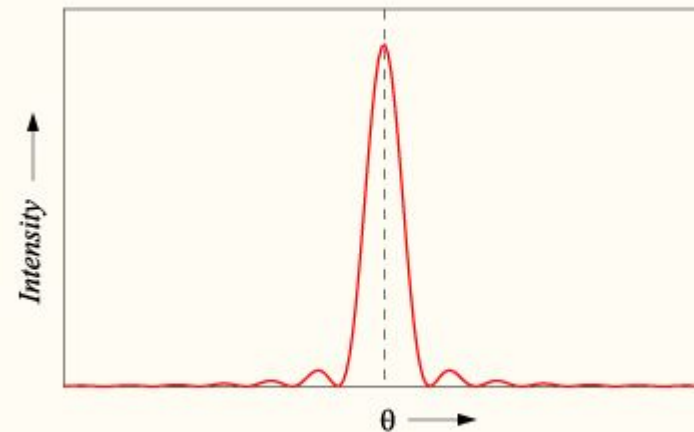
$$\Psi = \frac{i\Psi'}{z\lambda} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik \left[ z + \frac{(x-x')^2 + y'^2}{2z} \right]} dx' dy' = \frac{i\Psi'}{z\lambda} e^{-ikz} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ik \left[ \frac{(x-x')^2}{2z} \right]} dx' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik \left[ \frac{y'^2}{2z} \right]} dy'$$

$$e^{-\frac{ikx'^2}{2z}} \approx 1 \quad C = \Psi' \sqrt{\frac{i}{z\lambda}} \quad \Psi = C \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{\frac{ikxx'}{z}} dx' = C \frac{\left( e^{\frac{ikax}{2z}} - e^{-\frac{ikax}{2z}} \right)}{\frac{ikx}{z}} \quad \sin \theta = \frac{x}{z}$$

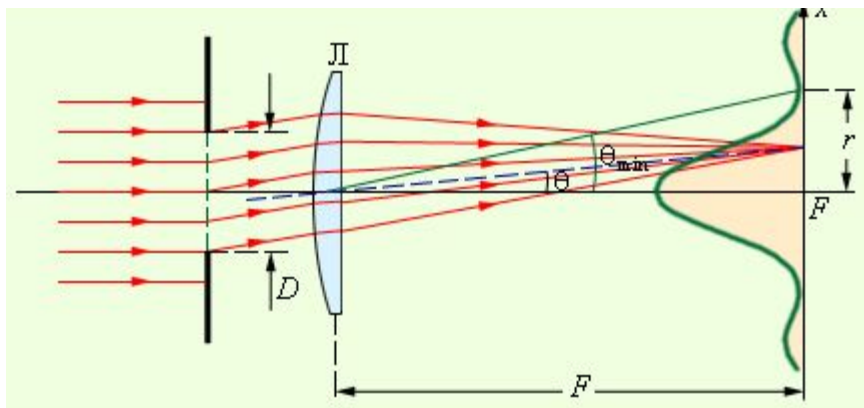
$$\Psi = aC \frac{\sin \frac{ka \sin \theta}{2}}{\frac{ka \sin \theta}{2}} = aC \left[ \text{sinc} \left( \frac{ka \sin \theta}{2} \right) \right]$$

$$I(\theta) = I_0 \left[ \text{sinc} \left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right) \right]^2$$

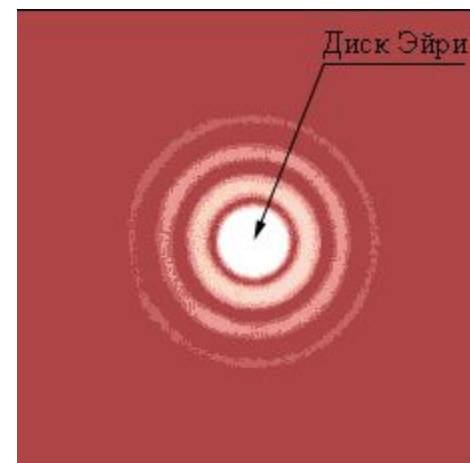
Single-slit diffraction pattern



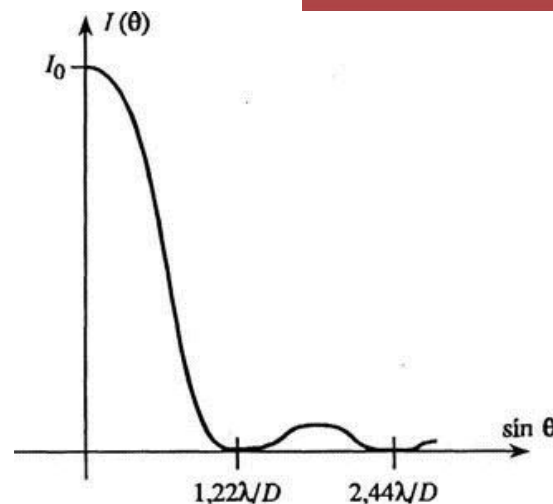
# Дифракция на круглом отверстии



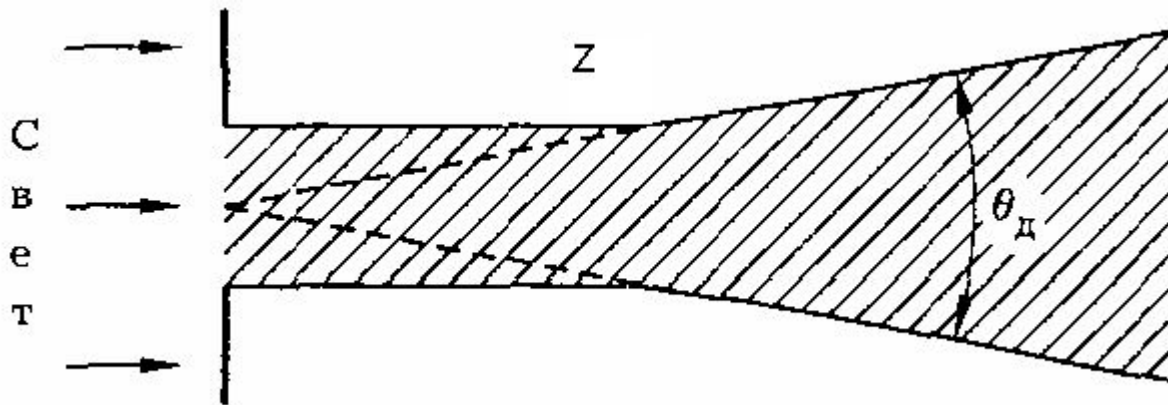
$$r = 1,22 \frac{\lambda}{D} F.$$



$$I(\theta) = I_0 \left[ \frac{2J_1\left(\frac{kD \sin \theta}{2}\right)}{\frac{kD \sin \theta}{2}} \right]^2.$$



# Дифракционная расходимость

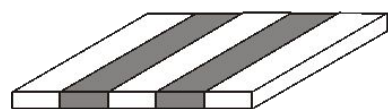


Лазерный пучок  $D_0 = 2$  мм,  $L = 100$  м  
 $D \approx D_0 + 2\lambda L/D_0 = 2 + 50 \approx 5$  см.

