Основы теории погрешности вычислений

Лекция 2

План

- Абсолютная и относительная погрешности
- Запись и округление чисел
- Способы оценки погрешностей вычислений
  - Учет погрешности арифметических действий
  - Метод границ
  - Дифференциальная оценка
- Обратная задача теории погрешностей
- Машинная арифметика
- Контрольные вопросы

Абсолютная погрешность

Пусть X – точное значение некоторой величины (обычно неизвестное), x – число, принятое за ее приближенное значение (пишут $X \approx x$). Разность $X - x$ называют погрешностью приближенного значения x, а модуль $\varepsilon_x = |X - x|$ – ***абсолютной погрешностью*** величины x.

Предельные погрешности

Предельной ***абсолютной погрешностью***, являющейся верхней границей, называют такое по возможности наименьшее число, для которого справедливо неравенство:

$$\Delta x \geq \left| X - x \right|$$

Пример.

Число $\pi = 3.14159265358979323 8...$

может округляться по-разному в зависимости от потребностей задачи:

$$\pi \approx 3.14 \quad \Delta = 0.0016 \quad \text{или} \quad \Delta = 0.002$$

$$\pi \approx 3.1416 \quad \Delta = 0.0000008 \quad \text{или} \quad \Delta = 0.000001$$

Предельные погрешности

Предельная ***относительная погрешность*** приближенного числа – это отношение предельной абсолютной погрешности к абсолютному значению приближения:

$$\delta x \geq \frac{\Delta x}{|x|}$$

Относительную погрешность обычно выражают в процентах.

Границы точного результата

Если известны x и Δ_x , то принято записывать:

$$X \in [\,x - \Delta_x,\ \ x + \Delta_x\,]$$

или

$$X = x \pm \Delta_x$$

Опр. Любая пара чисел $НГ_x$ и $ВГ_x$, такая, что $НГ_x \le x \le ВГ_x$ называется ***нижней и верхней границей*** приближенного числа x.

Пример.

Ширина шкафа S известна приближенно с погрешностью Δ_s , ширина двери H и её погрешность Δ_h . При каком условии шкаф гарантированно пройдет в дверь?

$$ВГ_{шкафа} < НГ_{двери}$$

$$s + \Delta s < h - \Delta h$$

Пример.

Длина и ширина комнаты, измеренные с точностью до 1 см, равны: $l = 4,58; \quad h = 3,67.$

Оценить предельные абс. и отн. погрешности при определении площади комнаты.

$$s = l \cdot h = 4,58 \cdot 3,67 = 16,8086 \ (\text{м}^2)$$

Будем ориентироваться на наихудшие варианты:

$$ВГ_s = (4,58 + 0,01) \cdot (3,67 + 0,01) = 16,8912 \ (\text{м}^2)$$

$$НГ_s = (4,58 - 0,01) \cdot (3,67 - 0,01) = 16,7262 \ (\text{м}^2)$$

Пример.

Разница между средним и предельными значениями площади составляет:

$$|16,8086-16,8912|=0,0826; \ |16,8086-16,7262|=0,0824.$$

Таким образом, в качестве предельной абсолютной погрешности можно выбрать

$$\Delta_s=0,0826.$$

Предельная относительная погрешность равна

$$\delta_s=\frac{0,0826}{16,8086}=0,0049141=0,49141\%.$$

Значащие цифры

Определение. Все цифры десятичной записи числа, начиная с первой ненулевой слева, называются ***значащими***.

- ***308,6170 – 7 значащих цифр***
- ***0,00235 – 3 значащих цифры***

!!! 57 000 – 5 з.ц., $5{,}7*10^4$ – 2 з.ц.,

$570*10^2$ – 3 з.ц.

? Упражнение

Определите количество значащих цифр в записи чисел:

1. 0,0050 — 2
2. - 38,412 — 5
3. 4100 — 4
4. $20*10^5$ — 2

Округление чисел

Определение: ***округлением*** числа называют замену его близким по величине, но с меньшим количеством значащих цифр.

Различают 3 вида округления:

Симметричное округление – к ближайшему числу: 3,6≈4; 3,67≈3,7; 3,4≈3; 3,42≈3,4

С избытком - к большему числу: 3,6≈4; 3,2≈4

С недостатком - к меньшему числу (округление отсечением): 3,67≈3,6; 3,2≈3.

