Лекция 2. Интегральные преобразования типа Фурье

2.1. Общие сведения из теории интегральных преобразований

Интегральным преобразование заданной функции ***f(x)*** называется интеграл от этой функции с некоторым весовым множителем ***p(x,ξ)****,* зависящим от переменной ***x*** и параметра ξ. Интегрирование проводится по аргументу ***x*** на интервале совместного существования функции ***f(x)*** и весового множителя ***p(x, ξ)***, и в общем случае производится в бесконечных пределах. Записывается преобразование в таком виде:

$$\widetilde{f}\,(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p(x,\xi) dx.$$

Естественно, что функции ***f(x)*** и ***p(x,ξ),*** должны быть такими, чтобы интеграл сходился, т. е. являлся бы конечной функцией параметра ξ.

Весовая функция ***p(x,ξ),*** называется ядром интегрального преобразования, а само выражение ***преобразованием*** или ***трансформацией*** данного вида (например, преобразование Фурье, Лапласа, Френеля, Гильберта и др.)

Интегральным преобразование заданной функции ***f(x)*** называется интеграл от этой функции с некоторым весовым множителем ***p(x,ξ)***, зависящим от переменной ***x*** и параметра ***ξ***. Интегрирование проводится по аргументу ***x*** на интервале совместного существования функции ***f(x)*** и весового множителя ***p(x, ξ)***, и в общем случае производится в бесконечных пределах. Записывается преобразование в таком виде:

$$\tilde{f}\,(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p(x,\xi) dx.$$

Естественно, что функции ***f(x)*** и ***p(x,ξ),*** должны быть такими, чтобы интеграл сходился, т. е. являлся бы конечной функцией параметра *ξ*.

Весовая функция ***p(x,ξ),*** называется ядром интегрального преобразования, а само выражение ***преобразованием*** или ***трансформацией*** данного вида (например, преобразование Фурье, Лапласа, Френеля, Гильберта и др.)

Интегральным преобразование заданной функции ***f(x)*** называется интеграл от этой функции с некоторым весовым множителем ***p(x,ξ)***, зависящим от переменной ***x*** и параметра *ξ*. Интегрирование проводится по аргументу ***x*** на интервале совместного существования функции ***f(x)*** и весового множителя ***p(x, ξ)***, и в общем случае производится в бесконечных пределах. Записывается преобразование в таком виде:

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p(x, \xi) dx.$$

Естественно, что функции ***f(x)*** и ***p(x,ξ),*** должны быть такими, чтобы интеграл сходился, т. е. являлся бы конечной функцией параметра *ξ*.

Весовая функция ***p(x,ξ),*** называется ядром интегрального преобразования, а само выражение ***преобразованием*** или ***трансформацией*** данного вида (например, преобразование Фурье, Лапласа, Френеля, Гильберта и др.)

Интегральным преобразование заданной функции ***f(x)*** называется интеграл от этой функции с некоторым весовым множителем ***p(x,ξ)***, зависящим от переменной ***x*** и параметра *ξ*. Интегрирование проводится по аргументу ***x*** на интервале совместного существования функции ***f(x)*** и весового множителя ***p(x, ξ)***, и в общем случае производится в бесконечных пределах. Записывается преобразование в таком виде:

$$\tilde{f}\,(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p(x,\xi) dx.$$

Естественно, что функции ***f(x)*** и ***p(x,ξ),*** должны быть такими, чтобы интеграл сходился, т. е. являлся бы конечной функцией параметра *ξ*.

Весовая функция ***p(x,ξ),*** называется ядром интегрального преобразования, а само выражение ***преобразованием*** или ***трансформацией*** данного вида (например, преобразование Фурье, Лапласа, Френеля, Гильберта и др.)

Важнейший тип интегральных преобразований когда ядра содержат произведение $p \cdot \xi$, наиболее характерным из них является преобразование ***Фурье***.

И наконец, ядро может иметь вид p^{ξ}, примером таких преобразований является преобразование ***Меллина*** (дискретный аналог которого ***Z – преобразование***, применяется при фильтрации сигналов).

Далее будем использовать следующие более конкретные обозначения для сигналов и спектров, временной сигнал будем обозначать как $s(t)$, а его спектр как $S(f)$.