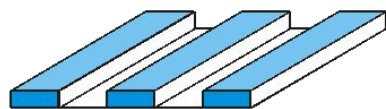
# Дифракционные оптические элементы

**Основные идеи:** использование явления дифракции; сведения фазы к интервалу  $[0, 2\pi)$ ; квантование фазы

Дифракционная решетка Фраунгофера

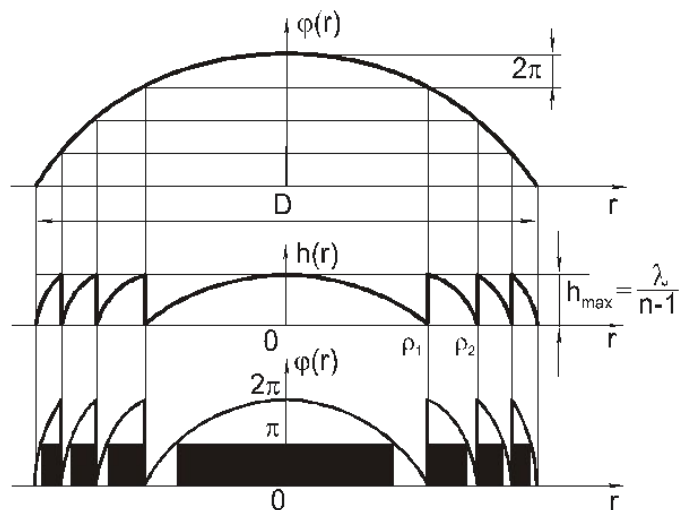


Амплитудная маска



Фазовый микрорельеф

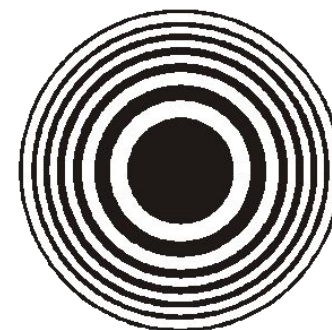
Линза Френеля



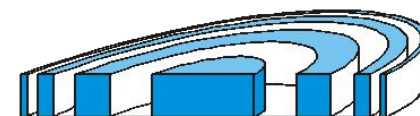
Базовые характеристики ДОЭ:

- длина волны  $\lambda$ ;
- границы зон;
- профиль зон.

Зонная пластинка Релея-Сорэ



Амплитудная маска



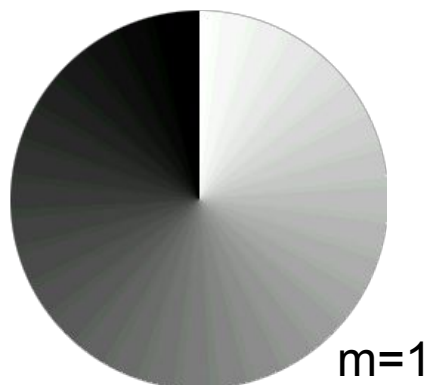
Фазовый микрорельеф

# Бессель-оптика и сингулярная оптика

Функция фазы терпит  $m$  разрывов первого рода,  $m$  – порядок ДОЭ

**Винтовой  
фазовый ДОЭ**

$$\exp(im\varphi)$$



1. Березный А.Е., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. *Бессель-оптика* // ДАН, 1984.
2. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Shinkaryev M.V., Soifer V.A., Uspleniev G.V., *The phase rotor filter* // J. Modern Optics, 1992

**Винтовая  
зонная пластина**

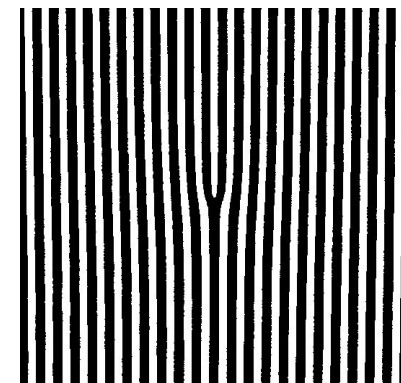
$$\text{sgn}[\cos(m\varphi + kr^2)]$$



1. Heckenberg N.R. et al. *Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms* // Opt. Lett., 1992

**Решетка  
с «вилкой»**

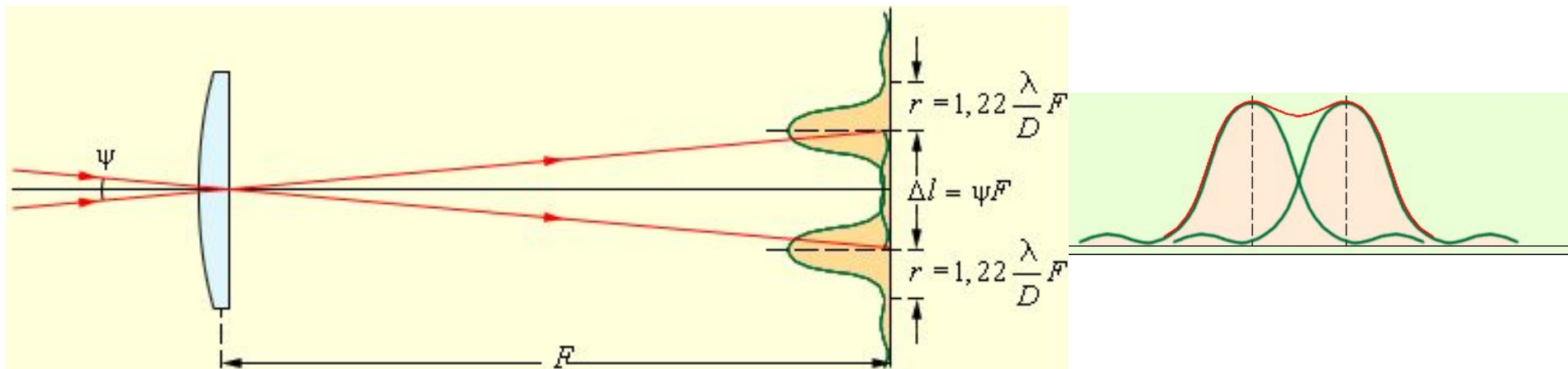
$$\text{sgn}[\cos(m\varphi + \alpha x)]$$



1. Bazhenov V.Yu., Soskin M.S., Vasnetsov M.V. *Screw dislocations in light wavefronts* // J. of Mod. Opt., 1992

# Разрешающая способность

## Критерий Рэля



$$\Delta l_{\min} = \psi_{\min} \cdot F = 1,22 \frac{\lambda}{D} F \quad \text{или} \quad \psi_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

### Разрешающая способность глаза

$d = 3 \text{ мм} \rightarrow$

$$\theta_{\min} = 1,22 \lambda / d = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 1'$$

# Дифракционный предел

Минимально возможный размер светового пятна, которое можно получить, фокусируя свет заданной длины волны в среде с показателем преломления  $n$ :

