33.6. Приведение квадратичной формы к главным осям

Любая квадратичная форма $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n) = \vec{x} A x^{\downarrow}$

приводится к каноническому виду $\varphi = \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2$

ортогональным преобразованием неизвестных

$x^{\downarrow} = Q z^{\downarrow}$, $Q -$ ортогональная матрица, столбцами

которой служат **компоненты собственных векторов соответствующего симметрического преобразования;**

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^{\mathrm{T}} A Q, \; A -$$ матрица квадратичной формы φ

Всякая симметрическая матрица диагонализируема.

Пример $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$

Пример $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Пример $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

λ – собственное значение A

$\Leftrightarrow$ $|A - \lambda E| = 0$

Пример $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

λ – собственное значение A

$\Leftrightarrow$ $| A - \lambda E | = 0$

$$| A - \lambda E | = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 4)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

Пример $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

λ – собственное значение A $\Leftrightarrow$ $|A - \lambda E| = 0$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 4)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

Собственные значения матрицы A: $\lambda_{1,2} = 2, \ \ \lambda_3 = -4;$

Канонический вид квадратичной формы: $2z_1^2 + 2z_2^2 - 4z_3^2$

Пример $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

λ – собственное значение A $\Leftrightarrow$ $|A - \lambda E| = 0$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 4)$$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

Собственные значения матрицы A: $\lambda_{1,2} = 2, \ \ \lambda_3 = -4;$

Канонический вид квадратичной формы: $2z_1^2 + 2z_2^2 - 4z_3^2$

Для отыскания собственных векторов решаем ОСЛУ $(*0): \ (A - \lambda E)x^{\downarrow} = 0^{\downarrow}$

С.з. $\lambda_{1,2} = 2:$

$$A - \lambda_{2,3} E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

С.з. $\lambda_{1,2} = 2:$

$$A - \lambda_{2,3} E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

С.з. $\lambda_{1,2} = 2$:

$$A - \lambda_{2,3} E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – ФСР ОСЛУ $(*0)$: $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$; $(x_2, x_3 -$ свободные неизвестные)

С.з. $\lambda_{1,2}=2:$

$$A-\lambda_{2,3}E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\bar{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \bar{v}_2=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ – ФСР ОСЛУ $(*0):\ x_1+x_2-2x_3=0;$ $(x_2, x_3 -$ свободные неизвестные)

Общий вид собственного вектора матрицы A при собственном значении $\lambda_{1,2}=2:\ s\,\bar{v}_1+t\,\bar{v}_2,$ где $\left[\begin{array}{l}s\neq 0,\\ t\neq 0;\end{array}\right.$

С.з. $\lambda_{1,2}=2:$

$$A-\lambda_{2,3}E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\bar{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \bar{v}_2=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ – ФСР ОСЛУ $(*0):\ x_1+x_2-2x_3=0;$ $(x_2, x_3 -$ свободные неизвестные)

Общий вид собственного вектора матрицы A при собственном значении $\lambda_{1,2}=2:\ s\bar{v}_1+t\bar{v}_2,$ где $\left[\begin{array}{l}s\neq 0,\\ t\neq 0;\end{array}\right.$

Выбранные векторы неортогональны, а нам нужен **ортонормированный** базис из собственных векторов A.

Можно применить процесс ортогонализации:

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \bar{v}_2 - \frac{(\bar{v}_2, \bar{f}_1)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} \bar{f}_1$$

Можно применить процесс ортогонализации:

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \bar{v}_2 - \frac{(\bar{v}_2, \bar{f}_1)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} \bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Можно применить процесс ортогонализации:

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \bar{v}_2 - \frac{(\bar{v}_2, \bar{f}_1)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} \bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируя эти векторы, получим первые два вектора
искомого ортонормированного базиса:

$$\bar{h}_1 = \frac{1}{|\bar{f}_1|} \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{h}_2 = \frac{1}{|\bar{f}_2|} \bar{f} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Можно применить процесс ортогонализации:

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \bar{f}_2 = \bar{v}_2 - \frac{(\bar{v}_2, \bar{f}_1)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)}\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируя эти векторы, получим первые два вектора
искомого ортонормированного базиса:

$$\bar{h}_1 = \frac{1}{|\bar{f}_1|}\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{h}_2 = \frac{1}{|\bar{f}_2|}\bar{f} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Третий вектор искомого базиса можно угадать –
он должен быть ортогонален найденным.

Можно применить процесс ортогонализации:

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \bar{v}_2 - \frac{(\bar{v}_2, \bar{f}_1)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} \bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируя эти векторы, получим первые два вектора искомого ортонормированного базиса:

$$\bar{h}_1 = \frac{1}{|\bar{f}_1|} \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{h}_2 = \frac{1}{|\bar{f}_2|} \bar{f} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Третий вектор искомого базиса можно угадать –

он должен быть ортогонален найденным.

Собственные векторы **симметрической** матрицы, соответствующие **различным** собственным значениям, **попарно ортогональны.**

C. 3. $\lambda_3 = -4: \; A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$

С. 3. $\lambda_3 = -4:\ A-\lambda_3 E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 24 & 12 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

С. 3. $\lambda_3 = -4:\ A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 24 & 12 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С.з. $\lambda_3 = -4: \; A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 24 & 12 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ – ФСР ОСЛУ $(*0): \; \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ (при свободном неизвестном $x_2 = 1$).

С. з. $\lambda_3 = -4: \ A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 24 & 12 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Векто р $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ – ФСР ОСЛУ $(*0): \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

(при свободном неизвестном $x_2 = 1$).

$$\bar{h}_3 = \frac{1}{|\bar{u}|}\bar{u} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

– единичный собственный вектор матрицы A при собственном значении $\lambda_3 = -4$.

Столбцами искомой **ортогональной** матрицы перехода Q (матрицы замены переменных) служат найденные единичные собственные векторы матрицы A.

Столбцами искомой **ортогональной** матрицы перехода
Q (матрицы замены переменных) служат
найденные
единичные собственные векторы матрицы
A:

$$Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Столбцами искомой **ортогональной** матрицы перехода

Q (матрицы замены переменных) служат

единичные собственные векторы матрицы A.

найденные

Ответ:

$$\varphi = 2z_1^2 + 2z_2^2 - 4z_3^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Столбцами искомой **ортогональной** матрицы перехода

Q (матрицы замены переменных) служат

единичные собственные векторы матрицы A,

найденные

Ответ:

$$\varphi = 2z_1^2 + 2z_2^2 - 4z_3^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Знаки единичных векторов $\bar{h} = \dfrac{\pm 1}{|\bar{u}|} \cdot \bar{u}$ обычно выбирают так, чтобы $\det Q = 1.$

34. Кривые второго порядка

34. Кривые второго порядка

34.1. Общее уравнение

$O, \bar{i}, \bar{j}$ – **прямоугольная декартова система координат**

34. Кривые второго порядка

34.1. Общее уравнение

$O, \bar{i}, \bar{j}$ – **прямоугольная декартова система координат**

Кривой второго порядка называется множество точек плоскости, задаваемое уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2b_1x + 2b_2y + c = 0.$$

34. Кривые второго порядка

34.1. Общее уравнение

$O, \bar{i}, \bar{j}$ – **прямоугольная декартова система координат**

Кривой второго порядка называется множество точек плоскости, задаваемое уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2b_1x + 2b_2y + c = 0.$$

34.2. Заменой переменных $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ уравнение можно упростить, приведя квадратичную форму $\varphi = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ к главным осям **(п. 33.6):**

$$\varphi = \lambda_1 \widetilde{x}^2 + \lambda_2 \widetilde{y}^2,$$

$$\varphi = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2,$$

выбирая на плоскости новый базис $\bar{\tilde{i}}, \bar{\tilde{j}}$:

$$|\bar{\tilde{i}}| = |\bar{\tilde{j}}| = 1; \quad \bar{\tilde{i}} \perp \bar{\tilde{j}}$$

$$\varphi = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2,$$

выбирая на плоскости новый базис $\bar{\tilde{i}}, \bar{\tilde{j}}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\tilde{i}} &= q_{11}\,\bar{i} + q_{21}\,\bar{j} \\ \bar{\tilde{j}} &= q_{12}\,\bar{i} + q_{22}\,\bar{j} \end{aligned}}$$

$$|\,\bar{\tilde{i}}\,| = |\,\bar{\tilde{j}}\,| = 1; \quad \bar{\tilde{i}} \perp \bar{\tilde{j}}$$

$$\varphi = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2,$$

выбирая на плоскости новый базис $\bar{\tilde{i}}, \bar{\tilde{j}}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\tilde{i}} &= q_{11}\bar{i} + q_{21}\bar{j} \\ \bar{\tilde{j}} &= q_{12}\bar{i} + q_{22}\bar{j} \end{aligned}}$$

$$|\bar{\tilde{i}}| = |\bar{\tilde{j}}| = 1; \ \bar{\tilde{i}} \perp \bar{\tilde{j}}$$

$\begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{pmatrix}$ -- собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ квадратичной формы φ,

соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2.

34.3. Выбирая, если нужно, новое начало координат, $\hat{O}(\widetilde{x}_0;\widetilde{y}_0)$ − заменой переменных $\begin{pmatrix}\widetilde{x}\\ \widetilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\widetilde{x}_0\\ \widetilde{y}_0\end{pmatrix}-$

34.3. Выбирая, если нужно, новое начало координат, $\hat{O}(\widetilde{x}_0;\widetilde{y}_0)$ − заменой переменных $\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{x}_0 \\ \widetilde{y}_0 \end{pmatrix} -$

уравнение кривой приводят к ***каноническому виду*** − одному из девяти:

34.3. Выбирая, если нужно, новое начало координат, $\hat{O}(\widetilde{x}_0;\widetilde{y}_0)$ − заменой переменных $\begin{pmatrix}\widetilde{x}\\ \widetilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\widetilde{x}_0\\ \widetilde{y}_0\end{pmatrix}$ −

уравнение кривой приводят к ***каноническому виду*** − одному из девяти:

1)
2) $$\frac{\hat{x}^2}{a^2}+\frac{\hat{y}^2}{b^2}=\pm 1$$ − эллипс

$$(a \geq b > 0)$$

34.3. Выбирая, если нужно, новое начало координат, $\hat{O}(\tilde{x}_0;\tilde{y}_0)$ − заменой переменных $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\tilde{x}_0\\ \tilde{y}_0\end{pmatrix}$ −

уравнение кривой приводят к ***каноническому виду*** − одному из девяти:

1)
2) $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2}+\dfrac{\hat{y}^2}{b^2}=\pm 1$ − эллипс $(a \geq b > 0)$
- действительный (+)
- мнимый (−) ;

34.3. Выбирая, если нужно, новое начало координат, $\hat{O}(\widetilde{x}_0;\widetilde{y}_0)$ − заменой переменных $\begin{pmatrix}\widetilde{x}\\ \widetilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\widetilde{x}_0\\ \widetilde{y}_0\end{pmatrix}$ −

уравнение кривой приводят к ***каноническому виду*** − одному из девяти:

1), 2) $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2}+\dfrac{\hat{y}^2}{b^2}=\pm 1$ − эллипс $(a\geq b>0)$ $\left[\begin{array}{l}\text{действительный (+)}\\ \text{мнимый (−);}\end{array}\right.$

3) $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2}-\dfrac{\hat{y}^2}{b^2}=1$ − гипербола $(a, b>0)$;

4)

5) $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2} \mp \dfrac{\hat{y}^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся прямых $\left[\begin{array}{l}\text{действительных } (-) \\ \text{мнимых } (+)\end{array}\right.$ $(a \geq b > 0);$

1–5 – уравнения центральных кривых второго порядка.

---

6) $\hat{y}^2 = 2p\hat{x}$ – парабола $(p > 0);$

7)

8) $\hat{y}^2 = \pm a^2$ – пара параллельных прямых $\left[\begin{array}{l}\text{действительных } (+) \\ \text{мнимых } (-)\end{array}\right.$ $(a > 0);$

9) $\hat{y}^2 = 0$ – пара совпавших прямых.

4)

5) $\frac{\hat{x}^2}{a^2} - \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся прямых

4)

5) $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2} \,\square\, \dfrac{\hat{y}^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся прямых $\left[\begin{array}{l}\text{действительных } (-) \\ \text{мнимых } (+)\end{array}\right.$

$(a \geq b > 0);$

4)

5) $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2} \mp \dfrac{\hat{y}^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся прямых $\left[\begin{array}{l}\text{действительных } (-)\\ \text{мнимых } (+)\end{array}\right.$ $(a \geq b > 0);$

1–5 – уравнения центральных кривых второго порядка.

4)

5) $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2} \boxtimes \dfrac{\hat{y}^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся прямых

действительных (−)

мнимых (+)

$(a \geq b > 0);$

1–5 – уравнения центральных кривых второго порядка.

---

6) $\hat{y}^2 = 2p\hat{x}$ – парабола $(p > 0);$

4)
5) $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2} \mp \dfrac{\hat{y}^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся прямых $\left[\begin{array}{l}\text{действительных } (-) \\ \text{мнимых } (+)\end{array}\right.$

$(a \geq b > 0);$

1–5 – уравнения центральных кривых второго порядка.

---

6) $\hat{y}^2 = 2p\hat{x}$ – парабола $(p > 0);$

7)
8) $\hat{y}^2 = \pm a^2$ – пара параллельных прямых

4)
5) $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2} \boxtimes \dfrac{\hat{y}^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся прямых

действительных (–)
мнимых (+)

$(a \geq b > 0);$

1–5 – уравнения центральных кривых второго порядка.

---

6) $\hat{y}^2 = 2p\hat{x}$ – парабола $(p > 0);$

7)
8) $\hat{y}^2 = \pm a^2$ – пара параллельных прямых

действительных (+)
мнимых (–) $(a > 0);$

4)
5) $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2} \boxtimes \dfrac{\hat{y}^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся прямых

действительных (−)
мнимых (+)

$(a \geq b > 0);$

1–5 – уравнения центральных кривых второго порядка.

---

6) $\hat{y}^2 = 2p\,\hat{x}$ – парабола $(p>0);$

7)
8) $\hat{y}^2 = \pm a^2$ – пара параллельных прямых

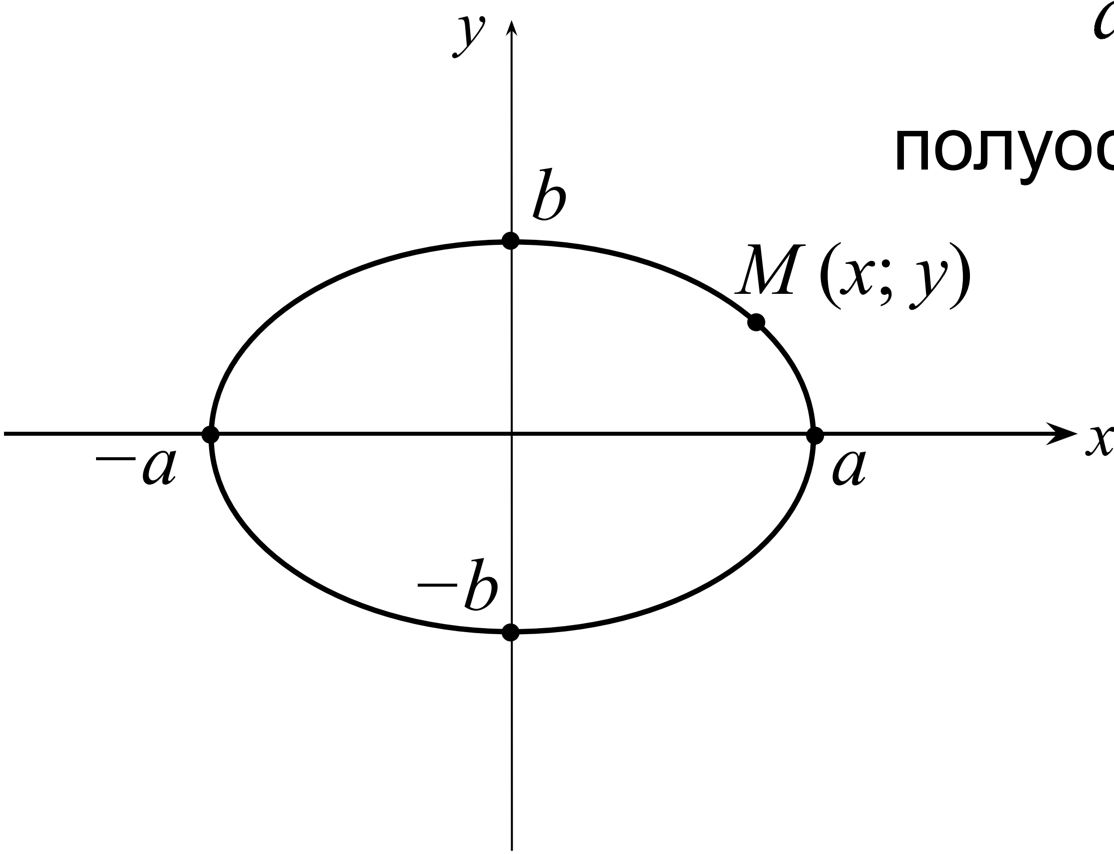
действительных (+)
мнимых (−) $(a > 0);$

9) $\hat{y}^2 = 0$ – пара совпавших прямых.