Округление погрешностей

Правило: В записи абсолютной погрешности обычно оставляют ***только 1-2 значащие цифры***.

Для сохранения условия, соответствующего определению предельной абс. погр., округление её всегда производят ***с избытком.***

Пример.

В рассмотренном ранее примере вычисления площади относительная погрешность должна была округляться следующим образом:

$$\delta_s = 0{,}49141\% \approx 0{,}5\%.$$

Пример.

Пусть требуется оценить погрешность округления числа **$e=2,7182818\ldots$**

$$e \approx 2,72; \quad \Delta_e = \left|e - 2,72\right| = 0,00171812\ldots$$

$\Delta=0,0018$

? Какой способ следует применять для округления :

- нижней границы числа?
- верхней границы числа?
- погрешности числа?

НГ приближенного числа округляют с недостатком, ВГ - с избытком.

Абсолютная погрешность приближенного числа, полученного при округлении с недостатком (избытком) равна единице последнего сохраненного разряда: $1{,}2776 \approx 1{,}27$; $\Delta = 0{,}01$.

Симметричное округление дает меньшую ошибку - половину единицы последнего разряда: $1{,}2776 \approx 1{,}28$; $\Delta = 0{,}005$.

Верные цифры

Определение. Цифра в записи числа a, называется ***верной***, если погрешность не превосходит единицы её разряда; цифра ***верная в строгом смысле*** - если погрешность не превосходит половины её разряда.

Пример

Определить верные цифры: $a = 18.572, \Delta_a = 0.08$

Решение:

1: 10 ≥ 0.08 - верная

8: 1 ≥ 0.08 - верная

5: 0.1 ≥ 0.08 - верная

в широком смысле

7: 0.01≤ 0.08 - сомнительная

2: 0.001 ≤ 0.08 - сомнительная

Пример

Для приближённого числа $x=72{,}256$ известна абсолютная погрешность

$\Delta_x = 0{,}01$.

Требуется определить его верные значащие цифры в а) широком и

б) строгом смыслах.

$x = 72{,}256 \qquad \Delta_x = 0{,}01.$

а) Решение:

2: $0.1 \geq 0.01$ - верная

5: $0.01 = 0.01$ – верная

6: $0.001 \leq 0.01$ - сомн.

Ответ: верные в широком смысле цифры 7;2;2;5

а 6 - сомнительная

б) Решение:

2: $0.05 \geq 0.01$ - верная

5: $0.005 \leq 0.01$ – сомн.

Ответ: верные в строгом смысле цифры 7;2;2

а 5 и 6 - сомнительные

Верная цифра не обязательно буквально совпадает с соответствующей цифрой точного числа.

$X= 1{,}999$ – точное число, $x= 2{,}000$ – его приближение. Тогда $\Delta_x=0{,}001$, и, следовательно, три первые цифры верные, хотя ни одна из них не совпадает с соответствующими цифрами точного числа.

Если исходные данные приводятся без указания погрешностей, но с известными верными цифрами, то погрешность можно определить, исходя из определения верной цифры.

Пример. $X=4{,}06$ $\Delta_x=0{,}01$ (в широком см.)

$X=4{,}06$ $\Delta_x=0{,}005$ (строгом см.)

Если не уточняется трактовка смысла (широкая, строгая), то по умолчанию принимается ***строгий*** вариант.

Запись приближенных чисел

Точность приближенного числа зависит не от количества значащих цифр, а от количества верных значащих цифр.

Если полученный в результате вычислений результат содержит излишнее количество сомнительных значащих цифр, то его округляют.

Правило записи приближённых чисел

В промежуточных результатах вычислений обычно сохраняют 1-2 сомнительные цифры, а окончательные результаты округляют с сохранением не более одной сомнительной цифры.

? Упражнение

Приближённое значение $x=24{,}6035$ имеет относительную погрешность $\delta=0{,}1\%$. Найти Δ_x и округлить число x с точностью до верных цифр.