2.2. Интегральное преобразование Гильберта

2.2.1. Связь между действительной и мнимой частями комплексного спектра сигнала. Понятие о преобразовании Гильберта

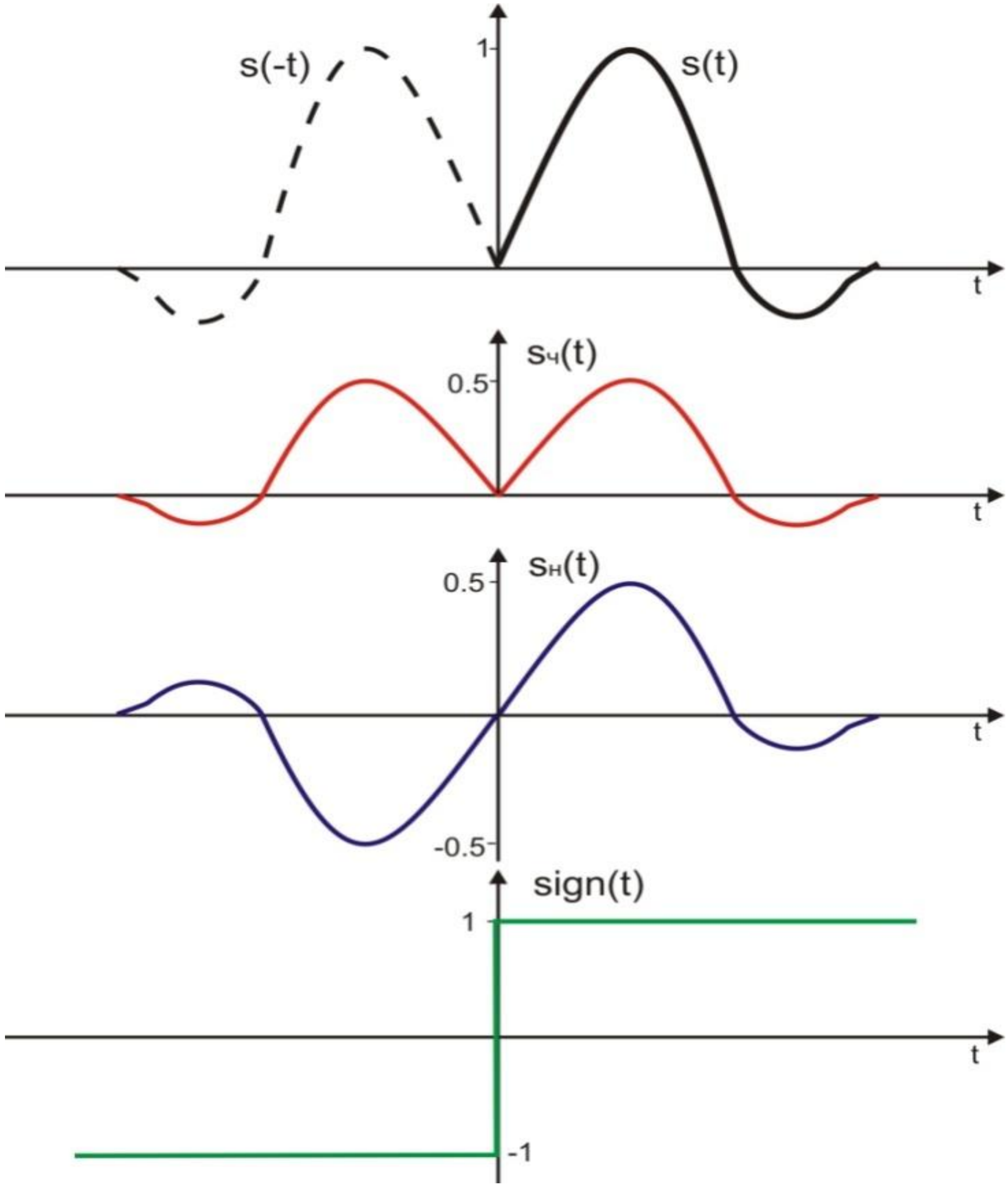
Интегральным преобразование заданной функции ***f(x)*** называется интеграл от этой функции с некоторым весовым множителем ***p(x,ξ)***, зависящим от переменной ***x*** и параметра *ξ*. Интегрирование проводится по аргументу ***x*** на интервале совместного существования функции ***f(x)*** и весового множителя ***p(x, ξ)***, и в общем случае производится в бесконечных пределах. Записывается преобразование в таком виде:

$$\tilde{f}\,(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p(x, \xi) dx.$$

Естественно, что функции ***f(x)*** и ***p(x,ξ),*** должны быть такими, чтобы интеграл сходился, т. е. являлся бы конечной функцией параметра *ξ*.