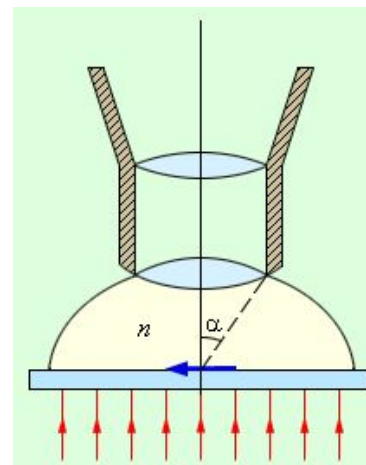


Эрнст Аббе 1873

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2n}$$



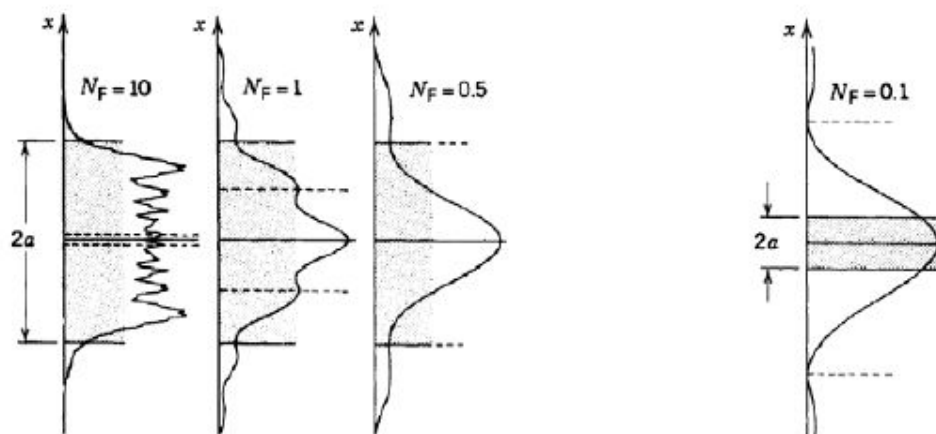
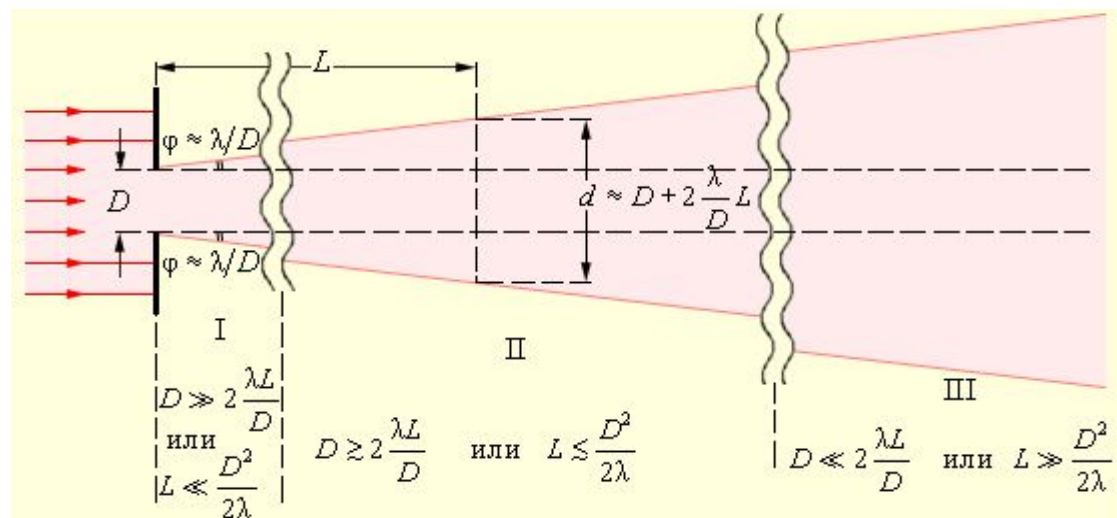
Для микроскопа



$$l_{\min} = \frac{0,61\lambda}{n \sin \alpha}$$

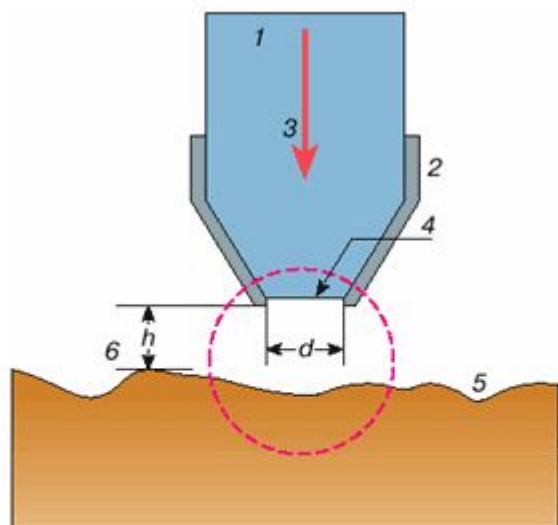


# Дифракционные зоны

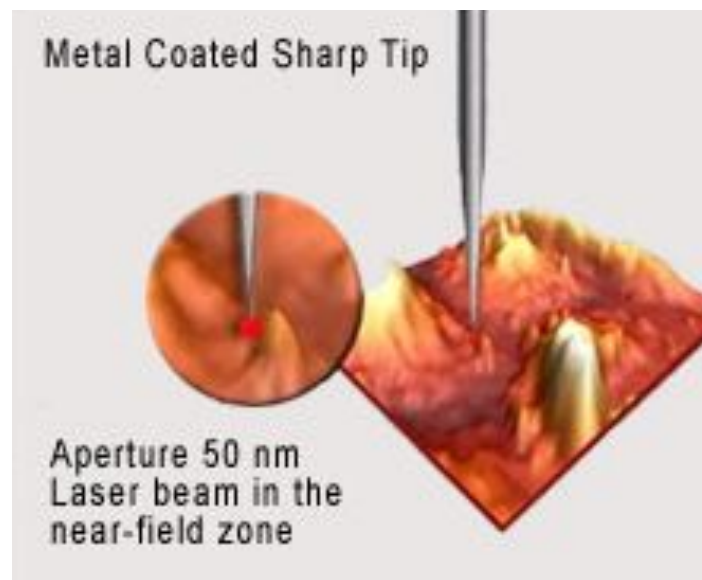


# Ближнеполюсная оптика

Дифракция на отверстиях меньше длины волны  
(волновая оптика не работает)

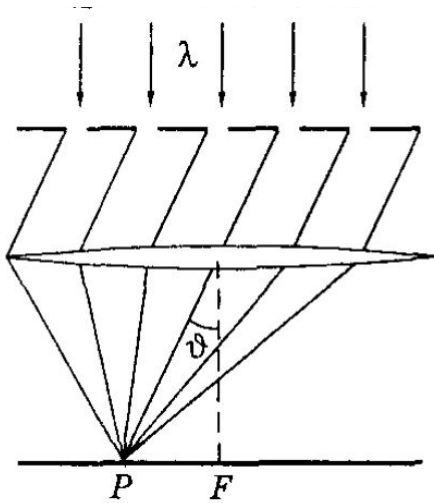


**Рис. 1.** Схема волоконно-оптического ближнеполюсного зонда: 1 – заостренное оптическое волокно; 2 – металлическое покрытие; 3 – проходящее через зонд излучение; 4 – выходная апертура зонда,  $d \ll \lambda$ ; 5 – поверхность исследуемого образца; 6 – расстояние между исследуемой поверхностью и апертурой зонда,  $h \ll \lambda$ . Штрихами очерчена область ближнеполюсного контакта