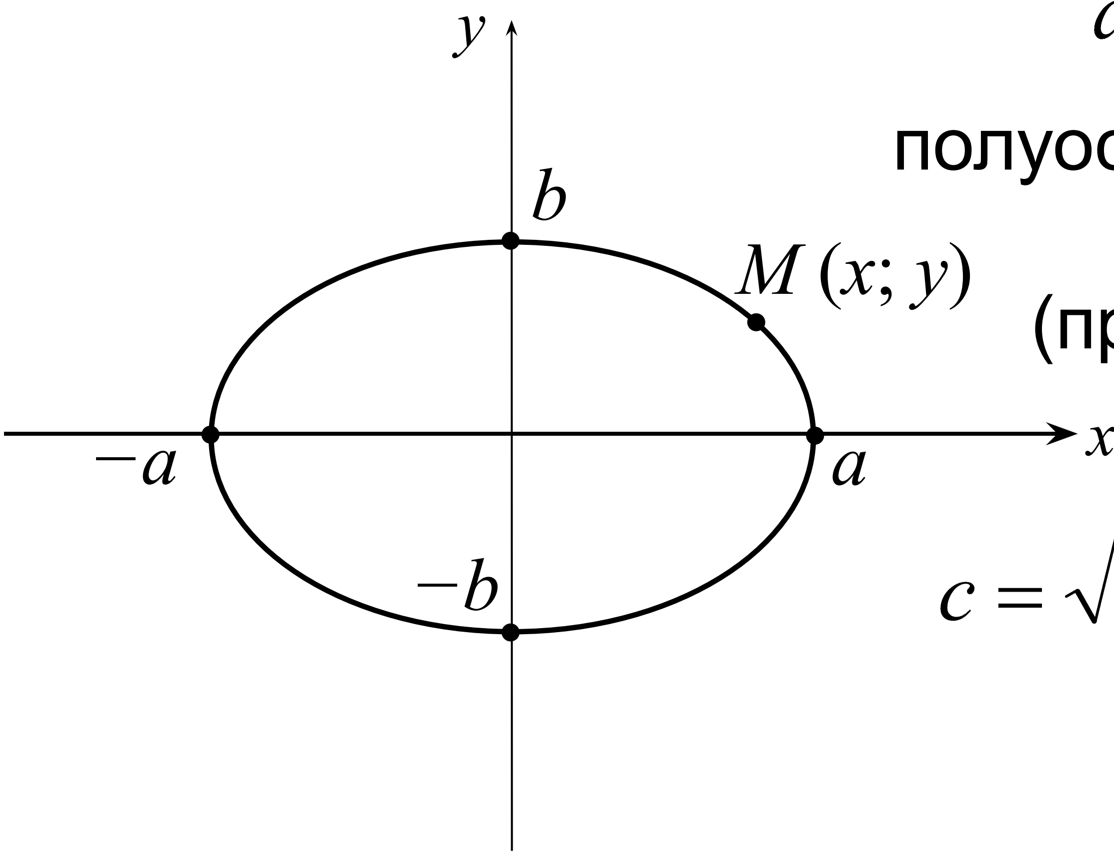
34.4. Эллипс действительный $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

34.4. Эллипс действительный $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

полуоси $a \geq b > 0$;



34.4. Эллипс действительный $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

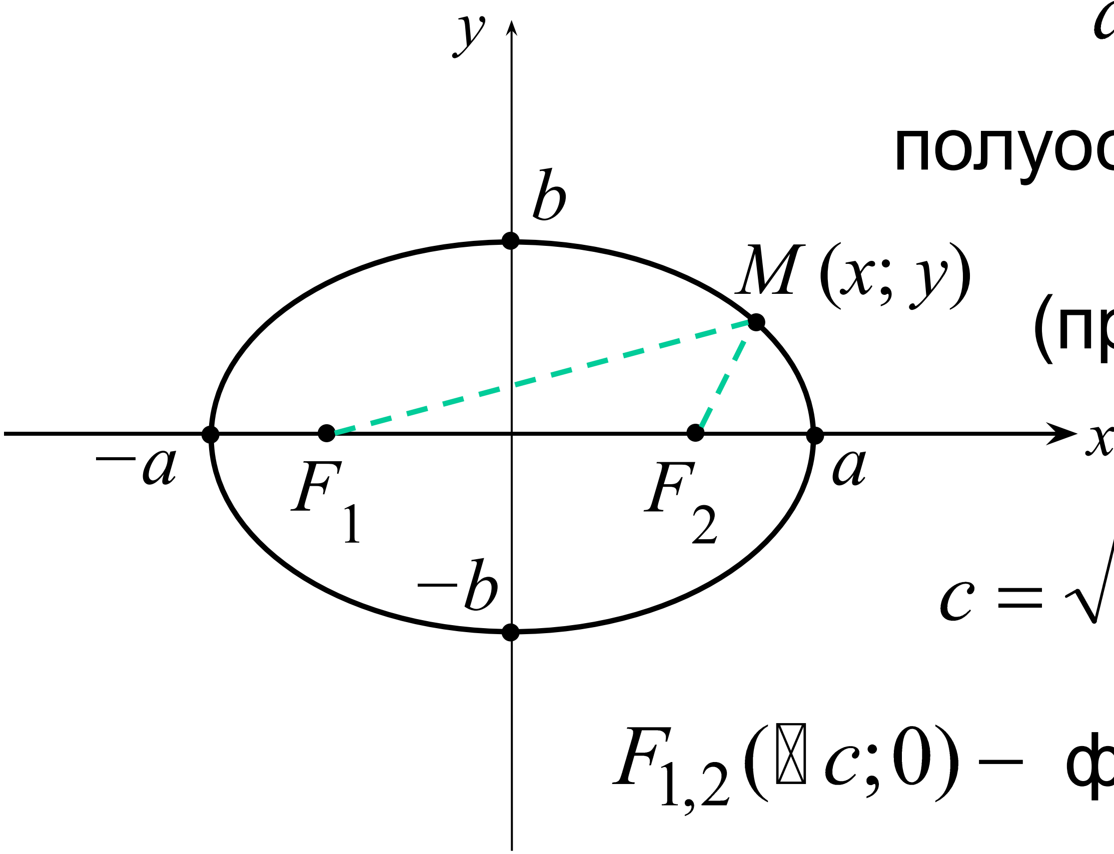


полуоси $a \geq b > 0$;

(при $a = b$ − окружность радиуса a);

$c=\sqrt{a^2-b^2}$;

34.4. Эллипс действительный $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



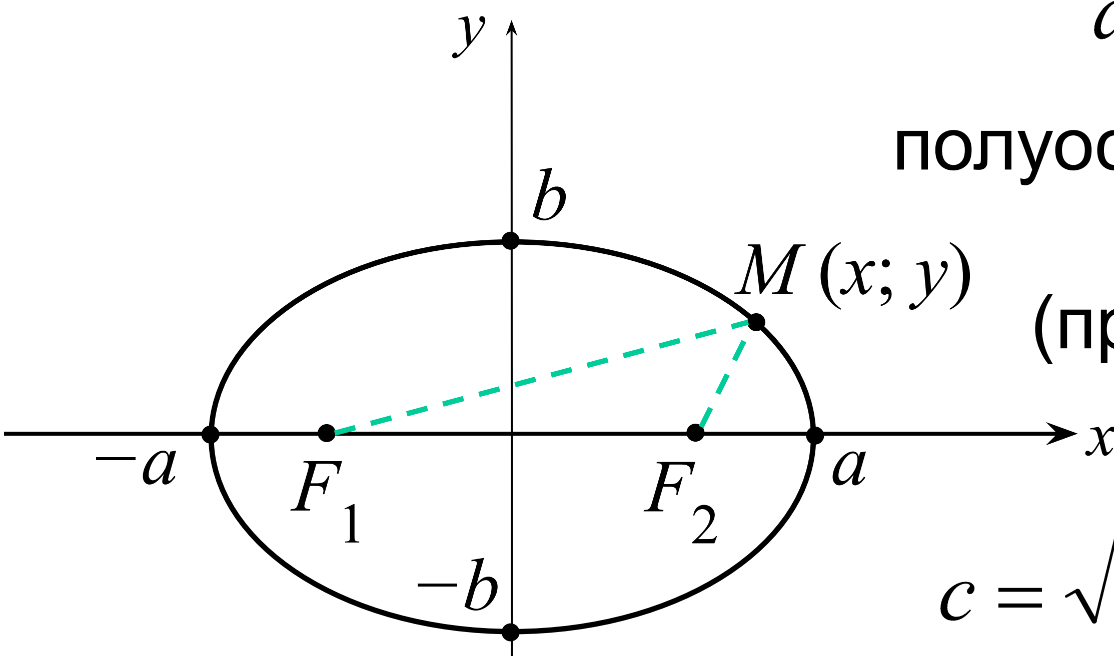
полуоси $a \geq b > 0$;

(при $a = b$ – окружность радиуса a);

$c=\sqrt{a^2-b^2}$;

$F_{1,2}(\pm c;0)$ – фокусы;

34.4. Эллипс действительный $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



полуоси $a \geq b > 0$;

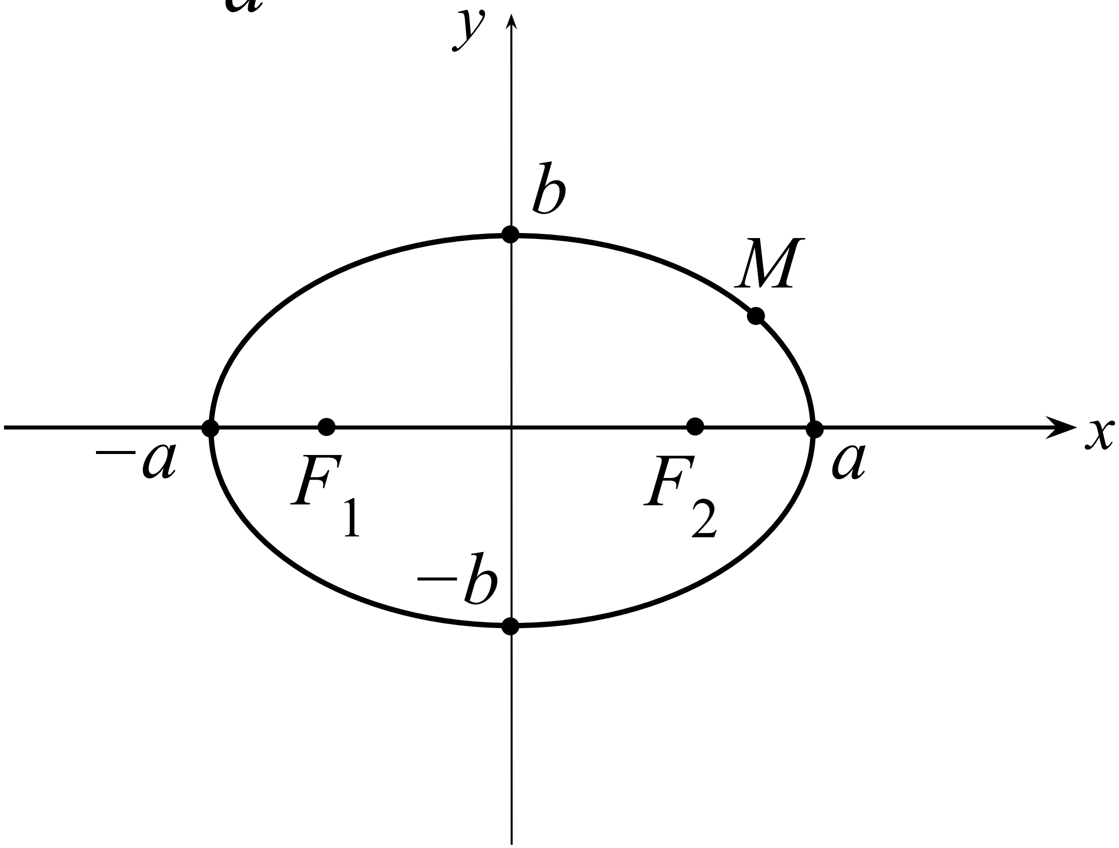
(при $a = b$ − окружность радиуса a);

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$;

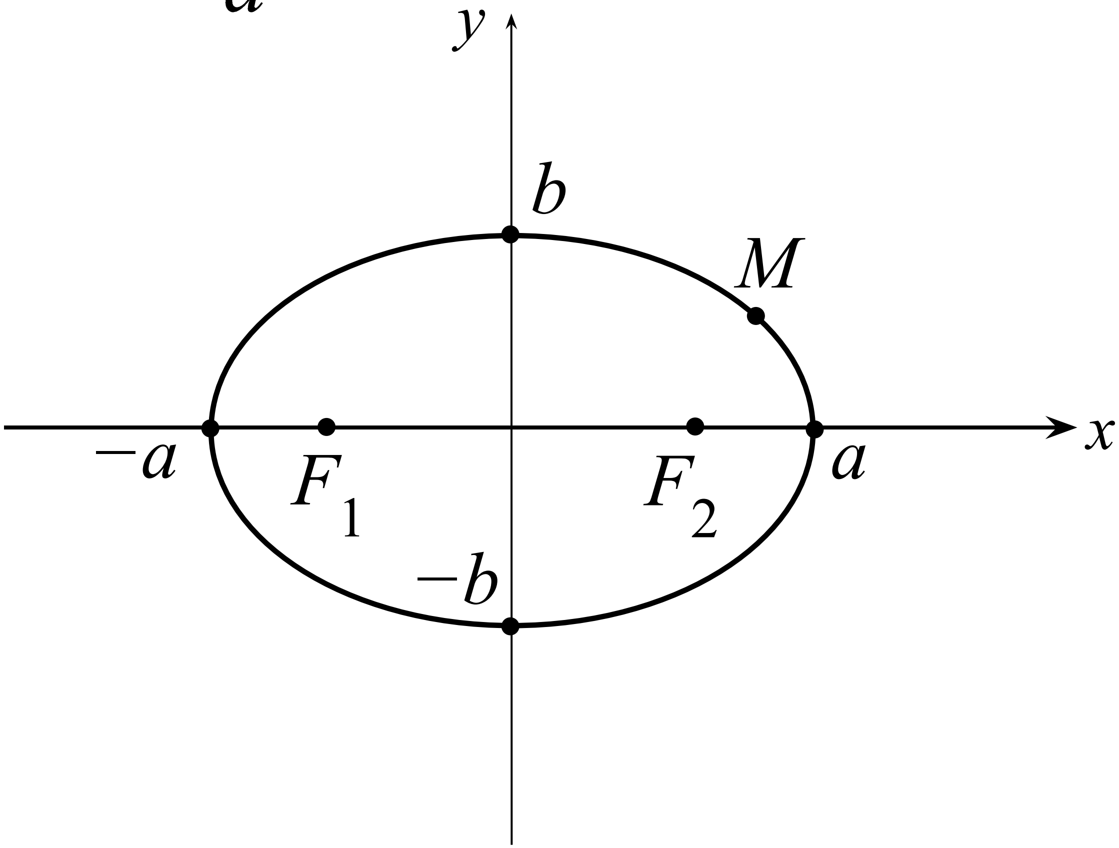
$F_{1,2}(\pm c; 0)$ − фокусы;

$$\boxed{M \in Э \Leftrightarrow |MF_1| + |MF_2| = 2a}$$

$$e = \frac{c}{a} < 1 -$$ эксцентриситет;