Весовая функция ***p(x,ξ),*** называется ядром интегрального преобразования, а само выражение ***преобразованием*** или ***трансформацией*** данного вида (например, преобразование Фурье, Лапласа, Френеля, Гильберта и др.)

Представление функции в виде суммы четного и нечетного слагаемых



Интегральным преобразование заданной функции ***f(x)*** называется интеграл от этой функции с некоторым весовым множителем ***p(x,ξ)***, зависящим от переменной ***x*** и параметра ***ξ***. Интегрирование проводится по аргументу ***x*** на интервале совместного существования функции ***f(x)*** и весового множителя ***p(x, ξ)***, и в общем случае производится в бесконечных пределах. Записывается преобразование в таком виде:

$$\tilde{f}\,(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p(x,\xi) dx.$$

Естественно, что функции ***f(x)*** и ***p(x,ξ),*** должны быть такими, чтобы интеграл сходился, т. е. являлся бы конечной функцией параметра ξ.

Весовая функция ***p(x,ξ),*** называется ядром интегрального преобразования, а само выражение ***преобразованием*** или ***трансформацией*** данного вида (например, преобразование Фурье, Лапласа, Френеля, Гильберта и др.)

Интегральным преобразование заданной функции ***f(x)*** называется интеграл от этой функции с некоторым весовым множителем ***p(x,ξ)***, зависящим от переменной ***x*** и параметра ***ξ***. Интегрирование проводится по аргументу ***x*** на интервале совместного существования функции ***f(x)*** и весового множителя ***p(x, ξ)***, и в общем случае производится в бесконечных пределах. Записывается преобразование в таком виде:

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p(x, \xi) dx.$$

Естественно, что функции ***f(x)*** и ***p(x,ξ),*** должны быть такими, чтобы интеграл сходился, т. е. являлся бы конечной функцией параметра ***ξ***.

Весовая функция ***p(x,ξ),*** называется ядром интегрального преобразования, а само выражение ***преобразованием*** или ***трансформацией*** данного вида (например, преобразование Фурье, Лапласа, Френеля, Гильберта и др.)

Интегральным преобразование заданной функции ***f(x)*** называется интеграл от этой функции с некоторым весовым множителем ***p(x,ξ)***, зависящим от переменной ***x*** и параметра *ξ*. Интегрирование проводится по аргументу ***x*** на интервале совместного существования функции ***f(x)*** и весового множителя ***p(x, ξ)***, и в общем случае производится в бесконечных пределах. Записывается преобразование в таком виде:

$$\widetilde{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p(x,\xi) dx.$$

Естественно, что функции ***f(x)*** и ***p(x,ξ),*** должны быть такими, чтобы интеграл сходился, т. е. являлся бы конечной функцией параметра *ξ*.

Весовая функция ***p(x,ξ),*** называется ядром интегрального преобразования, а само выражение ***преобразованием*** или ***трансформацией*** данного вида (например, Функции, связанные между собой преобразованием Гильберта, часто называют сопряженными по Гильберту функциями.

Таким образом, трансформации Гильберта в частотной области соответствует умножение сигнала на знаковою функцию во временной области.

Из сказанного следует важный вывод, что функциям, равными нулю при отрицательных значениях аргумента, соответствуют ***комплексные Фурье-трансформанты***, действительная и мнимая часть которых связаны между собой ***преобразованием Гильберта***.

2.2.2. Понятие об аналитическом сигнале

Интегральным преобразование заданной функции ***f(x)*** называется интеграл от этой функции с некоторым весовым множителем ***p(x,ξ)***, зависящим от переменной ***x*** и параметра *ξ*. Интегрирование проводится по аргументу ***x*** на интервале совместного существования функции ***f(x)*** и весового множителя ***p(x, ξ)***, и в общем случае производится в бесконечных пределах. Записывается преобразование в таком виде:

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p(x,\xi)dx.$$

Естественно, что функции ***f(x)*** и ***p(x,ξ),*** должны быть такими, чтобы интеграл сходился, т. е. являлся бы конечной функцией параметра *ξ*.