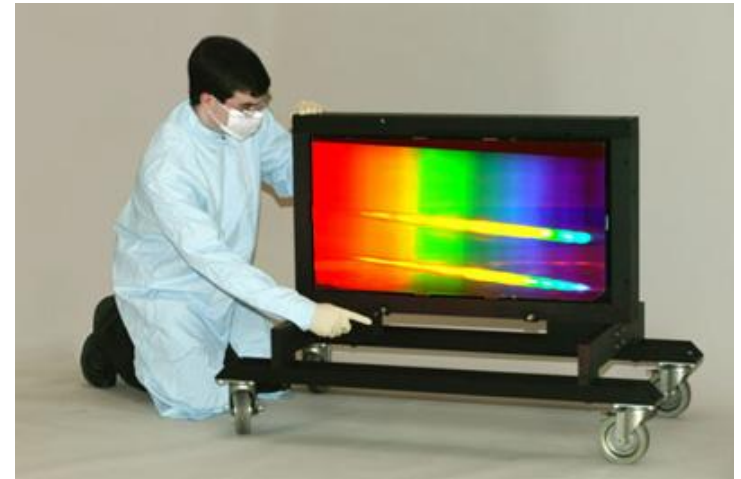
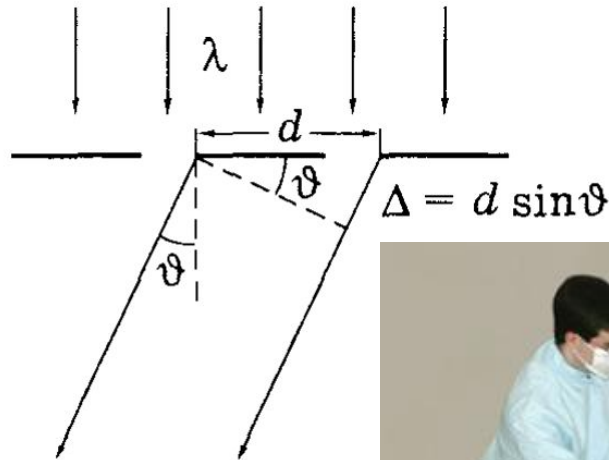


# Дифракционная решетка

a)

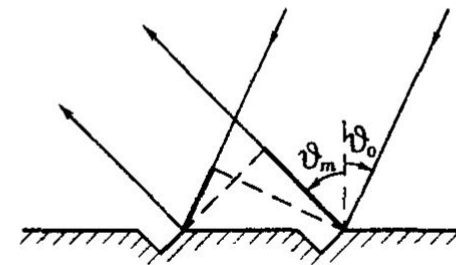


б)



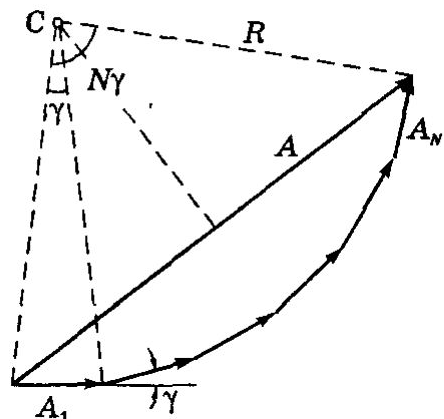
Главные максимумы

$$d \sin \vartheta_m = \pm m \lambda, \quad m=0, 1, 2, \dots$$



$$d(\sin \vartheta_m - \sin \vartheta_0) = \pm m \lambda.$$

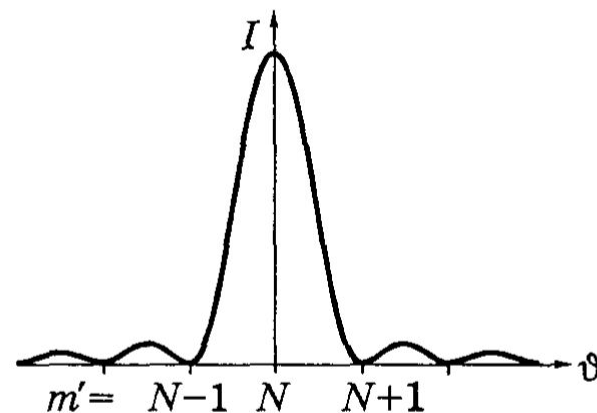
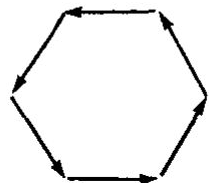
# Дифракционная решетка



Условие минимумов

$$d \sin \vartheta = \pm \frac{m'}{N} \lambda.$$

$$m' \neq 0, N, 2N, \dots$$



Угловая ширина  
главных максимумов

$$\delta \vartheta = \frac{\lambda}{Nd \cos \vartheta} = \frac{\lambda}{h \cos \vartheta}$$

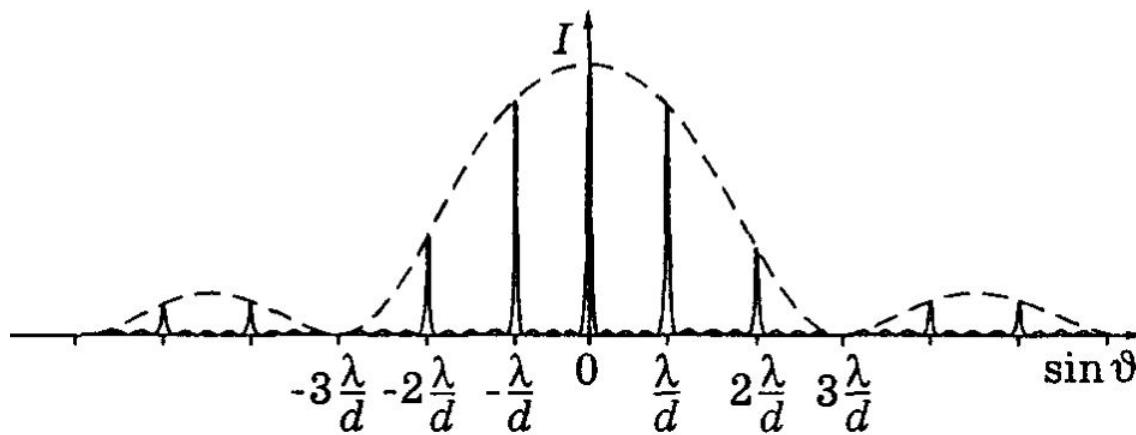
## Дифракционные минимумы

$$b \sin \vartheta_m = \pm m \lambda, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$b$  — ширина каждой щели

$$I = I_0 \frac{\sin^2(\delta/2)}{(\delta/2)^2} \cdot \frac{\sin^2(N\gamma/2)}{\sin^2(\gamma/2)}$$

$$\delta = 2\pi b \sin \vartheta / \lambda, \quad \gamma = 2\pi d \sin \vartheta / \lambda.$$