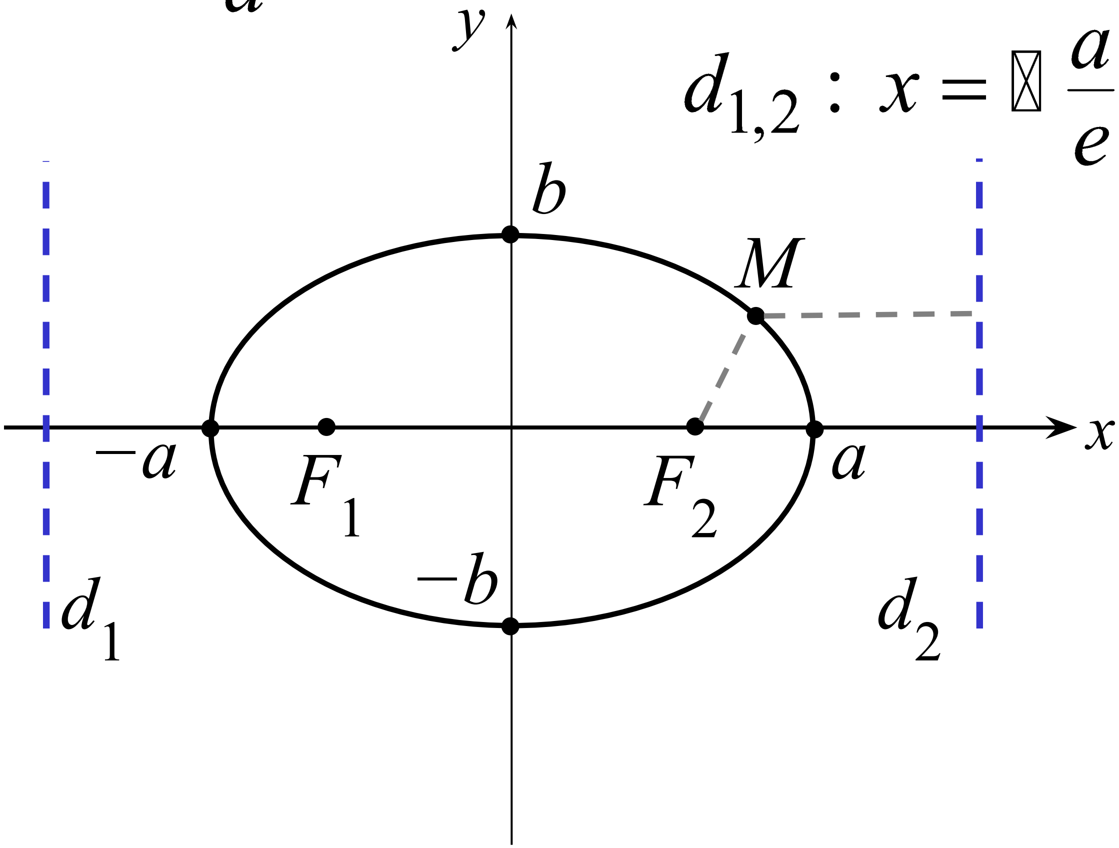
$e = \dfrac{c}{a} < 1 -$ эксцентриситет;



$$|MF_{1,2}| = a \pm ex$$

$e = \frac{c}{a} < 1 -$ эксцентриситет;

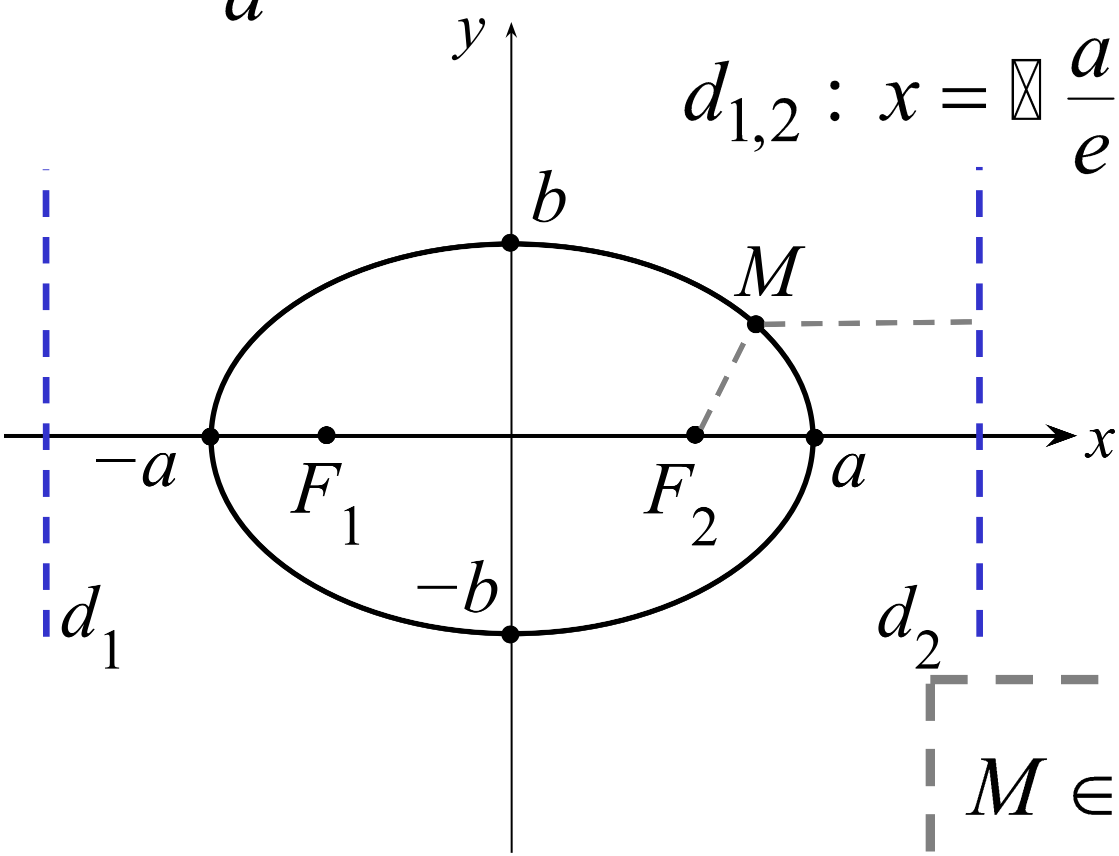
$d_{1,2} : \; x = \pm \frac{a}{e}$ – директрисы:



$| M F_{1,2} | = a \pm ex$

$$e = \frac{c}{a} < 1 -$$ эксцентриситет;

$$d_{1,2}: \ x = \pm \frac{a}{e}$$ – директрисы:

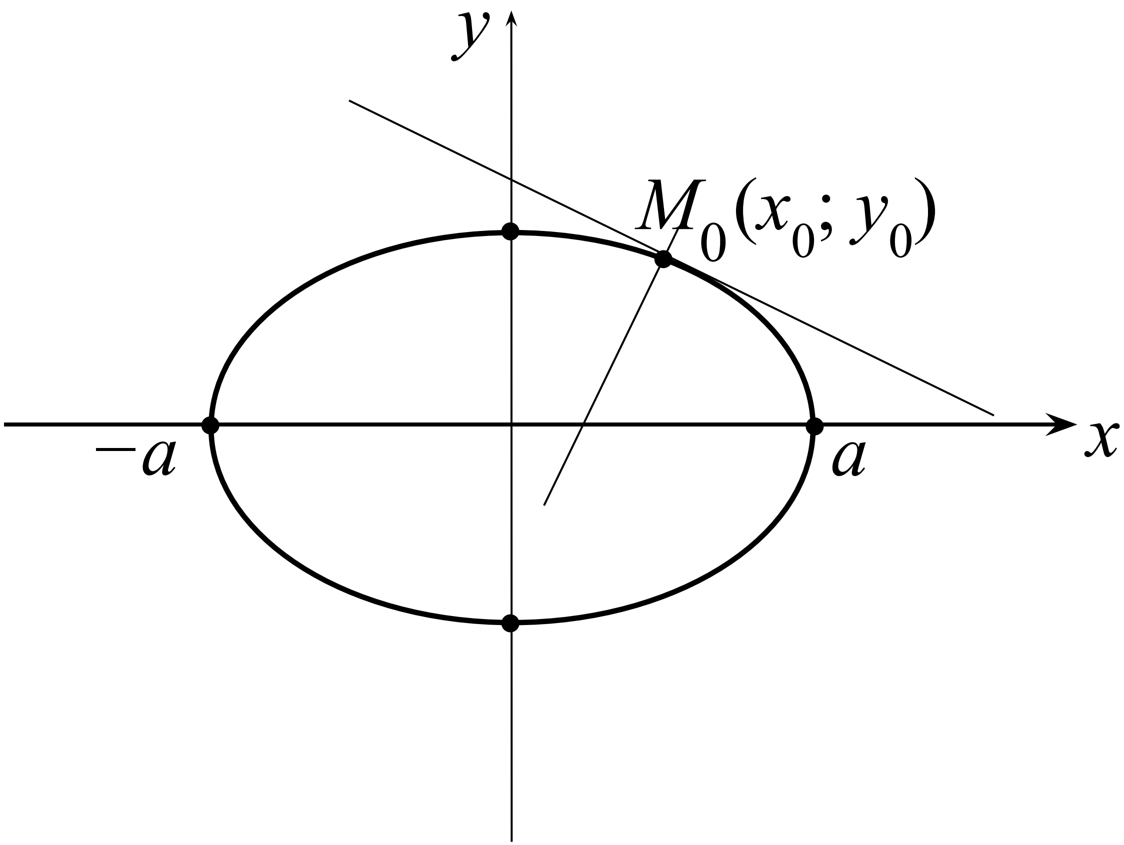


$$|MF_{1,2}| = a \pm ex$$

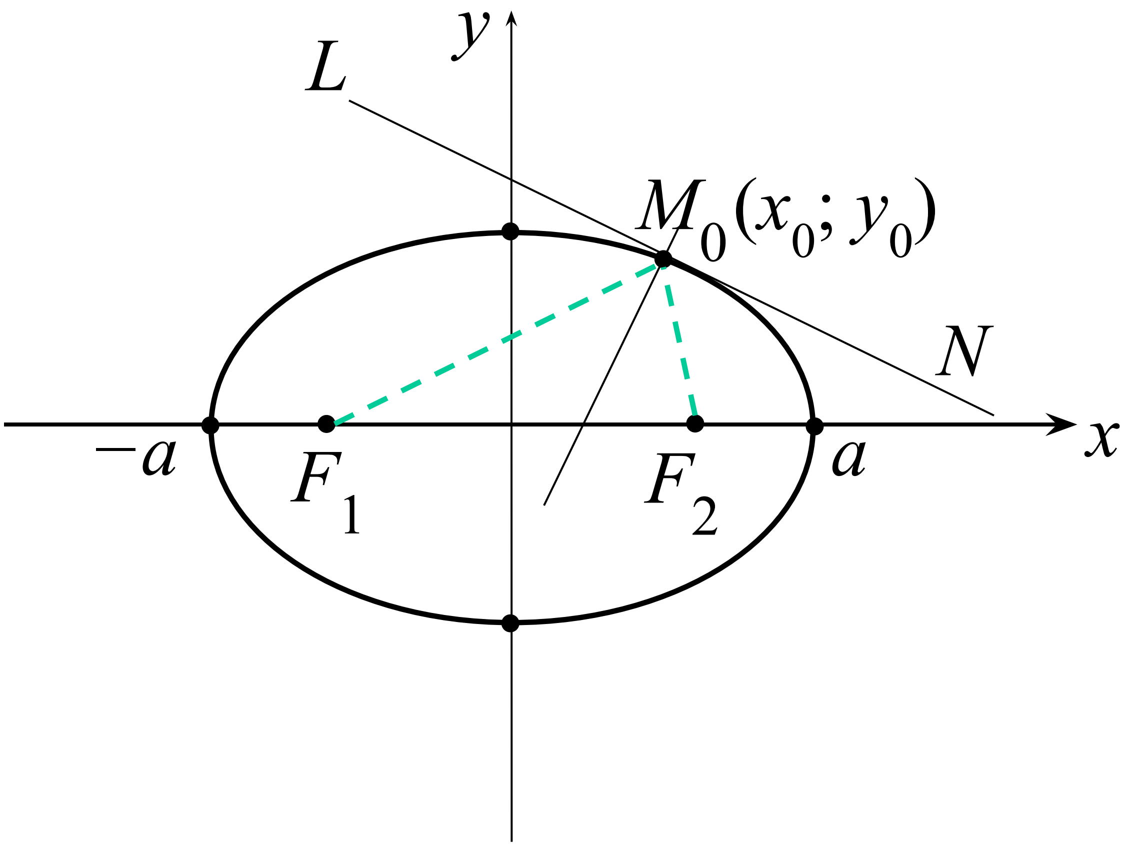
$$\boxed{M \in Э \Leftrightarrow \frac{|MF_{1,2}|}{\rho(M, d_{1,2})} = e}$$

$\rho(M, d_1)$ – расстояние от точки M до директрисы d_1

Касательная к эллипсу:

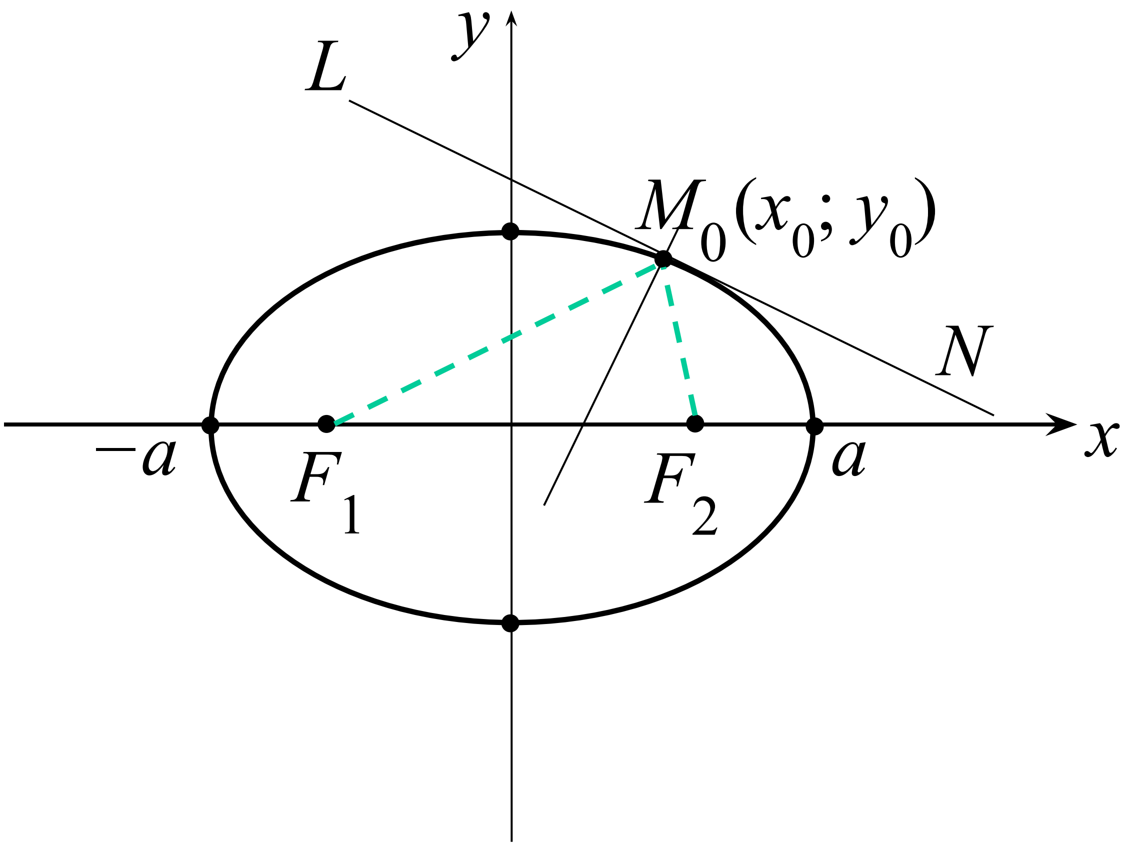


Касательная к эллипсу:



Свойство касательной: $\angle LM_0F_1 = \angle NM_0F_2$.

Касательная к эллипсу:



Уравнение касательной в точке $M_0(x_0; y_0) \in Э$:

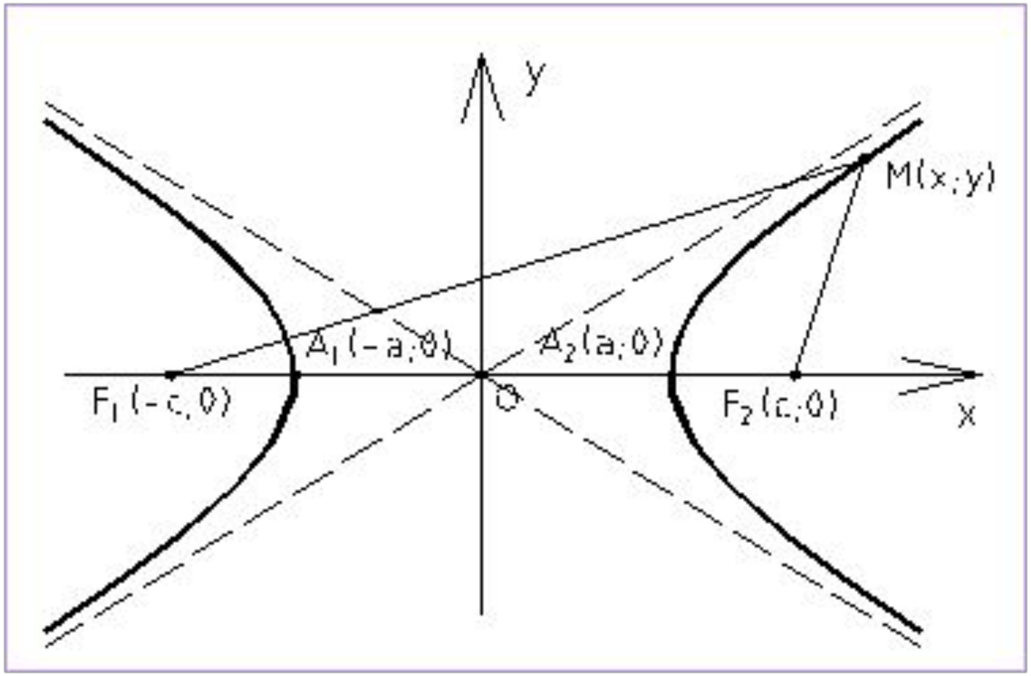
$$\frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{y\,y_0}{b^2} = 1$$

Свойство касательной: $\angle LM_0F_1 = \angle NM_0F_2$.