Весовая функция ***p(x,ξ),*** называется ядром интегрального преобразования, а само выражение ***преобразованием*** или ***трансформацией*** данного вида (например, преобразование Фурье, Лапласа, Френеля, Гильберта и др.)

2.2.3. Определение мгновенных характеристик (атрибутов) волнового поля на основе использования преобразования Гильберта

Интегральным преобразование заданной функции ***f(x)*** называется интеграл от этой функции с некоторым весовым множителем ***p(x,ξ)***, зависящим от переменной ***x*** и параметра *ξ*. Интегрирование проводится по аргументу ***x*** на интервале совместного существования функции ***f(x)*** и весового множителя ***p(x, ξ)***, и в общем случае производится в бесконечных пределах. Записывается преобразование в таком виде:

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p(x, \xi) dx.$$

Естественно, что функции ***f(x)*** и ***p(x,ξ),*** должны быть такими, чтобы интеграл сходился, т. е. являлся бы конечной функцией параметра *ξ*.

Весовая функция ***p(x,ξ),*** называется ядром интегрального преобразования, а само выражение ***преобразованием*** или ***трансформацией*** данного вида (например, преобразование Фурье, Лапласа, Френеля, Гильберта и др.)

Интегральным преобразование заданной функции ***f(x)*** называется интеграл от этой функции с некоторым весовым множителем ***p(x,ξ)***, зависящим от переменной ***x*** и параметра ***ξ***. Интегрирование проводится по аргументу ***x*** на интервале совместного существования функции ***f(x)*** и весового множителя ***p(x, ξ)***, и в общем случае производится в бесконечных пределах. Записывается преобразование в таком виде:

$$\widetilde{f}\,(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p(x,\xi) dx.$$

Естественно, что функции ***f(x)*** и ***p(x,ξ),*** должны быть такими, чтобы интеграл сходился, т. е. являлся бы конечной функцией параметра *ξ*.

Весовая функция ***p(x,ξ),*** называется ядром интегрального преобразования, а само выражение ***преобразованием*** или ***трансформацией*** данного вида (например, преобразование Фурье, Лапласа, Френеля, Гильберта и др.)