# Грешетка как спектральный прибор

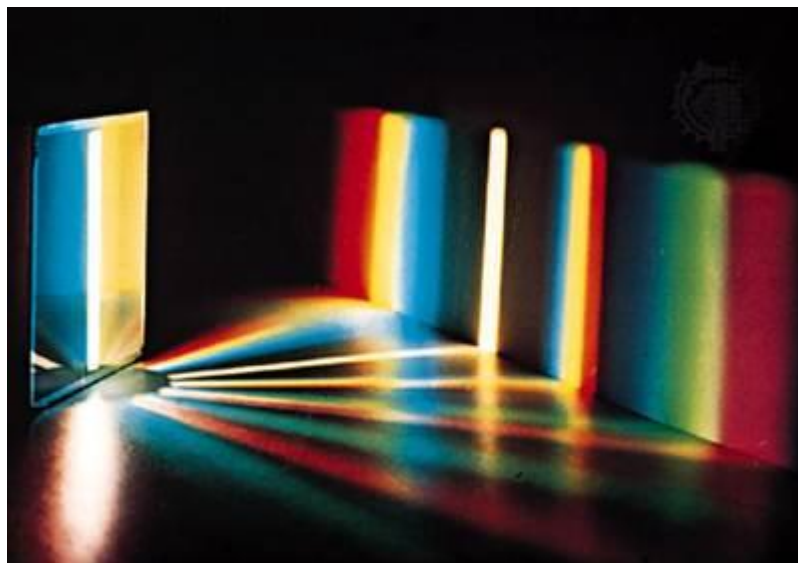
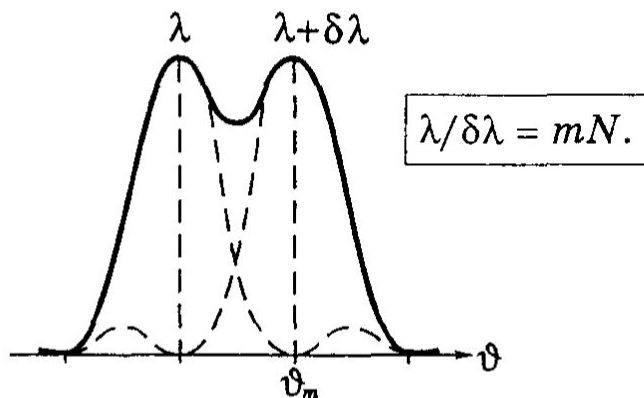
Угловая дисперсия

$$\frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \vartheta}.$$

Область дисперсии

$$\Delta\lambda = \lambda/m.$$

Разрешающая способность



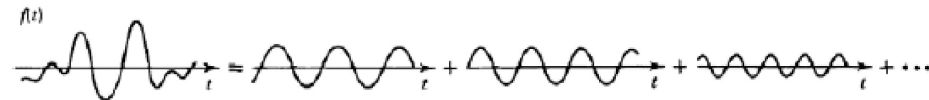
# Фурье оптика



ФУРЬЕ Жан Батист Жозеф  
(1768-1830)

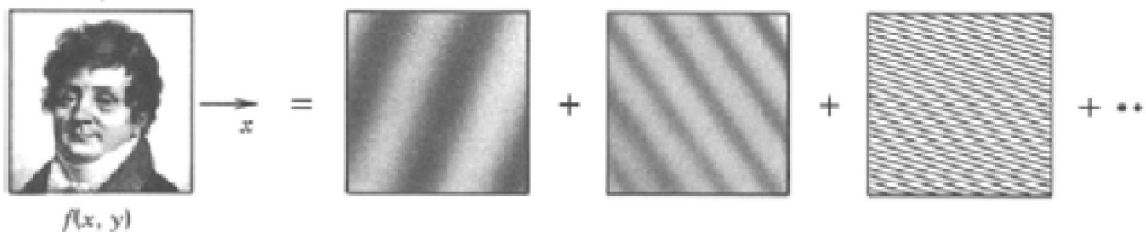
- Гармонический анализ (Преобразование Фурье)
  - Представление произвольной функции  $f(t)$  (волнового фронта) в виде гармонических функций различных частот  $\nu$  (пространственных частот)

$$f(t) = \int F(\nu) \cdot \exp(j2\pi \cdot \nu \cdot t) d\nu$$



- Линейная система
  - Отклик системы на гармоническую функцию известен
- Двумерное преобразование Фурье в пространственных координатах. Волны считаем монохроматическими.

$$f(x, y) = \int F(\nu_x, \nu_y) \cdot \exp(j2\pi \cdot (\nu_x + \nu_y) \cdot t) d\nu_x d\nu_y$$

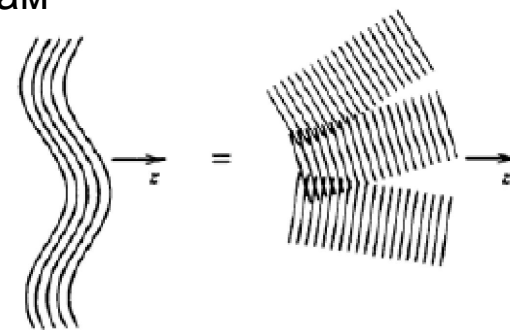


# Фурье оптика

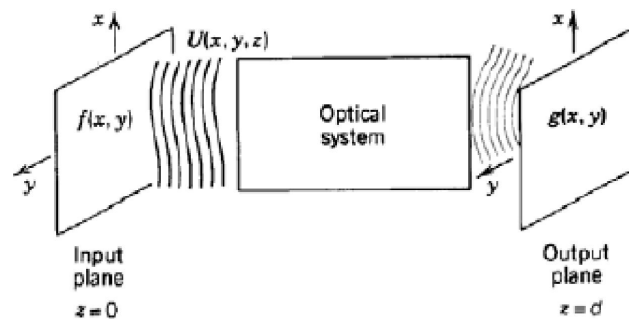
- Плоские волны играют роль гармонических функций
  - Произвольная волна раскладывается по плоским волнам

$$U(x, y, z) = A \exp(-j(k_x x + k_y y + k_z z))$$
$$z = 0; U(x, y, 0) = f(x, y) = A \exp(-j(v_x x + v_y y))$$

$$v_x = \frac{k_x}{2\pi}; v_y = \frac{k_y}{2\pi}$$



- Линейная система характеризуется импульсным откликом и **функцией пропускания** (отклик на гармоническую функцию)



# Свободное пространство

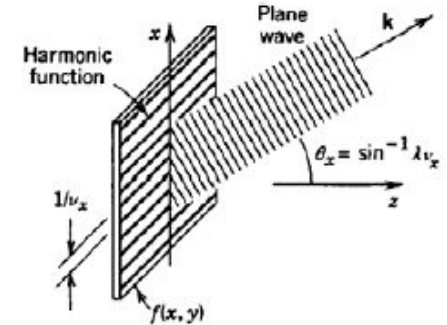
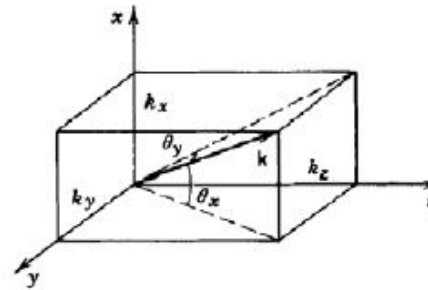
$$U(x, y, z) = A \exp(-j(k_x x + k_y y + k_z z));$$

$$k = (k_x, k_y, k_z); |k| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\theta_x = \arg \sin\left(\frac{k_x}{|k|}\right); \theta_y = \arg \sin\left(\frac{k_y}{|k|}\right)$$

$$U(x, y, 0) = f(x, y) = A \exp(-j(v_x x + v_y y));$$

$$v_x = \frac{k_x}{2\pi}; v_y = \frac{k_y}{2\pi};$$



$$\theta_x = \arg \sin(\lambda \cdot v_x);$$

$$\theta_y = \arg \sin(\lambda \cdot v_y)$$

Параксиальном приближении  $k_x \ll |k|; k_y \ll |k| \Rightarrow \theta_x \approx \lambda v_x; \theta_y \approx \lambda v_y$