34.5. Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

полуоси $a,b>0;$

34.5. Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$



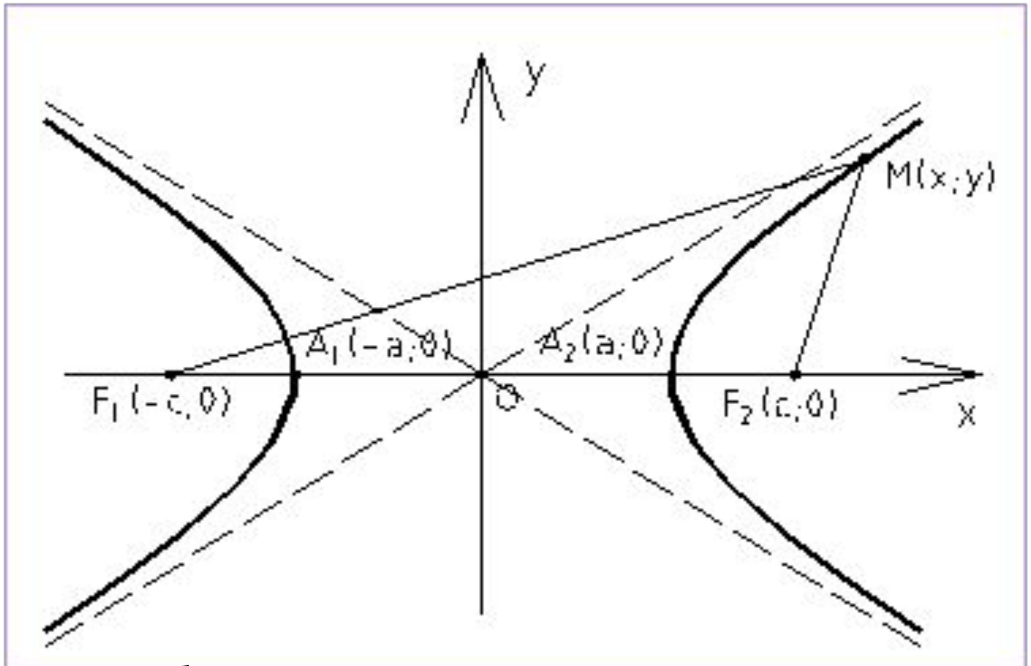
полуоси $a,b>0;$

$$c=\sqrt{a^2+b^2};$$

$$e=\frac{c}{a}>1-$$

эксцентриситет;

34.5. Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$



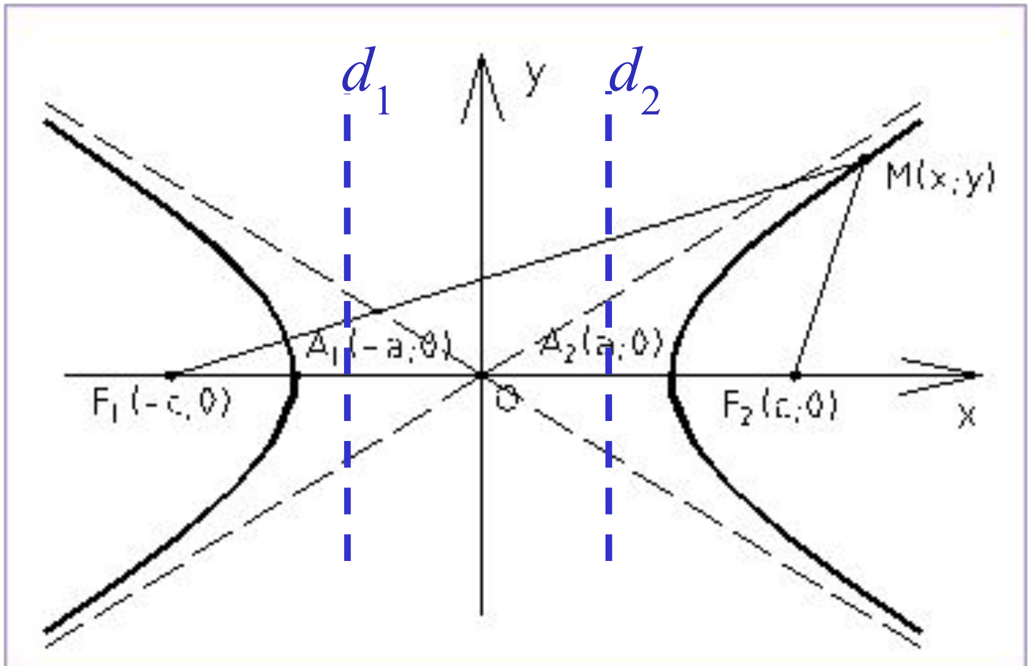
полуоси $a,b>0;$

$c=\sqrt{a^2+b^2};$

$e=\dfrac{c}{a}>1-$ эксцентриситет;

$y=\pm\dfrac{b}{a}\,x-$ асимптоты;

34.5. Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$



полуоси $a,b>0;$

$c=\sqrt{a^2+b^2};$

$e=\dfrac{c}{a}>1-$ эксцентриситет;

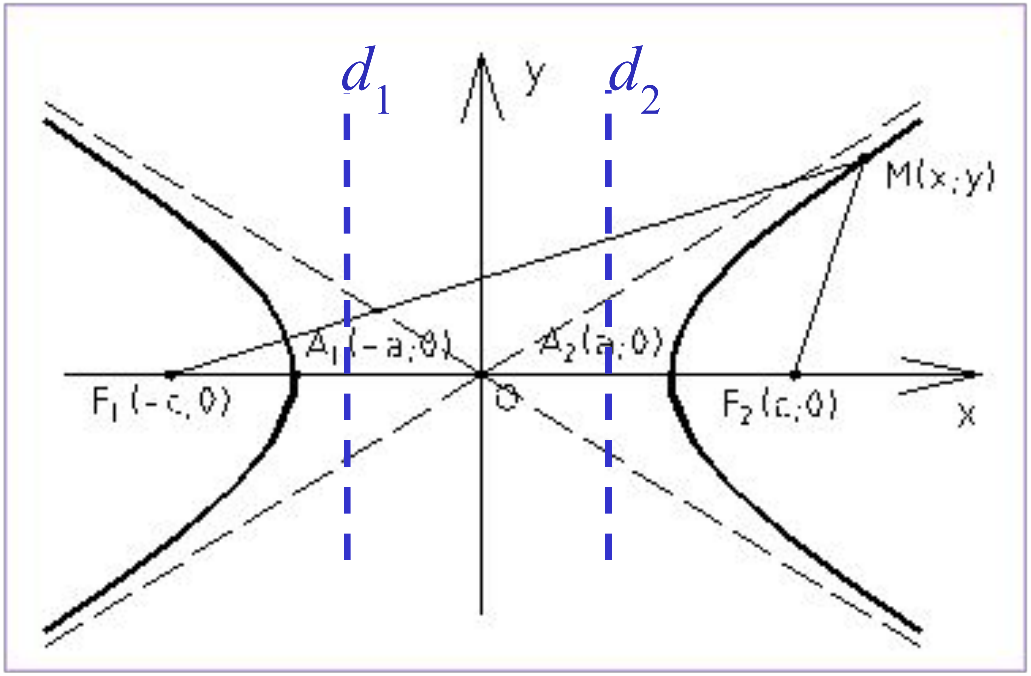
$F_{1,2}(\pm c;0)-$ фокусы;

$y=\pm\dfrac{b}{a}x-$ асимптоты;

$d_{1,2}:x=\pm\dfrac{a}{e}-$ директрисы:

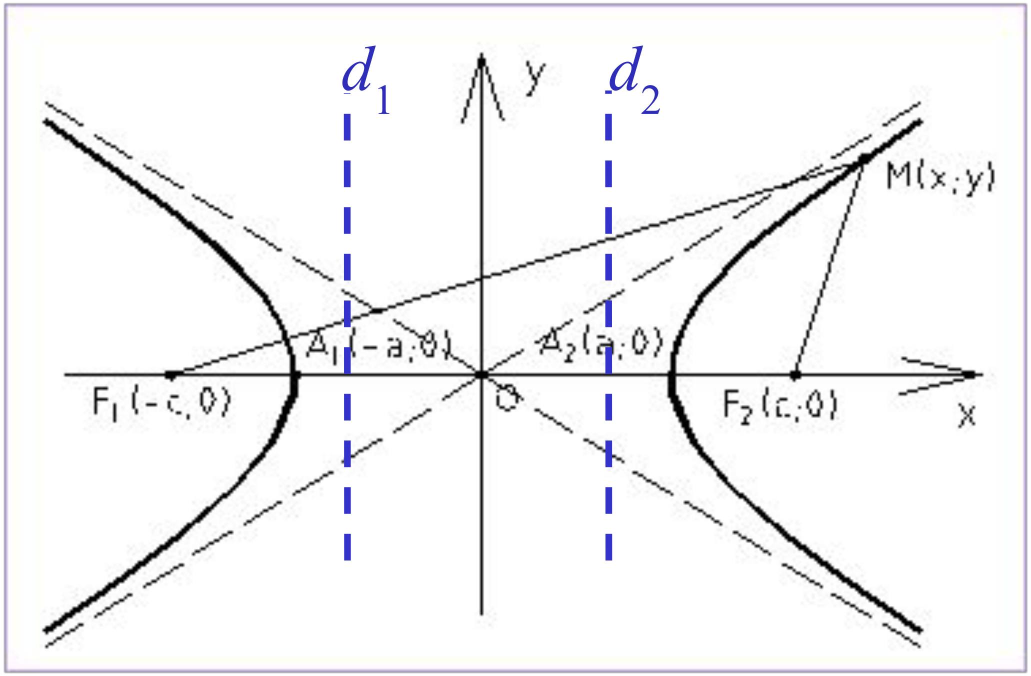
34.5. Гипербола

$$M \in \mathbf{\Gamma} \Leftrightarrow \left| |MF_1| - |MF_2| \right| = 2a$$



34.5. Гипербола

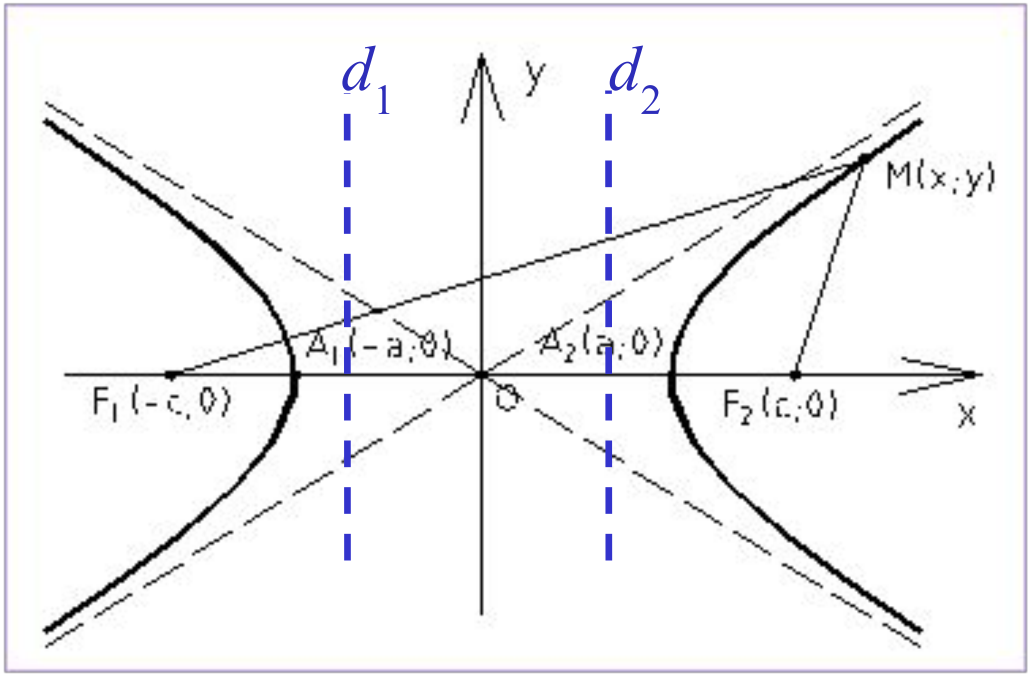
$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \left| |MF_1| - |MF_2| \right| = 2a$$



$$\Leftrightarrow \frac{|M F_{1,2}|}{\rho(M, d_{1,2})} = e;$$

34.5. Гипербола

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \left|\,|MF_1| - |MF_2|\,\right| = 2a$$

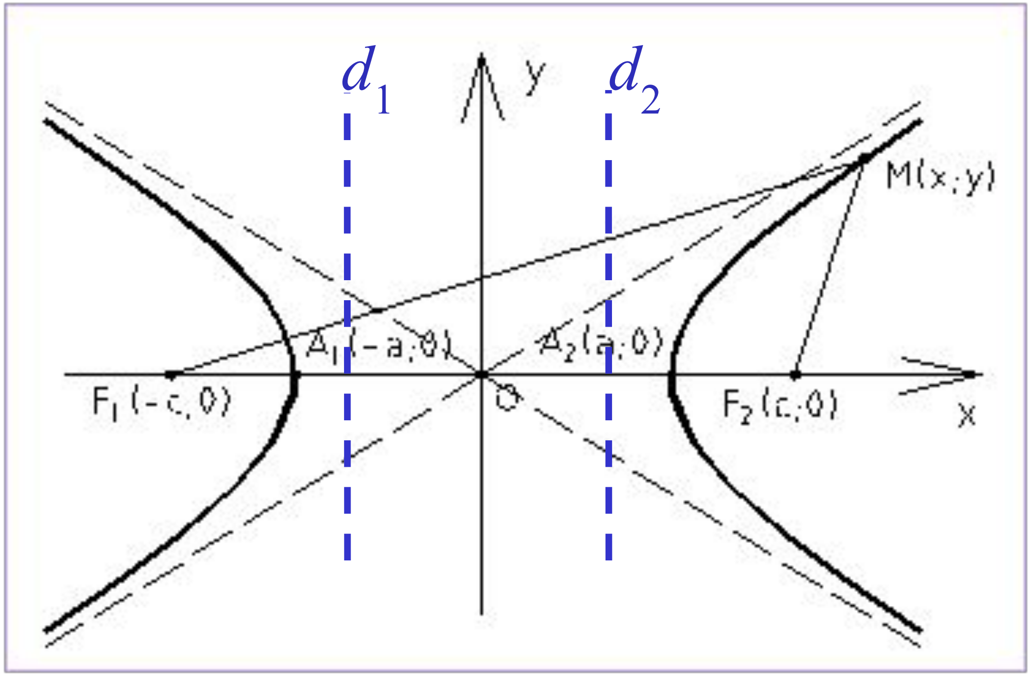


$$\Leftrightarrow \frac{|M\,F_{1,2}|}{\rho(M, d_{1,2})} = e;$$

$$|M\,F_{1,2}| = a \pm ex$$

34.5. Гипербола

$$M \in \mathbf{\Gamma} \Leftrightarrow \big|\, |MF_1| - |MF_2| \,\big| = 2a$$



$$\Leftrightarrow \frac{|M F_{1,2}|}{\rho(M, d_{1,2})} = e;$$

$$|M F_{1,2}| = a \pm ex$$

Уравнение касательной

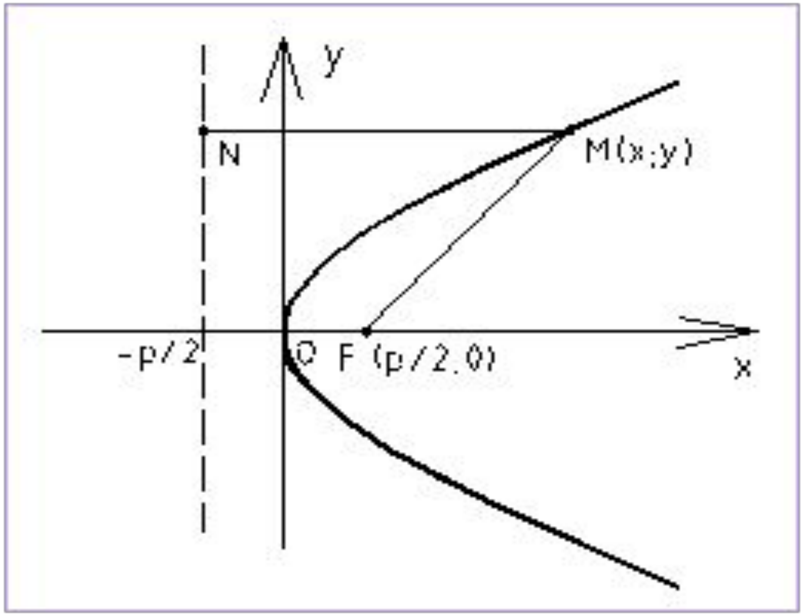
в точке $M_0(x_0; y_0) \in \mathbf{\Gamma}:$ $\quad \dfrac{x x_0}{a^2} - \dfrac{y y_0}{b^2} = 1$