Решение

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{|x|} \cdot 100\%$$

$$\Delta_x = \frac{\delta_x}{100\%} \cdot |x|$$

$$\Delta_x = \frac{0,1}{100\%} \cdot 24,6035 = 0,0246035 \approx 0,03$$

$6:\ 0,05 \geq 0,03$

$0:\ 0,005 \leq\ 0,03$

2,4,6 – верные цифры, округляем $24,6 \approx$

? Упражнение

Даны приближённые значения $x = 50 \pm 2$ и $y = 200 \pm 5$. Какое из них записано точнее?

Решение

$x=50\pm2$

$\delta_x=2:50*100\%=4\%$

$y=200\pm5$

$\delta_y=5:200*100\%=2,5\%$

Ответ: у задан точнее, чем х.

Учет погрешности арифметических действий

Проблема: Как по погрешностям исходных чисел оценить погрешность результата при выполнении вычислений?

Пусть X и Y – точные значения чисел, x и y – их приближенные значения с погрешностями Δx и Δy. Какова погрешность суммы?

$$X = x \pm \Delta x; Y = y \pm \Delta y.$$

$$\Delta(X + Y) = ?$$

Учет погрешности арифметических действий

$x - \Delta x \le X \le x + \Delta x;$

$y - \Delta y \le Y \le y + \Delta y.$

Сложим почленно эти неравенства :

$(x + y) - (\Delta x + \Delta y) \le X + Y \le (x + y) + (\Delta x + \Delta y),$

$X + Y = (x + y) \pm (\Delta x + \Delta y),$

т.е. $\Delta(X + Y) = \Delta x + \Delta y.$

Абсолютная погрешность суммы равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых.

Учет погрешности арифметических действий

Следовательно, предельная абс. погр. суммы не может быть меньше предельной абс. погрешности наименее точного слагаемого. Поэтому при сложении нет смысла сохранять излишние знаки в более точных слагаемых. Целесообразно сначала все слагаемые округлить по образцу менее точного (сохранив 1-2 запасных разряда). Результат тоже округлить на 1 знак.

Пример.

Найти сумму и ее погрешность для слагаемых (заданы верными цифрами):

$$x = 23{,}4;\, y = 1{,}1074;\, z = 3{,}05483.$$

Определяем наименее точное число и округляем остальные:

$$x = 23{,}4;\, y = 1{,}107;\, z = 3{,}055.$$

$$\Delta x = 0{,}05;\, \Delta y = 0{,}0005;\, \Delta z = 0{,}0005.$$

Пример.

Сумма: $s = x + y + z = 23,4 + 1,107 + 3,055 = 27,562.$

Погрешность:

$$\Delta s = \Delta x + \Delta y + \Delta z = 0,05 + 0,0005 + 0,0005 = 0,051.$$

Округляем результат:

$$s = 27,56 \pm 0,051.$$

Учет погрешности арифметических действий

- Предельная абс. погрешность разности равна сумме погрешностей уменьшаемого и вычитаемого.
- Относ. погрешность произведения равна сумме относит. погрешностей сомножителей.

(Аналогично для частного)

Проверить эти правила самостоятельно.

Учет погрешности арифметических действий

Пользуясь рассмотренными правилами, можно найти суммарную предельную погрешность любого арифметического выражения.

Замечание. Предельная погрешность может оказаться завышенной по сравнению с фактической, поскольку реально погрешности отдельных исходных данных могут иметь противоположные знаки и в итоге – частично компенсировать друг друга.

Оценка погрешности вычисления функции

Определим, как вычислить погрешность функции, некоторые аргументы которой заданы приближенно.

Задачу нахождения погрешности функции по заданным погрешностям приближенных аргументов называют ***основной задачей*** теории погрешностей.

Оценка погрешности по способу границ

Пусть $y=f(x)$ - функция, для которой необходимо найти погрешность.

a - приближенное исходное данное и известны НГ$_a$ и ВГ$_a$.

Необходимо определить $y=f(x)$, НГ$_y$ и ВГ$_y$.

Для нахождения границ результата вычисляют $y_1=f($НГ$_x)$ и $y_2=f($ВГ$_x)$, а затем меньшее из этих значений принимают за НГ$_y$, а большее за ВГ$_y$ и округляют нижнее с недостатком, а верхнее с избытком.