По распределению амплитуды можно определить волновые функции плоских волн (**если известна длина волны**)

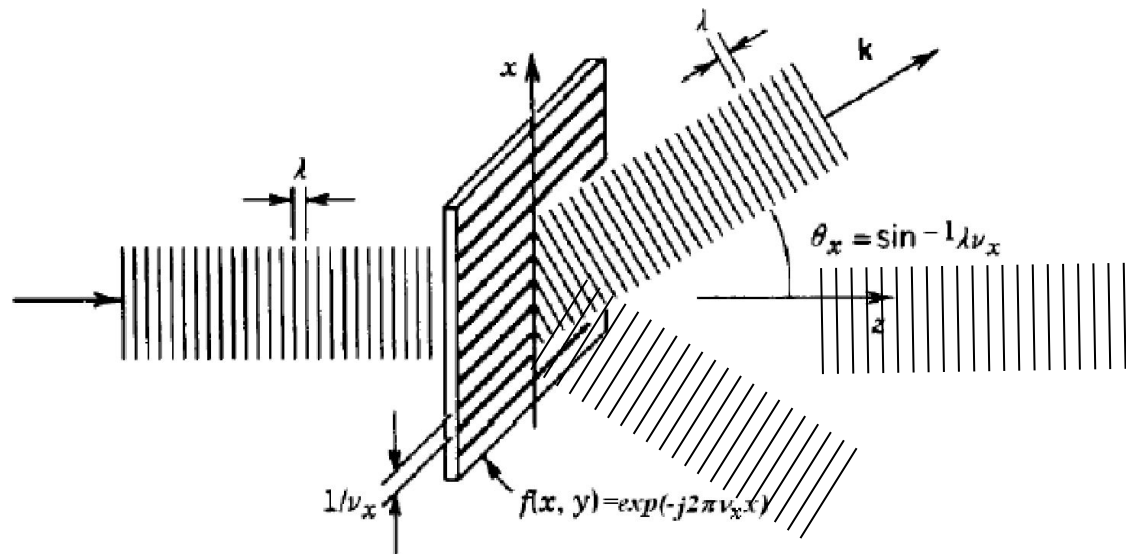
$$U(x, y, z) = f(x, y) \exp(-j \cdot k_z z);$$

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - (k_x^2 + k_y^2)}$$



# Дифракционная решетка

$$f(x, y) = 1 + \cos(2\pi \cdot \nu_x x) = 1 + \frac{\exp(-j\nu_x x) + \exp(j\nu_x x)}{2}$$



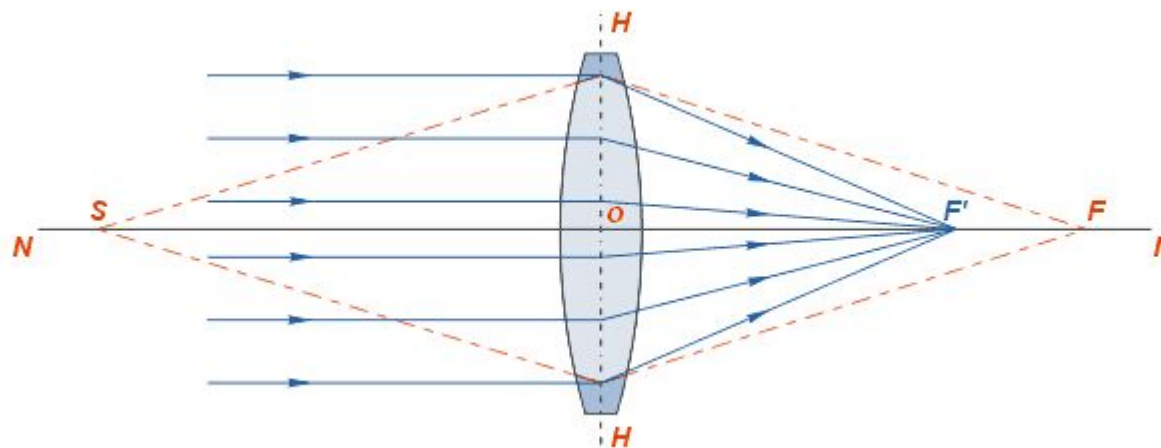
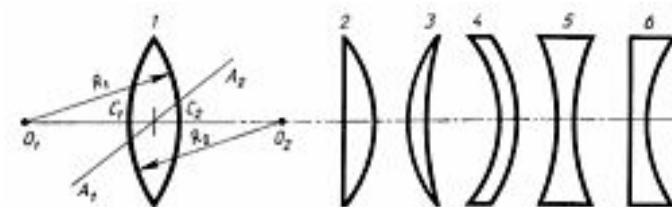
$$\theta_x \approx \lambda \nu_x$$

# Сферическая линза

$$f(x, y) = \exp\left[j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda \cdot F}\right] = \exp[-j2\pi\varphi(x, y)]$$

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2\lambda \cdot F} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{x}{\lambda \cdot F} \\ v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{\lambda \cdot F} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_x = -\frac{x}{F} \\ \theta_y = -\frac{y}{F} \end{cases}$$

Линзы

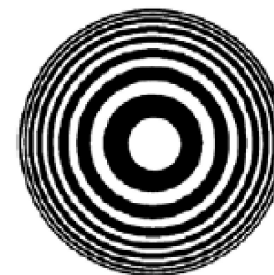


# Зонная пластика Френеля

$$f(x, y) = \begin{cases} 1; \cos\left(\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda \cdot F}\right) > 0 \\ 0; \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f(x, y) = \sum_q C_q \cos\left(q\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda \cdot F}\right), q = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

$$\cos\left(q\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda \cdot F}\right) = \frac{\exp\left(jq\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda \cdot F}\right) + \exp\left(-jq\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda \cdot F}\right)}{2}$$



Зонная пластинка работает как сферическая линза со множеством фокусов  $\pm F, \pm F/2 \dots$  (высшие порядки дифракции), которые зависят от длины волны  $F \sim 1/\lambda$

В линзе Френеля используется квадратичная модуляция фазы



# Передаточная функция

Свободное пространство

$$f(x, y) = U(x, y, 0); g(x, y) = U(x, y, d)$$

Линейная функция инвариантная к сдвигу системы координат

$$H(v_x, v_y) = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} = \frac{A \exp(-j(k_x x + k_y y + k_z d))}{A \exp(-j(k_x x + k_y y))} = \exp(-j k_z d)$$

$$H(v_x, v_y) = \exp\left(-j 2\pi d \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - v_x^2 - v_y^2}\right)$$