34.5. Парабола $y^2 = 2px$

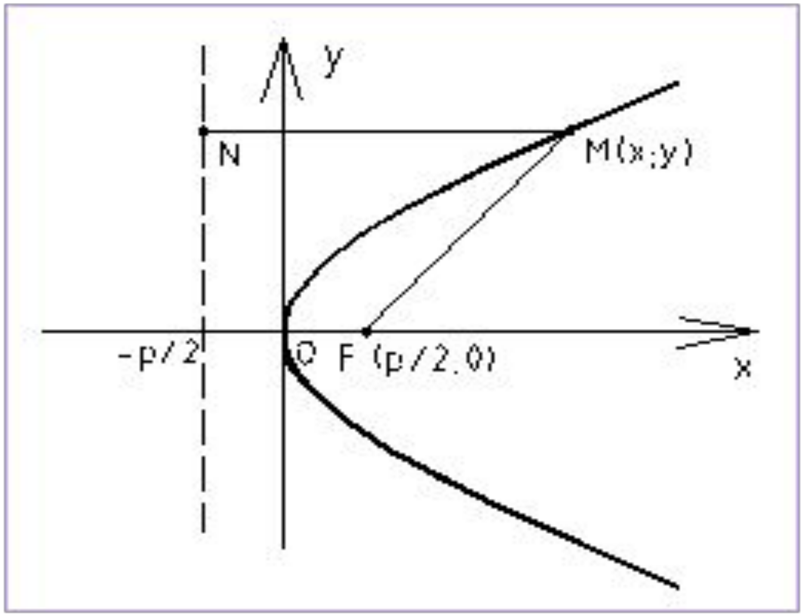
34.5. Парабола

$$y^2 = 2px$$

$$d:\ x = -\frac{p}{2}\ -$$ директриса:



34.5. Парабола $y^2 = 2px$



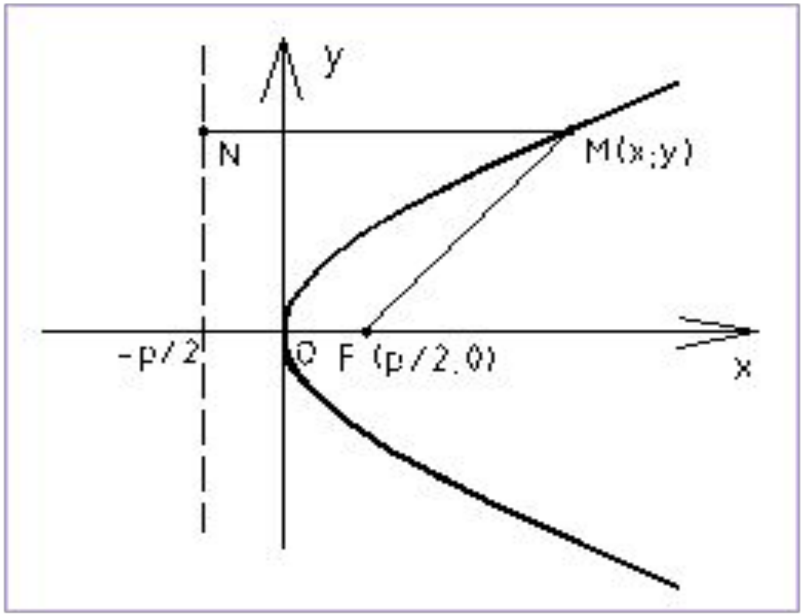
$d:\ x = -\dfrac{p}{2}$ – директриса:

$F\left(\dfrac{p}{2};\,0\right)$ – фокус;

$$M \in \mathbf{\Pi} \Leftrightarrow |FM| = \rho(M, d)$$

34.5. Парабола

$$y^2 = 2px$$



$d: \; x = -\dfrac{p}{2}$ – директриса:

$F\left(\dfrac{p}{2};\,0\right)$ – фокус;

$$M \in \mathbf{\Pi} \Leftrightarrow |FM| = \rho(M, d)$$

Уравнение касательной

в точке $M_0(x_0; y_0) \in \mathbf{\Pi}: \quad y\,y_0 = p\,x + p\,x_0$

34.6. Система координат $\hat{O}, \overline{\tilde{i}}, \overline{\tilde{j}},$ в которой уравнение кривой второго порядка имеет канонический вид, называется ***канонической***.

34.6. Система координат $\hat{O}, \overline{\tilde{i}}, \overline{\tilde{j}},$ в которой уравнение кривой второго порядка имеет канонический вид, называется ***канонической***.

Каноническая система координат определяется, вообще говоря, **неоднозначно.**

35. Поверхности второго порядка

35. Поверхности второго порядка

35.1. Общее уравнение

$O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – **п.д.с.к.**

35. Поверхности второго порядка

35.1. Общее уравнение

$O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – **п.д.с.к.**

Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, задаваемое уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$
$$+ 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

35. Поверхности второго порядка

35.1. Общее уравнение

$O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – **п.д.с.к.**

Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, задаваемое уравнением

$$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +}$$

$$+ 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

35.2. Заменой переменных $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$ **(п. 33.6)**

(Q – ортогональная матрица)

35. Поверхности второго порядка

35.1. Общее уравнение $O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – **п.д.с.к.**

Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, задаваемое уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$
$$+ 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

35.2. Заменой переменных $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix}$ **(п. 33.6)**

(Q – ортогональная матрица) уравнение можно упростить, приведя квадратичную форму к главным осям, $\varphi = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2,$

выбирая в пространстве новый базис $\overline{\tilde{i}}, \overline{\tilde{j}}, \overline{\tilde{k}}$:

$$|\overline{\tilde{i}}| = |\overline{\tilde{j}}| = |\overline{\tilde{k}}| = 1;\ \overline{\tilde{i}} \perp \overline{\tilde{j}} \perp \overline{\tilde{k}} \perp \overline{\tilde{i}}.$$

35.3. Выбирая, если нужно, новое начало координат, $\hat{O}(\tilde{x}_0; \tilde{y}_0; \tilde{z}_0)$ − заменой переменных $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \\ \tilde{z}_0 \end{pmatrix}$ −

уравнение поверхности приводят к ***каноническому виду*** − одному из **семнадцати:**

к главным осям, $\varphi = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2,$

к главным осям, $\varphi=\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3\tilde{z}^2$,

выбирая в пространстве новый базис $\overline{\tilde{i}}, \overline{\tilde{j}}, \overline{\tilde{k}}$:

$$|\overline{\tilde{i}}|=|\overline{\tilde{j}}|=|\overline{\tilde{k}}|=1;\ \overline{\tilde{i}}\perp\overline{\tilde{j}}\perp\overline{\tilde{k}}\perp\overline{\tilde{i}}.$$

к главным осям, $\varphi = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2$,

выбирая в пространстве новый базис $\bar{\tilde{i}}, \bar{\tilde{j}}, \bar{\tilde{k}}$:

$$|\bar{\tilde{i}}| = |\bar{\tilde{j}}| = |\bar{\tilde{k}}| = 1; \; \bar{\tilde{i}} \perp \bar{\tilde{j}} \perp \bar{\tilde{k}} \perp \bar{\tilde{i}}.$$

35.3. Выбирая, если нужно, новое начало координат, $\tilde{O}(\tilde{x}_0; \tilde{y}_0; \tilde{z}_0)$

к главным осям, $\varphi=\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3\tilde{z}^2,$

выбирая в пространстве новый базис $\bar{\tilde{i}}, \bar{\tilde{j}}, \bar{\tilde{k}}$:

$$|\bar{\tilde{i}}|=|\bar{\tilde{j}}|=|\bar{\tilde{k}}|=1;\ \bar{\tilde{i}}\perp\bar{\tilde{j}}\perp\bar{\tilde{k}}\perp\bar{\tilde{i}}.$$

35.3. Выбирая, если нужно, новое начало координат, $\hat{O}(\tilde{x}_0;\tilde{y}_0;\tilde{z}_0)$

− заменой переменных $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ \tilde{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\tilde{x}_0\\ \tilde{y}_0\\ \tilde{z}_0\end{pmatrix}$ −

уравнение поверхности приводят к ***каноническому виду*** к главным осям, $\varphi = \lambda_1 \widetilde{x}^2 + \lambda_2 \widetilde{y}^2 + \lambda_3 \widetilde{z}^2$,

выбирая в пространстве новый базис $\overline{\widetilde{i}}, \overline{\widetilde{j}}, \overline{\widetilde{k}}$:

$$|\overline{\widetilde{i}}| = |\overline{\widetilde{j}}| = |\overline{\widetilde{k}}| = 1;\ \overline{\widetilde{i}} \perp \overline{\widetilde{j}} \perp \overline{\widetilde{k}} \perp \overline{\widetilde{i}}.$$

35.3. Выбирая, если нужно, новое начало координат, $\widetilde{O}(\widetilde{x}_0; \widetilde{y}_0; \widetilde{z}_0)$

− заменой переменных $\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{x}_0 \\ \widetilde{y}_0 \\ \widetilde{z}_0 \end{pmatrix}$ −

уравнение поверхности приводят к ***каноническому виду*** − одному из **семнадцати:**

Эллипсоиды:

1)
2) $$\frac{\hat{x}^2}{a^2}+\frac{\hat{y}^2}{b^2}+\frac{\hat{z}^2}{c^2}=\pm 1$$

$(a \geq b \geq c > 0)$

- действительный (+)
- мнимый (−) ;

Эллипсоиды:

1)
2) $$\frac{\hat{x}^2}{a^2}+\frac{\hat{y}^2}{b^2}+\frac{\hat{z}^2}{c^2}=\pm 1$$
$$(a \ge b \ge c > 0)$$

- действительный (+)
- мнимый (−) ;

Гиперболоиды:

3)
4) $$\frac{\hat{x}^2}{a^2}+\frac{\hat{y}^2}{b^2}-\frac{\hat{z}^2}{c^2}=\pm 1$$
$$(a \ge b > 0)$$

- однополостный (+)
- двуполостный (−);

Эллипсоиды:

1)
2) $$\frac{\hat{x}^2}{a^2}+\frac{\hat{y}^2}{b^2}+\frac{\hat{z}^2}{c^2}=\pm 1 \qquad (a \geq b \geq c > 0)$$

действительный (+)
мнимый (−) ;

Гиперболоиды:

3)
4) $$\frac{\hat{x}^2}{a^2}+\frac{\hat{y}^2}{b^2}-\frac{\hat{z}^2}{c^2}=\pm 1 \qquad (a \geq b > 0)$$

однополостный (+)
двуполостный (−);

Конусы:

5)
6) $$\frac{\hat{x}^2}{a^2}+\frac{\hat{y}^2}{b^2} \pm \frac{\hat{z}^2}{c^2}=0$$

действительный (−) $(a \geq b > 0)$,
мнимый (+) $(a \geq b \geq c > 0)$;

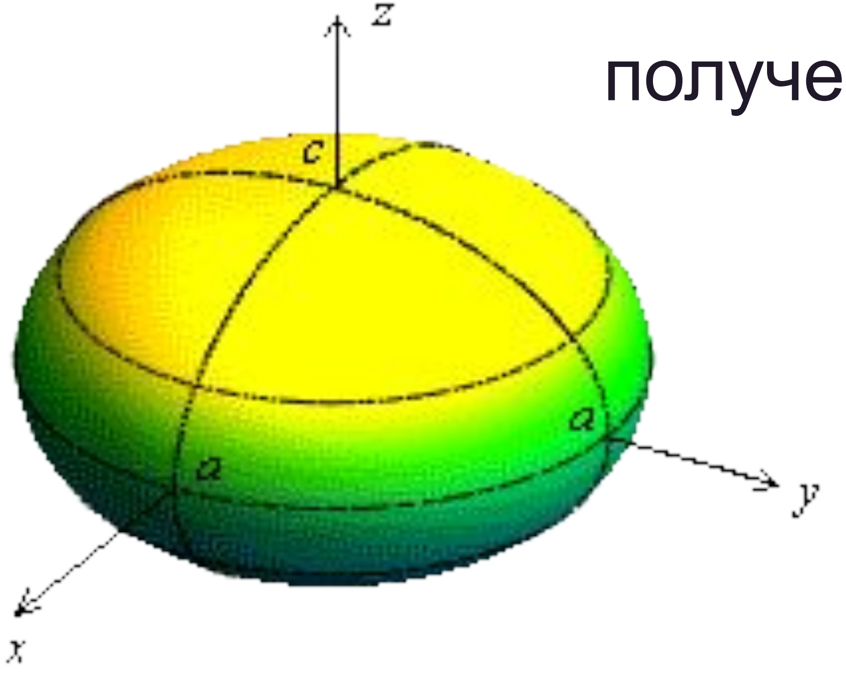
Если две полуоси равны друг другу ($a=b$ или **…**), то эллипсоид называется эллипсоидом вращения

Если две полуоси равны друг другу ($a=b$ или **…**), то эллипсоид называется эллипсоидом вращения – его можно получить вращением эллипса вокруг одной из осей:

Если две полуоси равны друг другу ($a=b$ или ...), то эллипсоид называется эллипсоидом вращения – его можно получить вращением эллипса вокруг одной из осей:

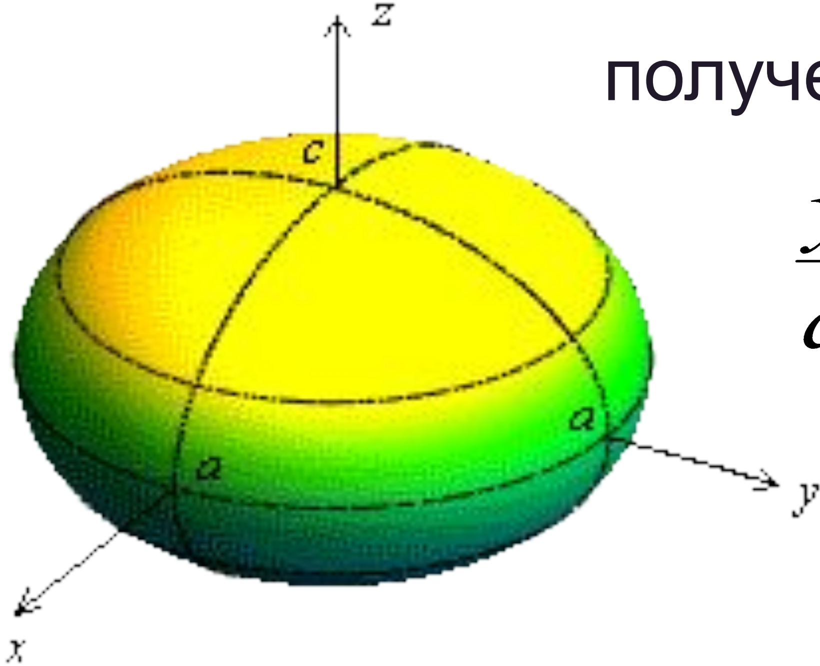
эллипсоид вращения $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

получен вращением эллипса



Если две полуоси равны друг другу ($a=b$ или ...), то эллипсоид называется эллипсоидом вращения – его можно получить вращением эллипса вокруг одной из осей:

эллипсоид вращения $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



получен вращением эллипса

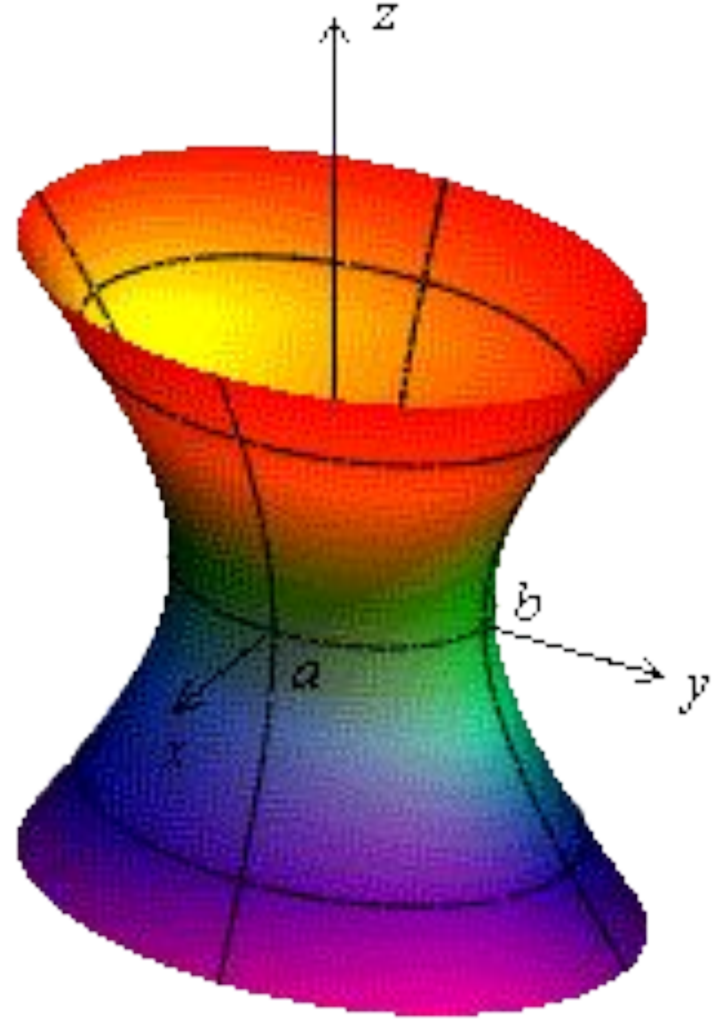
$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

вокруг оси Oz.

3) Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

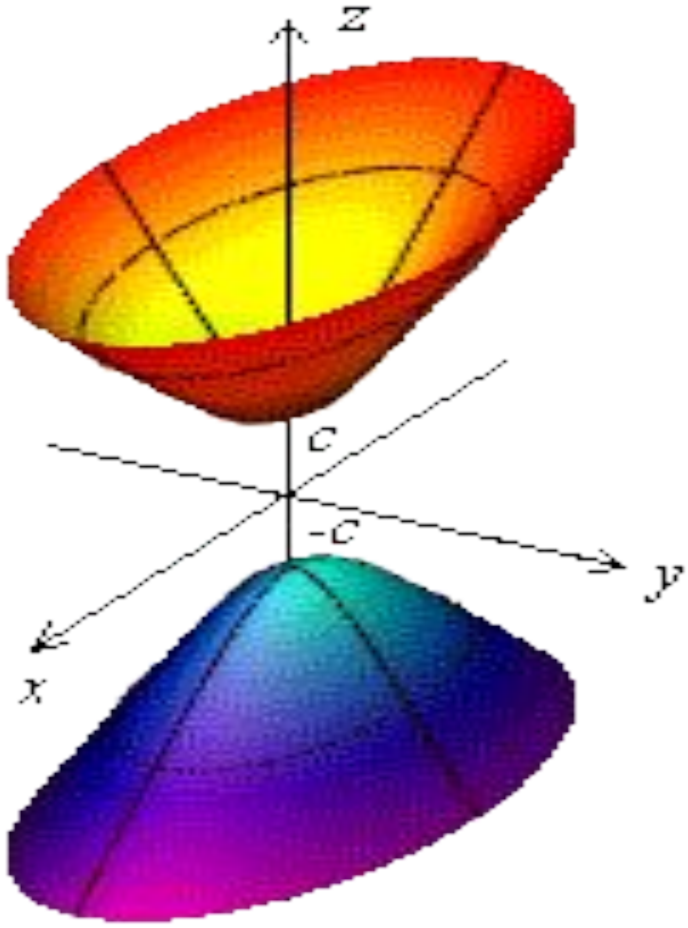
$$(a \geq b > 0):$$



4) Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

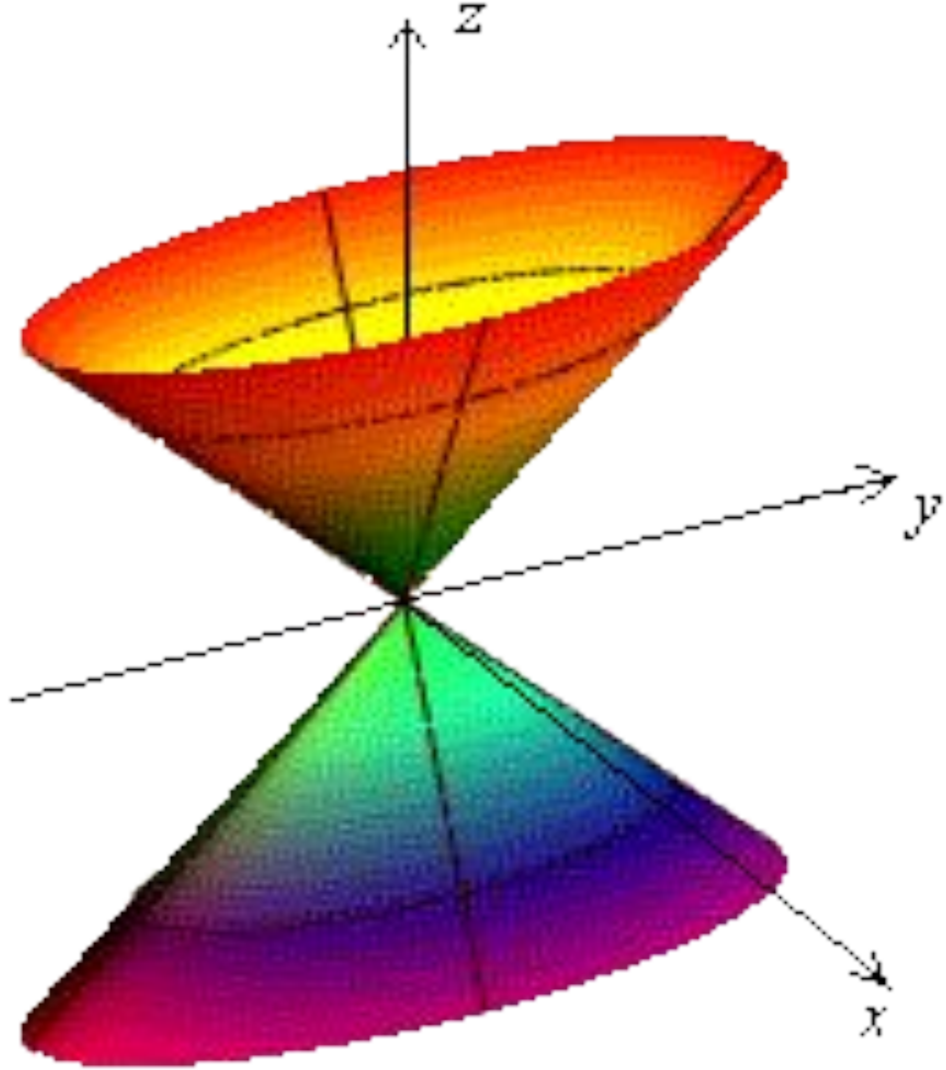
$$(a \geq b > 0):$$



5) Конус действительный

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

$$(a \geq b > 0):$$

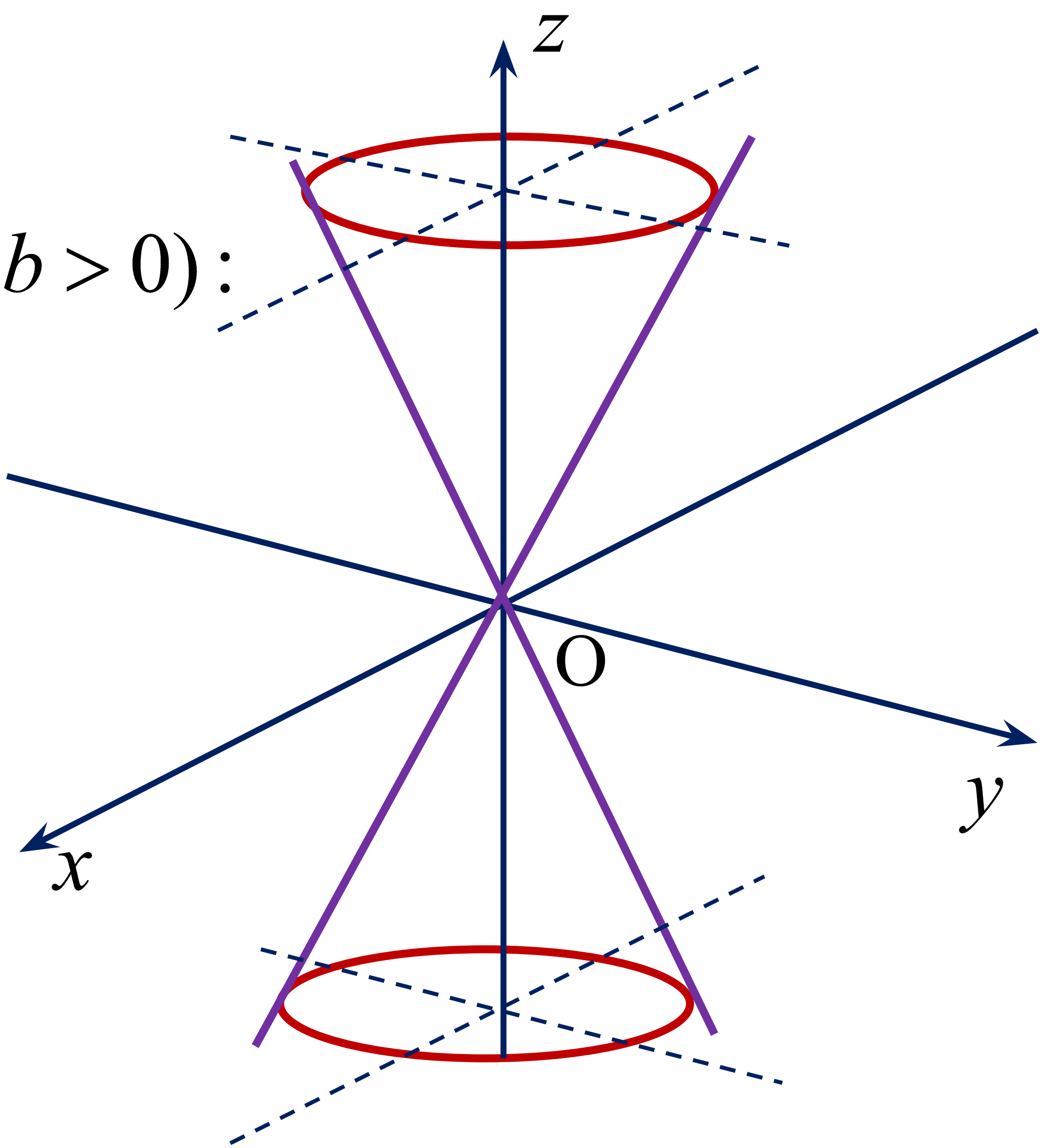


5) Конус действительный

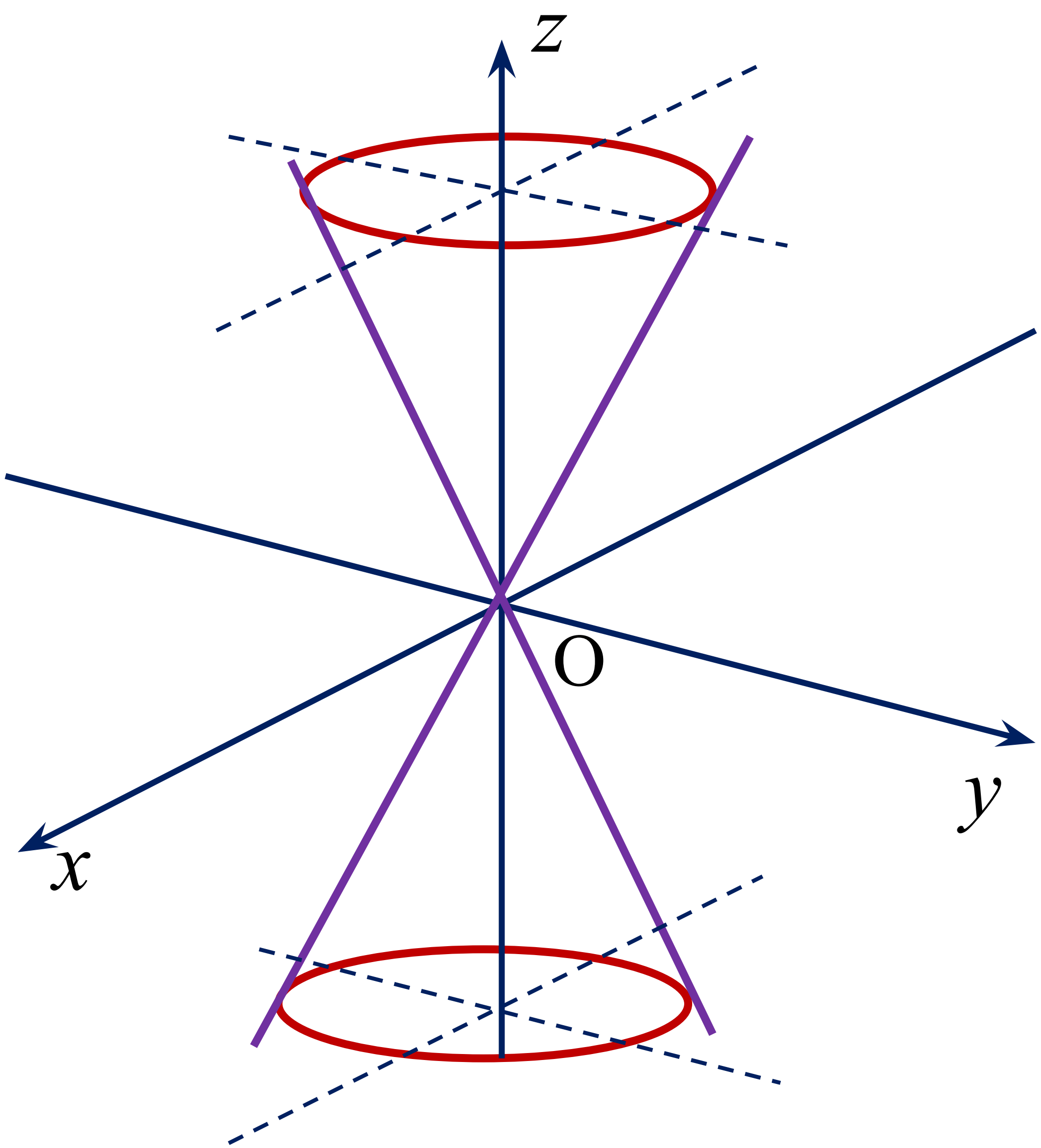
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

$$(a \geq b > 0):$$

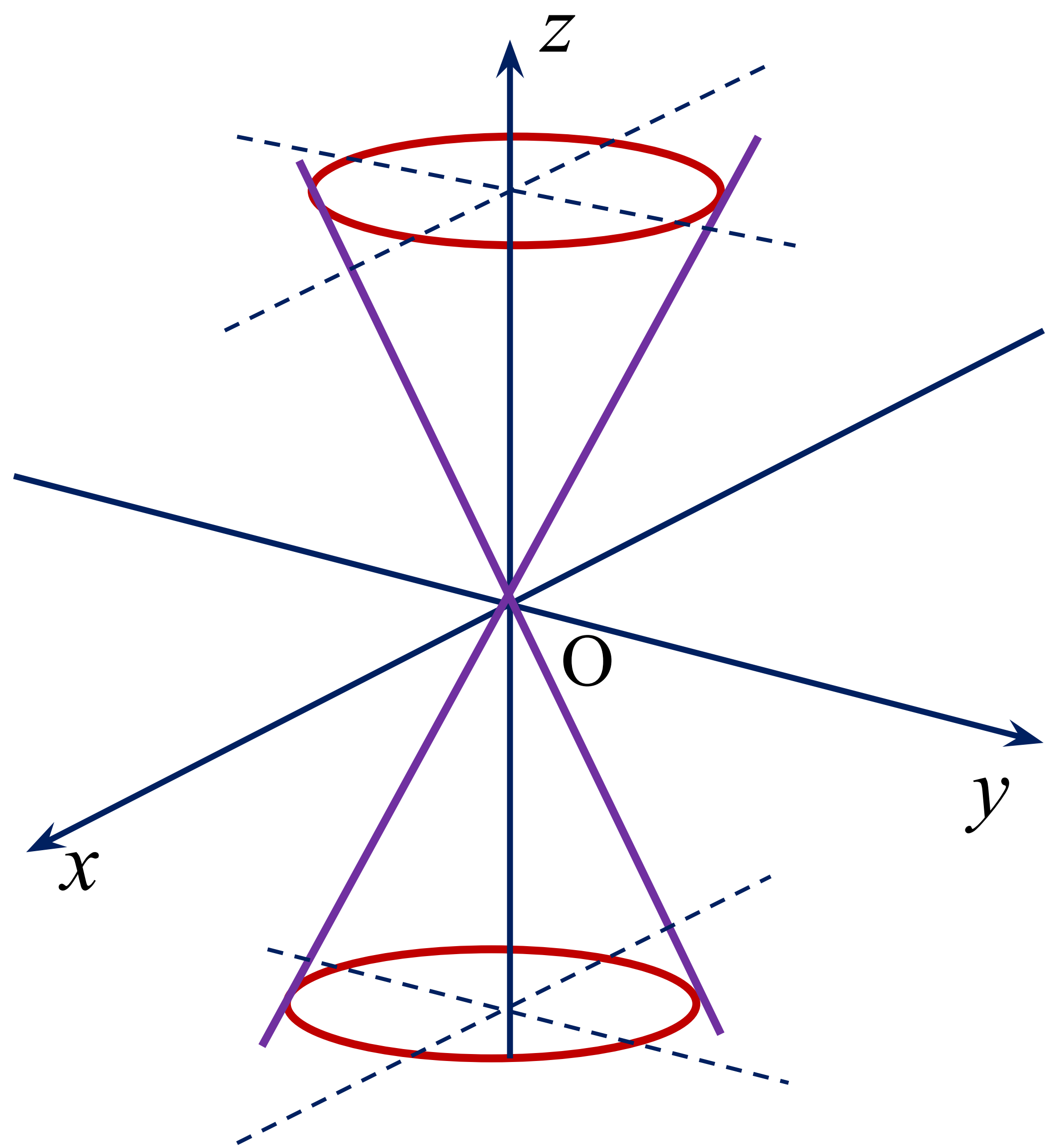
В сечении действительного конуса плоскостями, параллельными плоскости Oxy, получаются эллипсы.