Пример:

$$y = \frac{e^x}{1 + x^2}$$

$$1,25 < x < 1,28,$$

Решение.

$$y(НГ_x) = \frac{e^{1,25}}{1+1,25^2} = 1,3620849...$$

$НГ_y$ =1.362

$$y(ВГ_x) = \frac{e^{1,28}}{1+1,28^2} = 1,3631896...$$

$ВГ_y$ =1.364

$$\Delta_y = \frac{ВГ_y - НГ_y}{2} = \frac{1,364 - 1,362}{2} = 0,001$$

$$y \approx \frac{ВГ_y + НГ_y}{2} \approx 1,363$$

$$y = 1,363 \pm 0,001$$

Рассмотрим случай двух переменных

$$НГ_a \le a \le ВГ_a$$
$$НГ_b \le b \le ВГ_b$$

$$z = f(a,b) - ?$$

$$\left.\begin{array}{l} z = f(НГ_a, НГ_b) \\ z = f(НГ_a, ВГ_b) \\ z = f(ВГ_a, ВГ_b) \\ z = f(ВГ_a, НГ_b) \end{array}\right\} \min \longrightarrow НГ_z, \max \longrightarrow ВГ_z$$

Замечание

Прежде чем производить расчет для всех возможных вариантов (для n – переменных это 2^n), необходимо попытаться оценить характер зависимости от некоторых переменных.

Пример. Как оценить, какие границы аргументов использовать для $НГ_F$ и $ВГ_F$?

$$f(a,b,c) = \frac{a^2 + \sqrt{b}}{c + \frac{e^a}{b}}$$

Дифференциальная оценка погрешности

Теорема. Пусть ***x, y*** являются приближениями к точным значениям аргументов ***X, Y*** с абсолютными погрешностями $\boldsymbol{\Delta_x}$ и $\boldsymbol{\Delta_y}$. Если функция ***z=f(x,y)*** дифференцируема, M_x и M_y – максимумы частных производных

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right| \text{ и } \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|$$

$$\text{в прямоугольнике } \begin{cases} x-\Delta x \le x \le x+\Delta x \\ y-\Delta y \le y \le y+\Delta y \end{cases}$$

то абсолютная *дифференциальная погрешность функции*

$$\Delta_z \le M_1 \cdot \Delta_x + M_2 \cdot \Delta_y$$

Дифференциальная оценка погрешности

Замечание. При малых значениях $\boldsymbol{\Delta_x}$ и $\boldsymbol{\Delta_y}$ можно вместо максимумов частных производных в прямоугольнике брать значения производных с приближенными значениями аргументов:

$$\Delta_z = \left|f'_x(x,y)\right| \cdot \Delta_x + \left|f'_y(x,y)\right| \cdot \Delta_y .$$

Пример

Пусть $x=-0,68\pm0,004$, $y=1,134\pm0,0003$. Требуется найти значение z для $f(x,y)= x^2+\sin y$ и оценить погрешность дифференциальным способом.

$f(x,y) = x^2 + \sin y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(y).$$

$$\Delta_z = \left|2 \cdot (-0,68)\right| \cdot 0,004 + \left|\cos(1,134)\right| \cdot 0,003 = 0,00556691163...$$

$$\approx 0,006$$

$$z = (-0,68)^2 + \sin(1,134) = 1,368511588...$$

$$\approx 1,37$$

$$z = 1,37 \pm 0,006.$$

$$\delta = \frac{0,006}{1,37} = 0,004379562...$$

$$\approx 0,0044 = 0,44\%$$

Пример

Пусть в выражении

$$d = 2,63 - 1,026 \cdot \sqrt{5,40}$$

все числа приближённые и записаны верными цифрами. Требуется найти значение ***d*** и определить абсолютную и относительную погрешности.

Решение

Для функции трех переменных:

$$d = 2{,}63 - 1{,}026 \cdot \sqrt{5{,}40}$$

$$f(x, y, z) = x - y \cdot \sqrt{z}$$

$$f(x,y,z)=x-y\cdot\sqrt{z}$$

$$f'_x=1$$

$$f'_y=-\sqrt{z}$$

$$f'_z=-\frac{y}{2\cdot\sqrt{z}}$$

$$\Delta_d=|1|\cdot 0,01+\left|-\sqrt{5,40}\right|\cdot 0,001+\left|-\frac{1,026}{2\cdot\sqrt{5,40}}\right|\cdot 0,01=$$

$$=0,01+0,002323790007\ldots+0,0022076\ldots\approx 0,0145\ldots$$

$$\Delta_d=0,015,\ d=2,63-1,026\cdot\sqrt{5,40}=0,24579146\approx 0,25.$$

$$\delta_d=\frac{0,015}{0,25}=0,06=6\%.$$

Обратная задача теории погрешностей

Обратная задача теории погрешностей состоит в том, что по заданной абсолютной погрешности функции необходимо определить, каковы должны быть абсолютные погрешности ее аргументов.