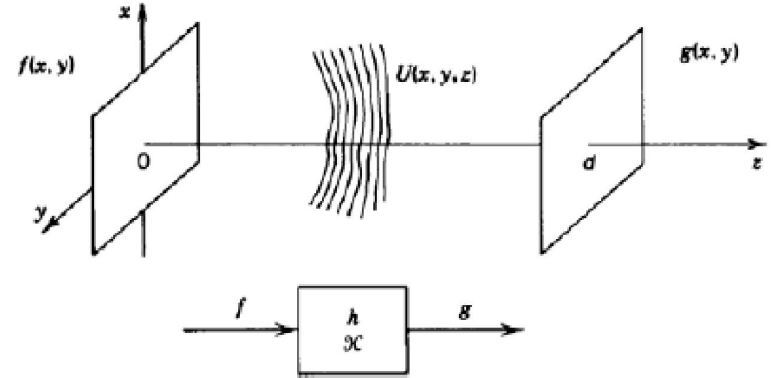
Плоские волны с пространственными частотами  $v_x^2 + v_y^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}$  испытывают набег фазы при распространении, с более высокими частотами затухают

Детали с размерами менее длины волны не могут быть переданы линейной оптической системой на расстояние более длины волны (**предел разрешения**)

Произвольная оптическая система

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(v_x, v_y) \cdot H(v_x, v_y) \exp(j 2\pi(v_x x + v_y y)) dv_x dv_y$$

$$F(v_x, v_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-j 2\pi(v_x x + v_y y)) dx dy$$



# Фурье преобразование

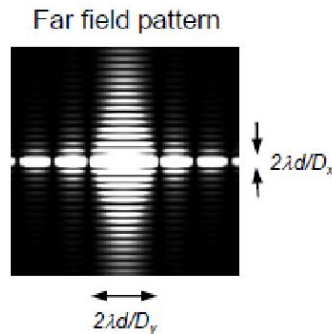
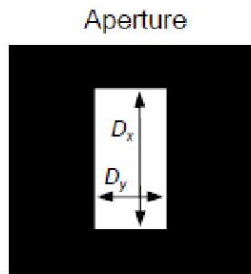
Свободное пространство  
Приближение Фраунгофера

$$\left. \begin{aligned} v_x &= x/\lambda d \\ v_y &= y/\lambda d \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(x, y) \approx h_0 F\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right)$$

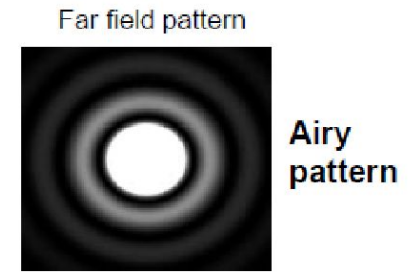
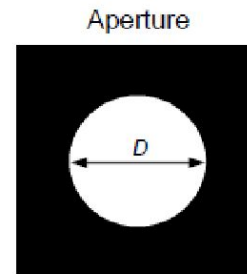
Одна плоская волна соответствует каждой точке  
Нет вклада других волн из-за деструктивной интерференции

Дифракция Фраунгофера

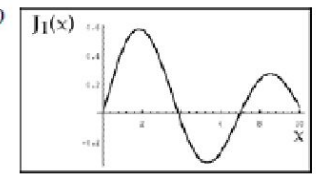
$$I(x, y) = \frac{I_i}{(\lambda d)^2} F\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right)$$



$$I(x, y) \propto \frac{\sin(\pi D_x x / \lambda d)}{(\pi D_x x / \lambda d)} \cdot \frac{\sin(\pi D_y y / \lambda d)}{(\pi D_y y / \lambda d)}$$

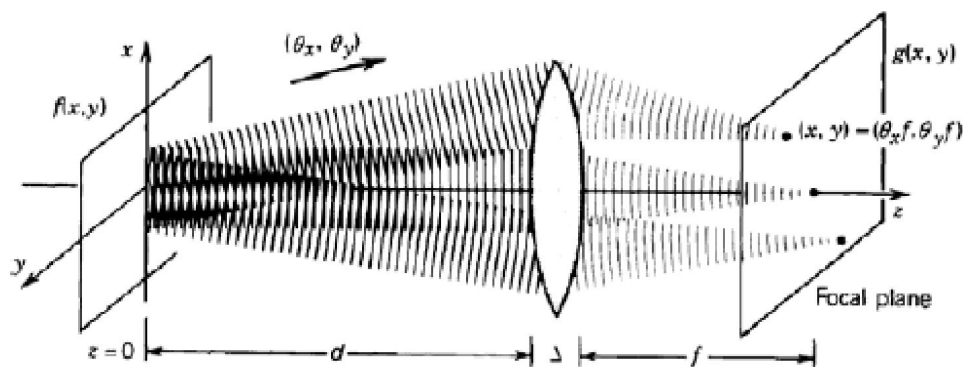
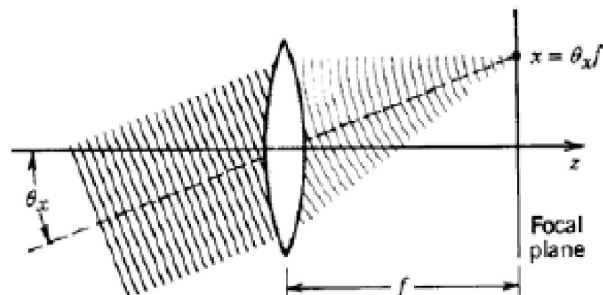


$$I(x, y) \propto \left( \frac{2J_1(\pi D \rho / \lambda d)}{(\pi D \rho / \lambda d)} \right)^2, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$



# Фурье преобразование

Тонкая линза



$$g(x, y) = h_l \exp\left( j\pi \frac{(x^2 + y^2) \cdot (d - f)^2}{\lambda \cdot f^2} \right) F\left( \frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right)$$

$$h_l = \left( \frac{j}{\lambda f} \right) \exp[-jk(d + f)]$$

$$d = f;$$

$$g(x, y) = h_l F\left( \frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right)$$

# Формирование изображения

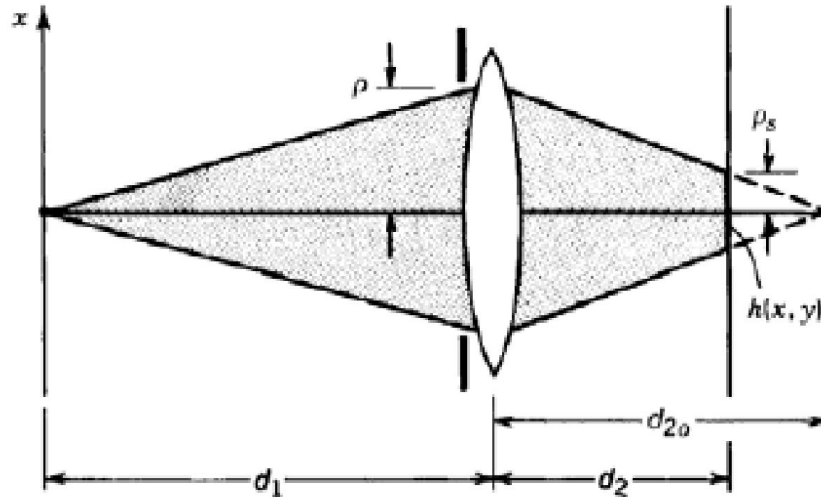
Одна линза (лучевое приближение)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}$$