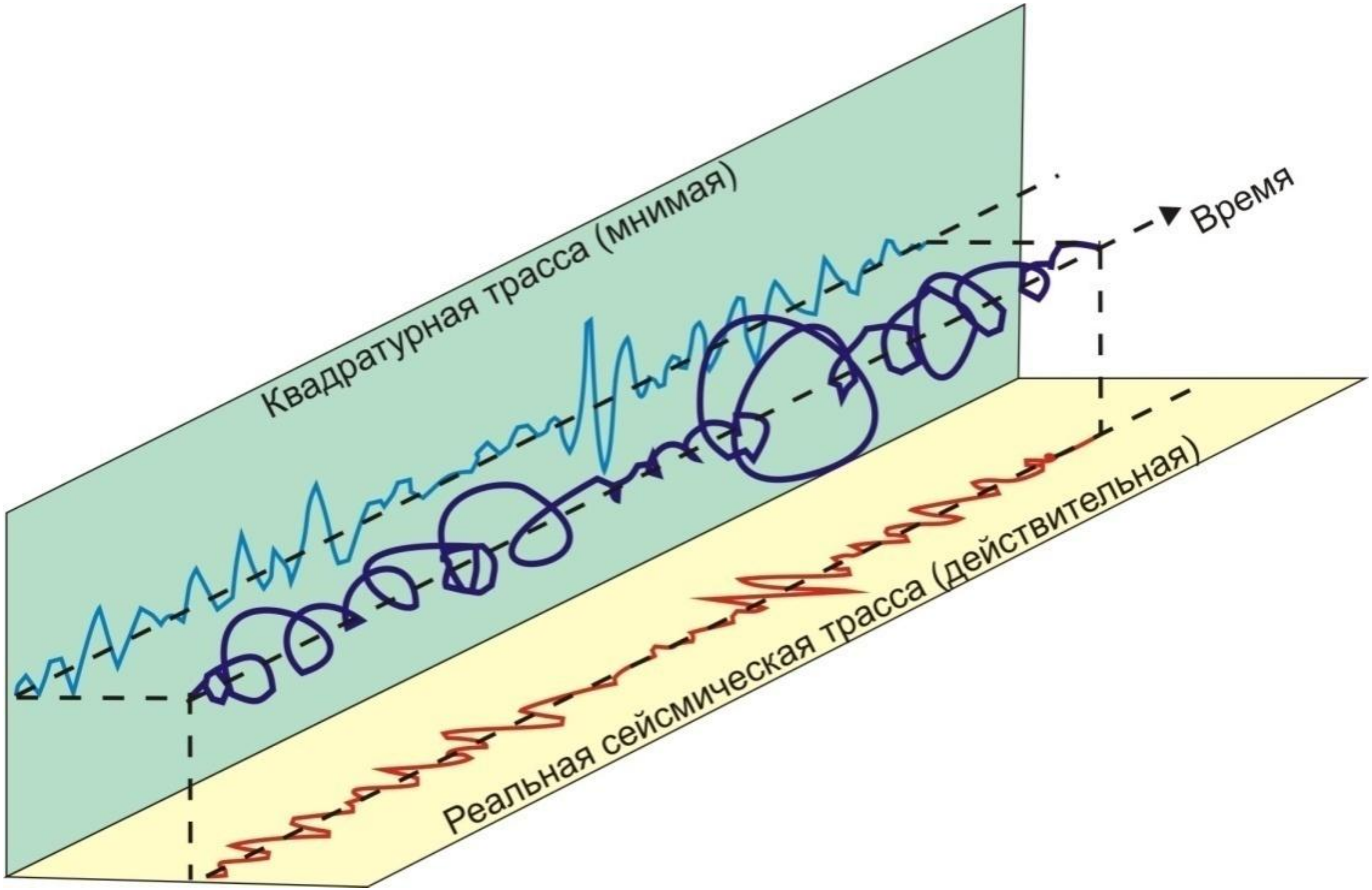
Интегральным преобразование заданной функции ***f(x)*** называется интеграл от этой функции с некоторым весовым множителем ***p(x,ξ)***, зависящим от переменной ***x*** и параметра *ξ*. Интегрирование проводится по аргументу ***x*** на интервале совместного существования функции ***f(x)*** и весового множителя ***p(x, ξ)***, и в общем случае производится в бесконечных пределах. Записывается преобразование в таком виде:

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p(x,\xi) dx.$$

Естественно, что функции ***f(x)*** и ***p(x,ξ),*** должны быть такими, чтобы интеграл сходился, т. е. являлся бы конечной функцией параметра *ξ*.

Весовая функция ***p(x,ξ),*** называется ядром интегрального преобразования, а само выражение ***преобразованием*** или ***трансформацией*** данного вида (например, преобразование Фурье, Лапласа, Френеля, Гильберта и др.)