В сечении действительного конуса плоскостями, проходящими через ось Oz, получаются пары пересекающихся прямых.



В сечении действительного конуса плоскостями, параллельными оси Oz, получаются гиперболы…



Параболоиды:

7)
8) $$\frac{\hat{x}^2}{a^2} \pm \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 2z \quad (a \geq b > 0);$$

эллиптический (+)
гиперболический (−)

Параболоиды:

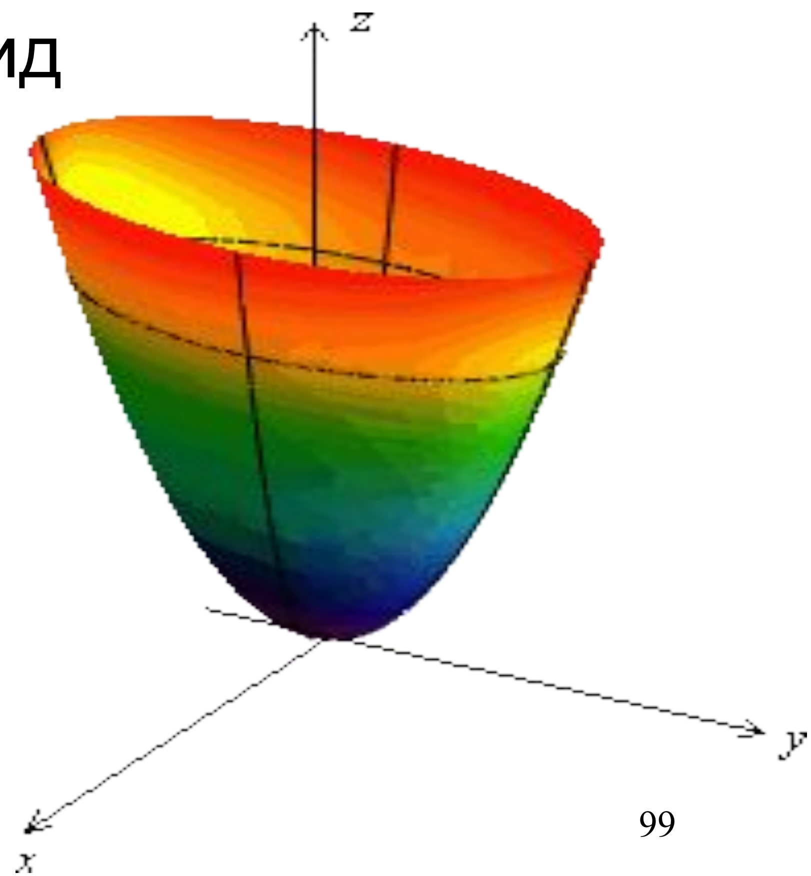
7)
8) $$\frac{\hat{x}^2}{a^2} \pm \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 2z \quad (a \geq b > 0);$$

эллиптический (+)
гиперболический (−)

7) Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

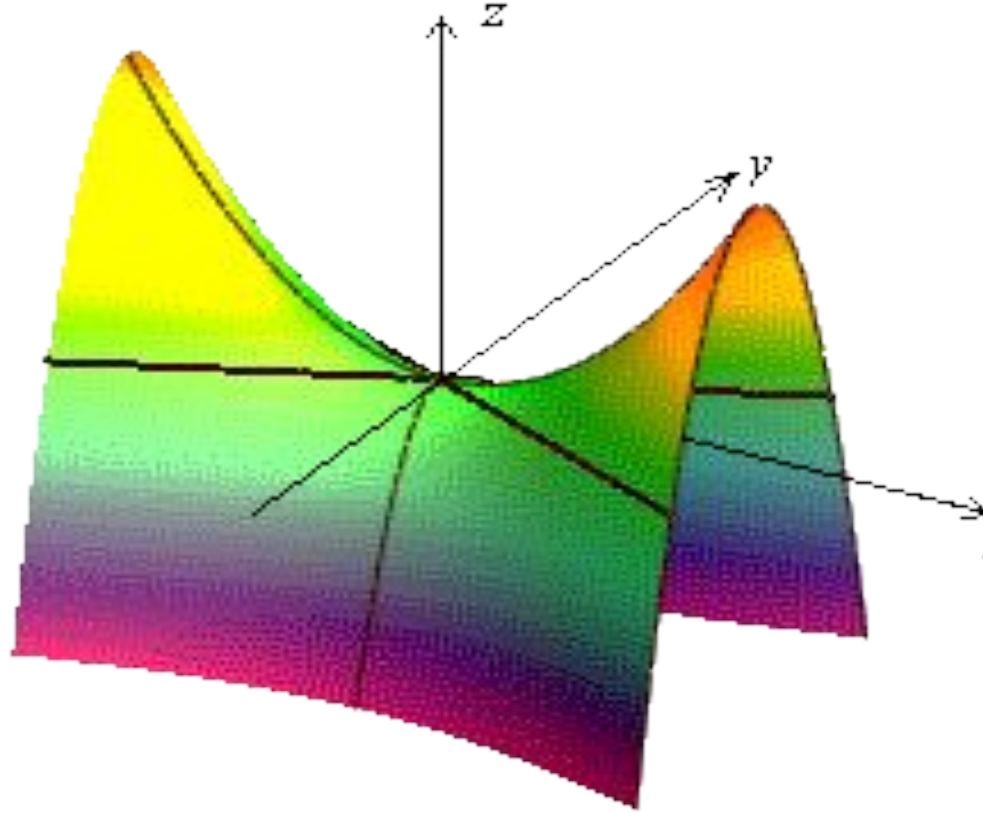
$$(a \geq b > 0):$$



8) Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

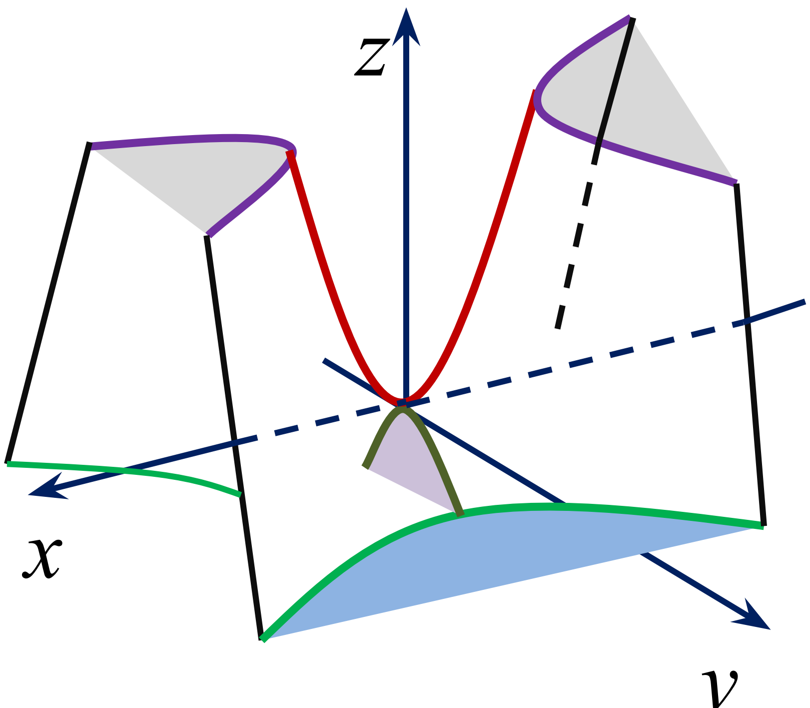
$$(a \geq b > 0):$$

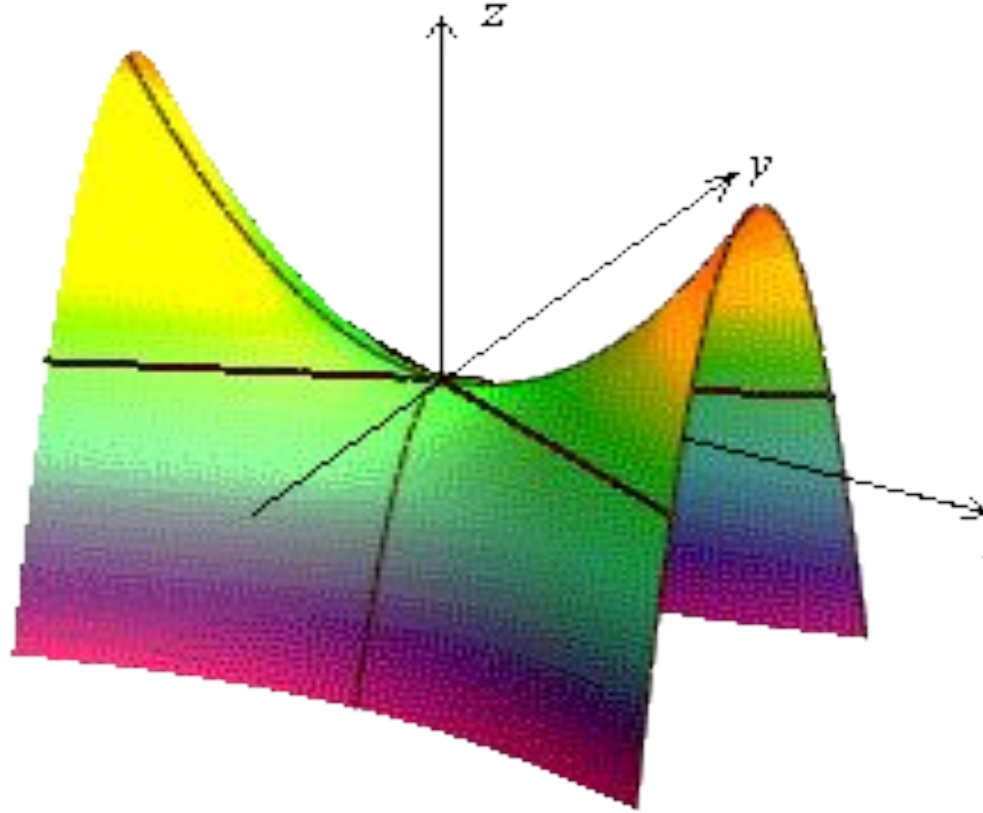


8) Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

$$(a \geq b > 0):$$





Цилиндры:

эллиптические

9), 10) $$\frac{\hat{x}^2}{a^2}+\frac{\hat{y}^2}{b^2}=\pm 1$$

$\left[\begin{array}{l}\text{действительный } (-), \\ \text{мнимый } (+) \quad (a \geq b > 0);\end{array}\right.$

Цилиндры:

эллиптические

9), 10) $$\frac{\hat{x}^2}{a^2}+\frac{\hat{y}^2}{b^2}=\pm 1$$

$\left[\begin{array}{l}\text{действительный } (-), \\ \text{мнимый } (+)\end{array}\right.$ $(a \geq b > 0);$

11) гиперболический: $$\frac{\hat{x}^2}{a^2}-\frac{\hat{y}^2}{b^2}=1;$$

Цилиндры:

эллиптические

9) действительный (−),

10) мнимый (+)

$$\frac{\hat{x}^2}{a^2}+\frac{\hat{y}^2}{b^2}=\pm 1 \quad (a \geq b > 0);$$

11) гиперболический: $\frac{\hat{x}^2}{a^2}-\frac{\hat{y}^2}{b^2}=1;$

14) $\hat{y}^2 = 2p\,\hat{x} \quad (p > 0)$ − параболический;

Цилиндры:

эллиптические

9) 10) $\frac{\hat{x}^2}{a^2}+\frac{\hat{y}^2}{b^2}=\pm 1$ $\left[\begin{array}{l}\text{действительный } (-),\\ \text{мнимый } (+)\end{array}\right.$ $(a \geq b > 0);$

11) гиперболический: $\frac{\hat{x}^2}{a^2}-\frac{\hat{y}^2}{b^2}=1;$

14) $\hat{y}^2=2p\,\hat{x} \quad (p>0)$ − параболический;

пары плоскостей:

Цилиндры:

эллиптические

9)
10) $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2}+\dfrac{\hat{y}^2}{b^2}=\pm 1$ — действительный (−), мнимый (+) $(a \geq b > 0)$;

11) гиперболический: $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2}-\dfrac{\hat{y}^2}{b^2}=1$;

14) $\hat{y}^2=2p\,\hat{x} \quad (p>0)$ − параболический;

пары плоскостей:

пересекающихся

12)
13) $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2} \boxtimes \dfrac{\hat{y}^2}{b^2}=0 \qquad (a \geq b > 0)$ — действительных (−), мнимых (+);

Цилиндры:

эллиптические

9) 10) $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2}+\dfrac{\hat{y}^2}{b^2}=\pm 1$

действительный (−),

мнимый (+) $(a \ge b > 0)$;

11) гиперболический: $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2}-\dfrac{\hat{y}^2}{b^2}=1$;

14) $\hat{y}^2 = 2p\,\hat{x} \quad (p>0)$ − параболический;

пары плоскостей:

пересекающихся

12) 13) $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2}\pm\dfrac{\hat{y}^2}{b^2}=0 \qquad (a \ge b > 0)$

действительных (−),

мнимых (+);

параллельных

15) 16) $\hat{y}^2 = \pm a^2 \ (a>0)$

действительных (−),

мнимых (+);

Цилиндры:

эллиптические

9) 10) $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2}+\dfrac{\hat{y}^2}{b^2}=\pm 1$

[действительный (−),
мнимый (+) $(a \geq b > 0)$;

11) гиперболический: $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2}-\dfrac{\hat{y}^2}{b^2}=1$;

14) $\hat{y}^2=2p\,\hat{x} \quad (p>0)$ − параболический;

пары плоскостей:

пересекающихся

12) 13) $\dfrac{\hat{x}^2}{a^2} \mp \dfrac{\hat{y}^2}{b^2}=0 \qquad (a \geq b > 0)$

[действительных (−),
мнимых (+);

параллельных

15) 16) $\hat{y}^2=\pm a^2 \;\; (a>0)$

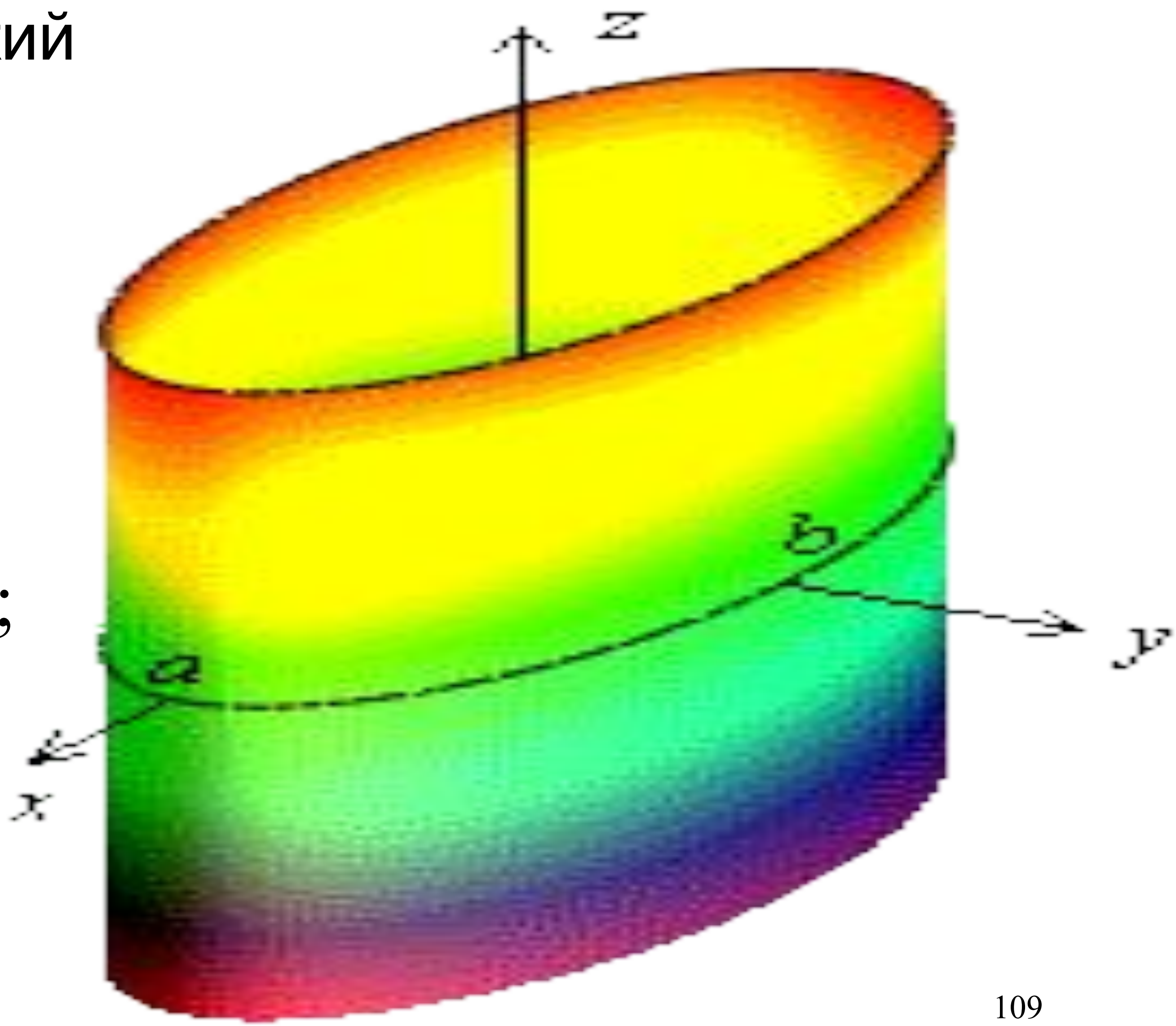
[действительных (−),
мнимых (+);

17) $\hat{y}^2=0$ − совпавших.