Обратная задача теории погрешностей

Одна и та же суммарная оценка погрешности функции нескольких аргументов, вычисляемая, например, дифференциальным способом, может быть получена при различных распределениях погрешностей аргументов.

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i .$$

Обратная задача теории погрешностей

Для решения обратной задачи обычно пользуются принципом «равных влияний»:

$$\frac{\Delta f}{n} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot \Delta x_i,$$ т.е. все слагаемые оценки равны.

Тогда

$$\Delta x_i = \frac{\Delta f}{n} / \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|.$$

Машинная арифметика

В машинных вычислениях:

- числа представлены с ограниченным числом разрядов;
- выполняется огромное число арифметических операций, что приводит к накоплению ошибок;
- промежуточные результаты обычно не отражаются.

Точность представления чисел в ЭВМ

Используется представление действительных чисел в форме с плавающей запятой:

порядок

$$x = \pm M \cdot 10^{P}$$

мантисса

Точность представления чисел зависит от длины разрядной сетки. Данные с одинарной точностью имеют не более 7 верных десятичных знаков, с двойной точностью – 16. Международный стандарт рекомендует внутреннюю разрядность машинной арифметики 80 битов.

Источники вычислительной погрешности

Представление чисел в 2-й системе (конечное 10-ое число может стать бесконечным.)

Результаты отдельных арифметических операций не подвергаются правильному округлению (для сокращения задержек из-за переноса единицы в старшие разряды).

Ограниченный диапазон чисел, представимых в разрядной сетке ЭВМ (проблема машинного нуля и переполнения).

Машинная арифметика

Из-за перечисленных особенностей машинной арифметики на результат может оказать неблагоприятное влияние порядок организации вычислений. Чаще всего прибегают к следующим приемам, уменьшающим вычислительную погрешность:

- Суммирование нужно начинать с малых по модулю слагаемых: в противном случае она могут оказаться несоизмеримыми с накопленной суммой и не окажут на нее должного влияния.
- Следует избегать вычитания близких чисел, при котором происходит катастрофическая потеря верных цифр.
- Последовательное умножение упорядоченных чисел может также привести к потере точности, поэтому целесообразно нарушать порядок умножения таких сомножителей.

Машинная арифметика

Задача. Программно реализовать механизм округления результатов и погрешностей в правильной записи (только верными цифрами).

Прочитать:

Представление чисел в ЭВМ. Программное округление результатов вычислений.

Лапчик М.П., Рагулина М.И., Хеннер Е.К.. Численные методы. – М.: Академия, 2005. – Гл.1 (п.1.2,1.4,1.5).

Контрольные вопросы

1. Что такое абсолютная погрешность приближенного значения величины? относительная погрешность?
2. Для чего вводят понятие предельной погрешности?
3. Как с помощью предельной абсолютной погрешности и известного приближенного значения величины указать ее возможные границы?
4. Какие цифры в записи десятичного числа значащие?
5. Что такое округление числа? Какие способы округления Вам известны?
6. Как округляют границы величины? ее погрешность?
7. Какие цифры приближенного числа называют верными? Как определить количество верных цифр?
8. Как определить погрешность числа, записанного верными цифрами?

Контрольные вопросы

9. Как формулируется основная задача теории погрешностей?
10. Как по погрешностям исходных чисел оценить погрешность результата арифметических действий?
11. Как оценить погрешность функции по способу границ?
12. Какую формулу используют в дифференциальном методе оценки погрешности? В каком случае можно не вычислять максимумы частных производных? Чем они заменяются?
13. Как выполняются вычисления без точного учета погрешностей?
14. В чем состоит обратная задача теории погрешностей? Как она решается
15. Какие приемы программирования могут уменьшить вычислительную погрешность?
16. Как программно округлить результат до верных цифр?