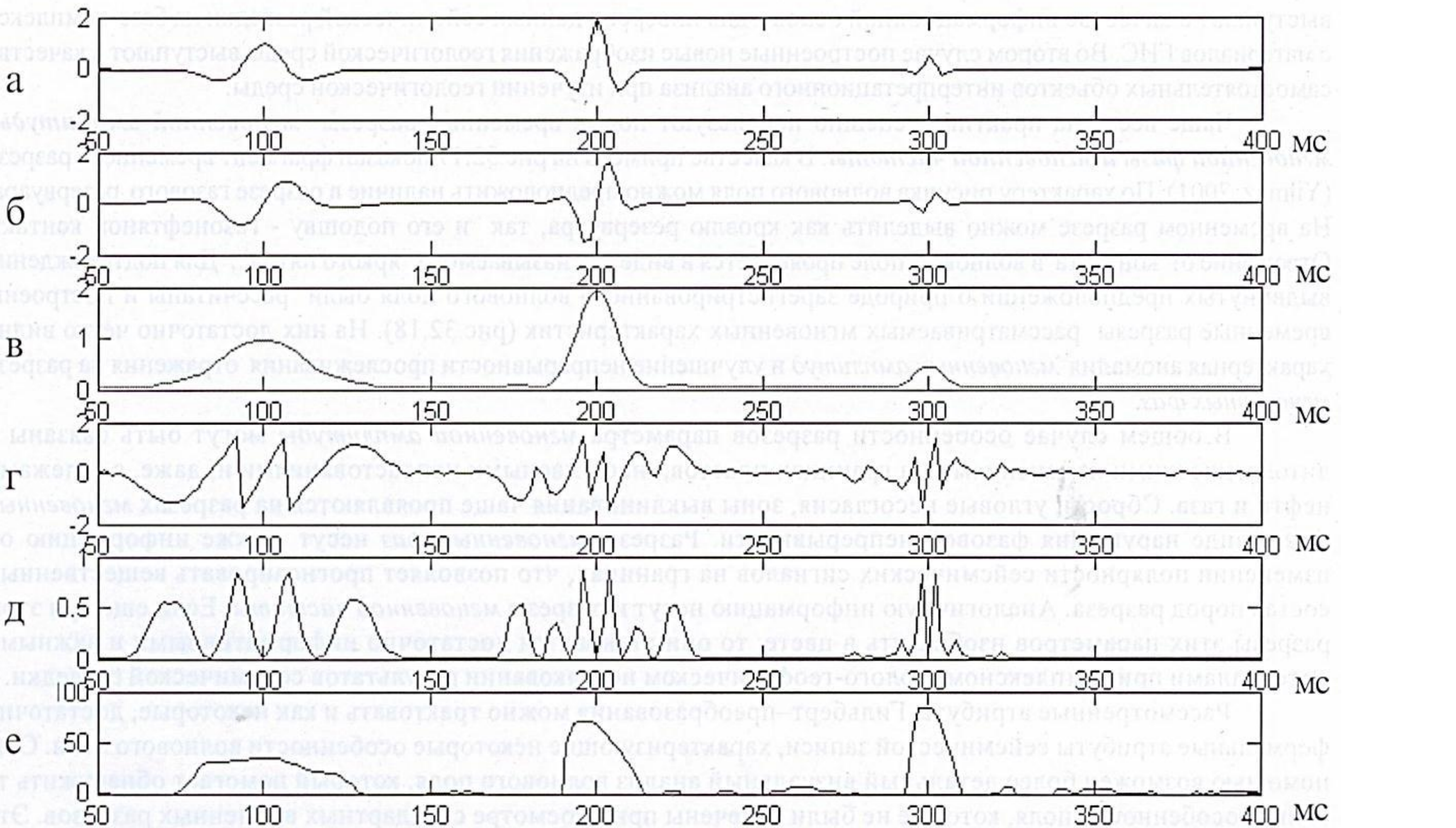
Пространственная взаимосвязь между комплексной, реальной и сопряженной (мнимой) сейсмическими трассами



Вычисление интегральных преобразования на практике сводится к вычислению их дискретного аналога. Практически вычисление преобразования Гильберта сводится к свертке исходной трассы с фильтром ограниченной длины.

Для понимания причинно-следственных связей между свойствами сейсмической трассы и видом графиков получаемых атрибутов, рассмотрим результаты простейшего моделирования. Далее на рисунке показаны действительные и сопряженные трассы для модельной сейсмограммы, рассчитанной с использованием ***импульса Риккера***.

При этом в качестве модельной сейсмической трассы использовалась трасса, состоящая из помещенных на временах 100, 200 и 300 мс трех импульсов Риккера. Кроме различного времени вступления импульсы имели различные амплитуды (1, 2 и 0,5 единиц) и средние частоты (30, 60 и 90 Гц). Здесь же показаны также трассы мгновенных амплитуд, фаз и косинусов мгновенных фаз и мгновенных частот. Расчет сопряженной по Гильберту трассы (б) выполнялся с помощью свертки исходной трассы (а) с оператором фильтра.



Действительная (а) и сопряженная (б) сейсмические трассы, соответствующие теоретической сейсмограмме, а также трасса мгновенных амплитуд (в), трасса мгновенных фаз (г), трасса косинусов мгновенных фаз (д) и трасса мгновенных частот (е).

В качестве модельной сейсмической трассы принята трасса, состоящая из трех импульсов Риккера на временах 100, 200 и 300 мс, с амплитудами 1, 2 и 0,5 единиц и средними частотами 30, 60 и 90 гц.

На приведенных графиках видно, что сопряженная трасса отличается по фазе так же, как синусоида отличается от косинусоиды: т. е. сдвигом на 90°.