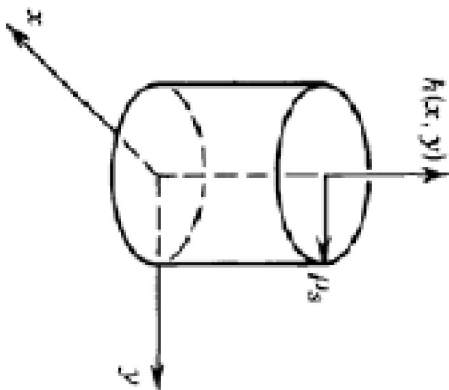
$p(x, y)$  - апертурная функция

$$\varepsilon = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}; \frac{p_s}{p} = \varepsilon d_2$$

$$h(x, y) \sim p\left(\frac{x}{\varepsilon d_2}, \frac{y}{\varepsilon d_2}\right)$$



Циркулярная апертура



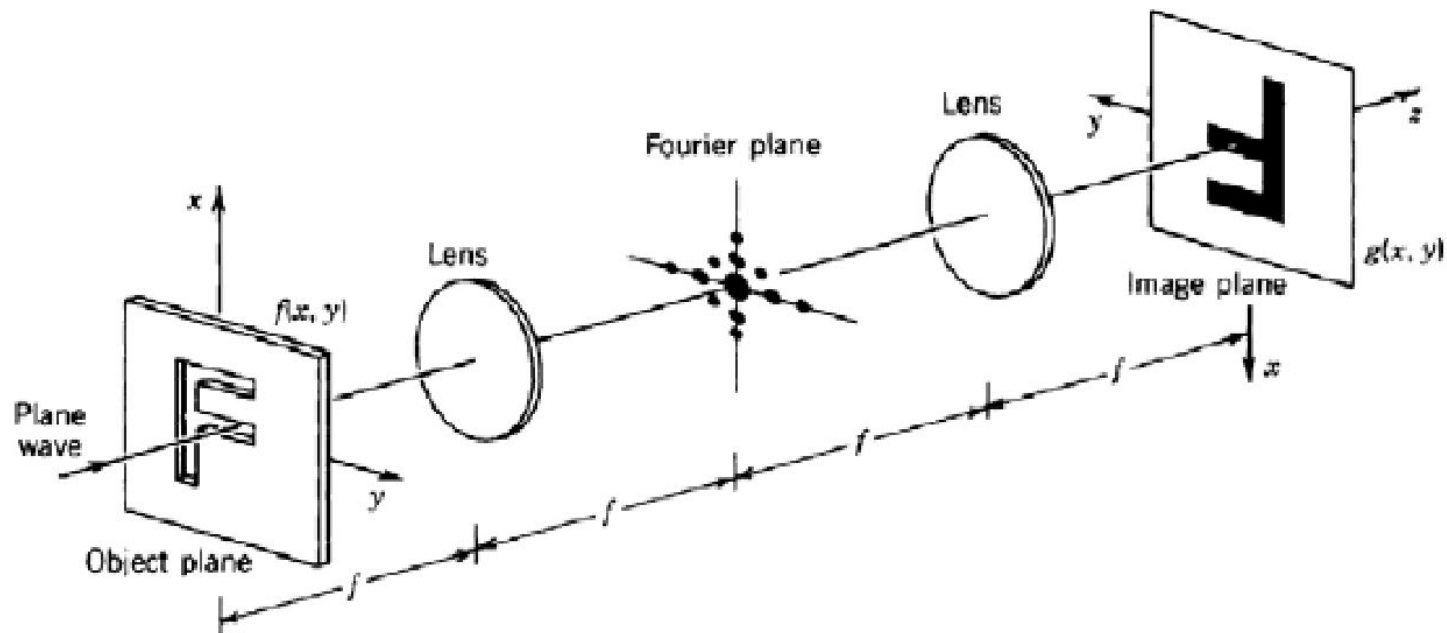
$$p_s = \frac{\varepsilon d_2 D}{2}$$

Меньше апертура – больше глубина резкости



# Оптическая обработка изображений

4f система



$$F(F(v_x, v_y)) = f(-x, -y)$$

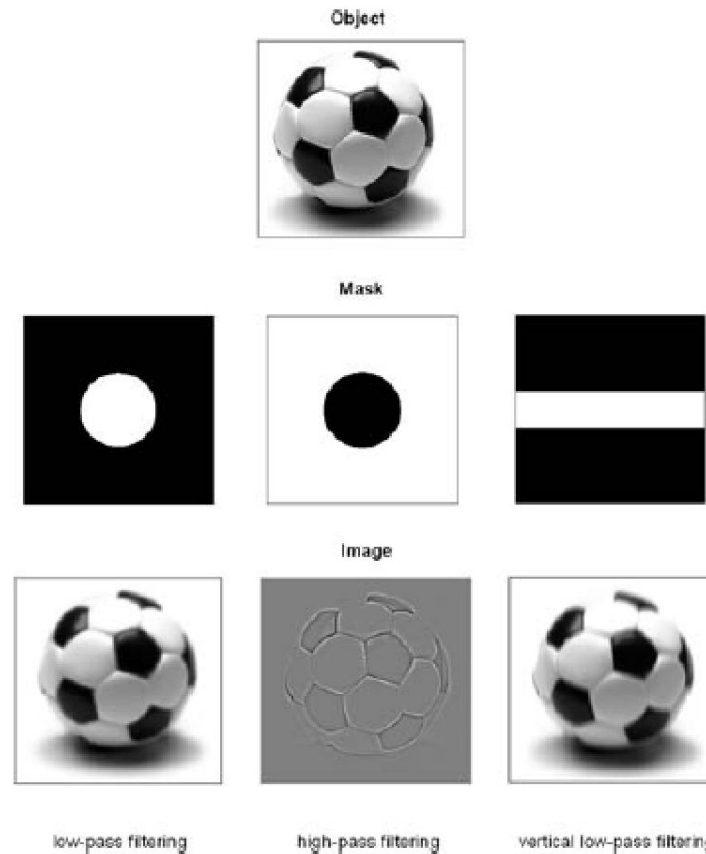
Перевернутое изображение с единичным увеличением



# Пространственная фильтрация

4f система  $H(v_x, v_y) \sim p(\lambda f v_x, \lambda f v_y)$  - передаточная функция 4f системы

$h(x, y) \sim \frac{1}{(\lambda f)^2} P\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$  - импульсный отклик 4f системы



# Качество оптической системы

$H(v_x, v_y)$  - комплексная оптическая передаточная функция (OTF)

$|H(v_x, v_y)|$  - модуляционная передаточная функция (MMTF)

$\arg(H(v_x, v_y))$  - фазовая передаточная функция (OTF)