9) Действительный эллиптический цилиндр:

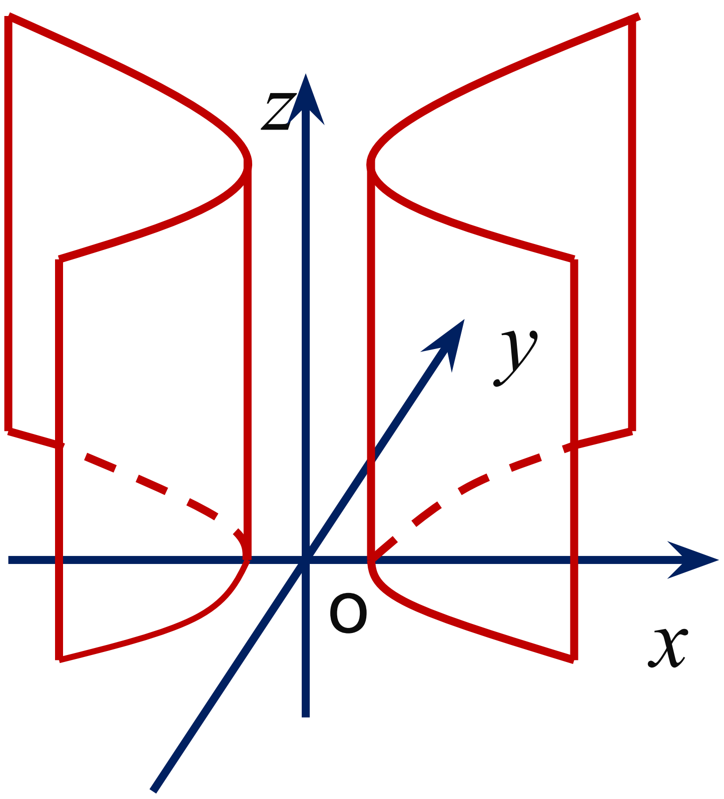
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

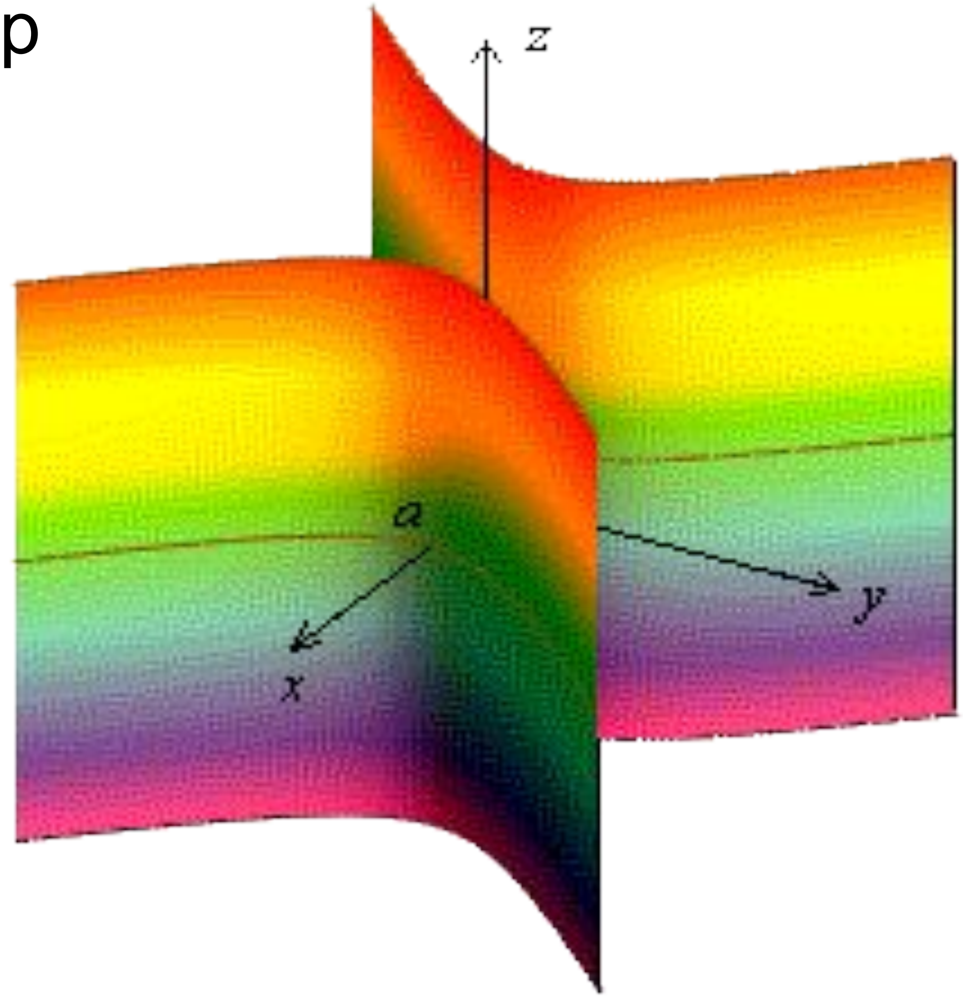
$$(a \geq b > 0);$$



11) Гиперболический цилиндр

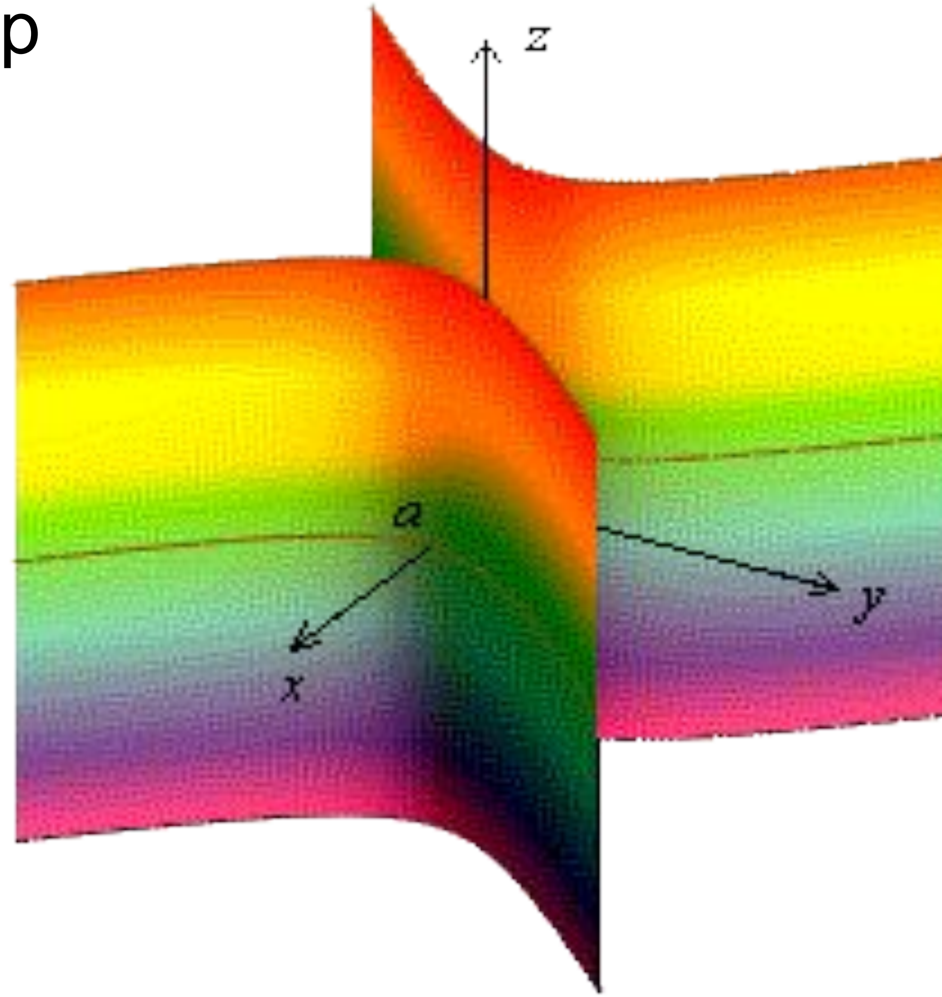
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0):$$





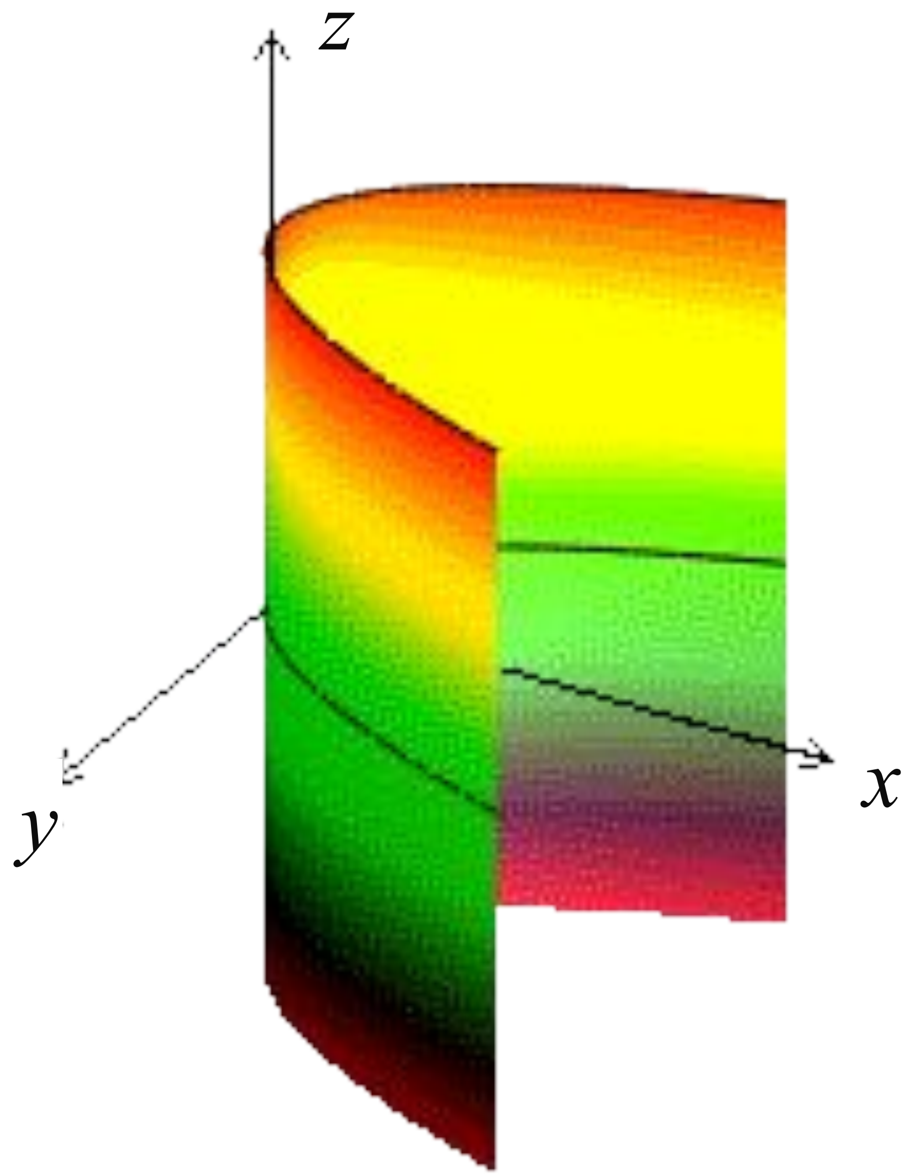
11) Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a, b>0):$$



14) Параболический цилиндр:

$$y^2 = 2px, \quad p > 0:$$



35.4. Система координат $\hat{O}, \tilde{\bar{i}}, \tilde{\bar{j}}, \tilde{\bar{k}},$ в которой уравнение поверхности второго порядка имеет канонический вид, называется канонической.

35.4. Система координат $\hat{O}, \tilde{\bar{i}}, \tilde{\bar{j}}, \tilde{\bar{k}},$ в которой уравнение поверхности второго порядка имеет канонический вид, называется канонической.

Каноническая система координат определяется, вообще говоря, **неоднозначно.**

36. Квадрики в евклидовых пространствах

36.1. Общее уравнение и матрица

Квадрикой в евклидовом пространстве называется множество точек, задаваемое уравнением

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_j x_j + c = 0,$$ где

x_i – координаты соответствующих векторов $\bar{x}$ в ортонормированном базисе $\mathbf{e} = (\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ евклидова пространства E: $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + \ldots + x_n\bar{e}_n$.

Расширенной матрицей этой квадрики называют матрицу

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & c \end{pmatrix}.$$

Уравнение квадрики можно переписать в матричном виде,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)\,\widetilde{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

а также в функциональной форме $\varphi(\bar{x}) + 2l(\bar{x}) + c = 0,$

где ϕ и b — квадратическая и линейная функции,

$$\varphi, l : E \to E,\ \varphi(\bar{x}) = \vec{x}\,A\,x^{\downarrow},\ l(\bar{x}) = \vec{b}\,x^{\downarrow}.$$

36.2. Уравнение всякой квадрики в евклидовом пространстве можно привести к одному из трёх видов:

(a) $\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 = 0,$

(b) $\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 + \mu = 0,$

(c) $\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 + 2\nu\, z_{r+1} = 0,$

$\lambda_i \neq 0, \ \ 1 \leq i \leq r;$

$\mu, \nu \neq 0,$

преобразованием неизвестных $\overline{x} = T\,\overline{z} + \overline{c},$

T – ортогональная матрица,

$\overline{c}$ – координаты вектора сдвига к новому началу координат.

Благодаря **п. 33.6** можем считать, что квадратичная форма $\varphi(\bar{x})$ приведена к главным осям

$$\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2, \ \lambda_i \neq 0 \ (1 \le i \le r)$$

преобразованием неизвестных $\bar{x} = Q\,\bar{y}$, Q – матрица перехода к ортонормированному базису $\mathbf{f}$,

$\bar{f}_k$ – собственный вектор соотв. симметрического преобразования при собственном значении λ_k.

Тогда линейная часть уравнения квадрики преобразуется по известному правилу

$$l(\bar{x}) = b'_1\, y_1 + \ldots + b'_n\, y_n, \quad (b'_1, \ldots, b'_n) = (b_1, \ldots, b_n)\, Q,$$

и всё уравнение в новых неизвестных приобретает

вид $\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2 + 2b'_1 y_1 + \ldots + 2b'_n y_n + c = 0.$

Выделяя полные квадраты,

$$\lambda_i y_i^2 + 2b'_i y_i = \lambda_i \left(y_i^2 + 2\frac{b'_i}{\lambda_i} y_i + \left(\frac{b'_i}{\lambda_i}\right)^2 \right) - \frac{(b'_i)^2}{\lambda_i} =$$

$= \lambda_i \left(y_i + \frac{b'_i}{\lambda_i} \right)^2 - \frac{(b'_i)^2}{\lambda_i}$, и полагая $z_i = y_i + \frac{b'_i}{\lambda_i} \ (1 \le i \le r)$,

получаем уравнение

$$\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 + 2b'_{r+1} y_{r+1} + \ldots + 2b'_n y_n + c' = 0.$$

Если $b'_{r+1} = ... = b'_n = 0$, то уравнение приведено к виду (a) или (b). Иначе положим

$\overline{u} = b'_{r+1}\,\bar{f}_{r+1} + ... + b'_n\,\bar{f}_n \neq \overline{0} -$ собственный вектор при нулевом собственном значении, ортогональный векторам $\bar{f}_1, ..., \bar{f}_r$. Систему векторов $\bar{f}_1, ..., \bar{f}_r, \dfrac{1}{|\overline{u}|}\overline{u}$ дополним до ортонормированного базиса $\underset{\sqcup}{\mathbf{g}}$,

в котором уравнение квадрики приобретает вид

$$\lambda_1 z_1^2 + ... + \lambda_r z_r^2 + 2\nu\, y'_{r+1} + c' = 0,\ \nu \neq 0, -$$

и остается обозначить $2\nu\, y'_{r+1} + c' = 2\nu\, z_{r+1}$.