График ***мгновенных амплитуд (в)*** является огибающей как для ***сейсмической трассы (а)***, так и для ***сопряженной трассы (б).*** Он показывает правильное значение амплитуд в моменты времени, соответствующие центру импульсов.

На трассе ***мгновенных фаз (г)*** находят отображение как ширина сигнала, так его частота. Это проявляется в увеличении частоты резких переходов графика через нуль.
Более плавный график представляет собой трасса ***косинуса мгновенной фазы***. В данном случае для большей выразительности показан график функции ***1 - cos φ(f).***

И, наконец, на графике ***мгновенных частот (е)***, которые были предварительно усреднены с помощью медианного фильтра, хорошо проявляются значения частот, присутствующих в спектре импульсов Риккера

Интегральным преобразование заданной функции ***f(x)*** называется интеграл от этой функции с некоторым весовым множителем ***p(x,ξ)***, зависящим от переменной ***x*** и параметра ***ξ***. Интегрирование проводится по аргументу ***x*** на интервале совместного существования функции ***f(x)*** и весового множителя ***p(x, ξ)***, и в общем случае производится в бесконечных пределах. Записывается преобразование в таком виде:

$$\tilde{f}\,(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p(x,\xi) dx.$$

Естественно, что функции ***f(x)*** и ***p(x,ξ),*** должны быть такими, чтобы интеграл сходился, т. е. являлся бы конечной функцией параметра ***ξ***.

Весовая функция ***p(x,ξ),*** называется ядром интегрального преобразования, а само выражение ***преобразованием*** или ***трансформацией*** данного вида (например, преобразование Фурье, Лапласа, Френеля, Гильберта и др.)

Кроме упомянутых мгновенных характеристик волнового поля, возможно вычисление и других аналогичных характеристик (атрибутов) сейсмической записи - ***мгновенной скорости, когерентности и др.***

Найденные таким образом, численные значения этих характеристик могут выступать как в качестве базовых атрибутов при выполнении задач прогнозирования свойств, так и в качестве самостоятельных вариантов временных изображения геологической среды.

В первом случае поля найденных атрибутов выступают в качестве информационной основы для инверсии данных сейсмической разведки на базе комплекса с материалами ГИС.

Во втором случае построенные новые изображения геологической среды выступают в качестве самостоятельных объектов интерпретационного анализа при изучении геологической среды.

2.2.4. Связь между модулем и фазой частотного спектра аналитического сигнала.
Определение формы сейсмического импульса.

Интегральным преобразование заданной функции ***f(x)*** называется интеграл от этой функции с некоторым весовым множителем ***p(x,ξ)***, зависящим от переменной ***x*** и параметра *ξ*. Интегрирование проводится по аргументу ***x*** на интервале совместного существования функции ***f(x)*** и весового множителя ***p(x, ξ)***, и в общем случае производится в бесконечных пределах. Записывается преобразование в таком виде:

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p(x,\xi) dx.$$

Естественно, что функции ***f(x)*** и ***p(x,ξ),*** должны быть такими, чтобы интеграл сходился, т. е. являлся бы конечной функцией параметра *ξ*.

Весовая функция ***p(x,ξ),*** называется ядром интегрального преобразования, а само выражение ***преобразованием*** или ***трансформацией*** данного вида (например, преобразование Фурье, Лапласа, Френеля, Гильберта и др.)

Интегральным преобразование заданной функции ***f(x)*** называется интеграл от этой функции с некоторым весовым множителем ***p(x,ξ)***, зависящим от переменной ***x*** и параметра *ξ*. Интегрирование проводится по аргументу ***x*** на интервале совместного существования функции ***f(x)*** и весового множителя ***p(x, ξ)***, и в общем случае производится в бесконечных пределах. Записывается преобразование в таком виде:

$$\widetilde{f}\,(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p(x, \xi) dx.$$

Естественно, что функции ***f(x)*** и ***p(x,ξ),*** должны быть такими, чтобы интеграл сходился, т. е. являлся бы конечной функцией параметра *ξ*.

Весовая функция ***p(x,ξ),*** называется ядром интегрального преобразования, а само выражение ***преобразованием*** или ***трансформацией*** данного вида (например, преобразование Фурье, Лапласа, Френеля, Гильберта и др.)

Рассмотренные связи между амплитудными и фазовыми спектрами очень важны при определении ***формы сейсмического импульса***. В англоязычной литературе форму сейсмического импульса называют ***вейвлет*** (***wavelet, wave*** – волна, ***let*** – уменьшительный суффикс).

Форму импульса можно определить по записям во внутренних точках среды, но для этого необходимо иметь скважины для проведения ВСП, но и при этом задача не всегда решается однозначно.

Обычно для определения формы импульса, используются сейсмограммы ***МОВ***, при этом на практике используются следующие допущения:

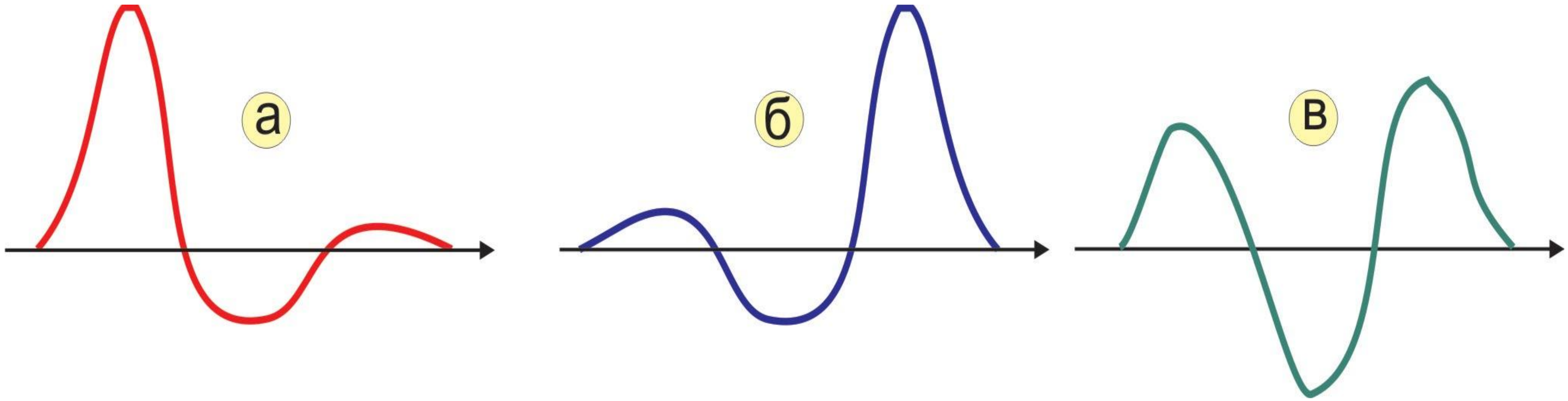
1. фазовый спектр отсутствует - $\boldsymbol{\varphi(f) = 0}$, т. е. импульс считается симметричным относительно его центра во времени, практически это реализуется только в вибрационной сейсморазведке;
2. при применении импульсных источников фазовый спектр излучаемого сигнала всегда отличен от нуля **-** $\boldsymbol{\varphi(f) \neq 0}$, но для некоторого класса сигналов называемых ***минимально-фазовыми***, фазовый спектр может быть определен из частотного спектра с помощью преобразований Гильберта.

Действительно всякая сейсмическая волна регистрируется в течение определенного интервала времени и считается ***реализуемой*** (физически осуществимой), если ***не существует*** ее каких-либо проявлений ранее нулевого момента времени.

Такие волны называются причинно-обусловленными (***каузальными***). Это определение соответствуют нашему интуитивному представлению о том, что физически осуществимые системы могут реагировать на воздействие только после их возникновения.

Именно к такому классу волн и относятся волны, обладающие ***минимально-фазовые импульсами.***

В общем случае кроме ***минимально-фазовых импульсов (сигналов) – (а)***, можно выделить **-** ***максимально-фазовые – (б) и смешенные сигналы (смешанной фазы) – (в)***.



Контрольные вопросы и задачи к лекции 2

1. Какие преобразования называются интегральными, какие из интегральных преобразований наиболее часто используются в сейсморазведке?
2. Как вычисляется Z – преобразование и где это преобразование используется в сейсморазведке?
3. Как связаны между собой действительная мнимая части комплексного спектра сигнала?
4. Какие мгновенные характеристики (атрибуты) волнового поля можно определить, используя преобразования Гильберта?
5. Какие сигналы называются минимально-фазовыми и как для таких сигналов можно определить фазовый спектр?