

## НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Задача побудови функції  $\varphi(x)$ , яка б приблизно зображувала функцію  $f(x)$  з тим чи іншим ступенем точності, називається задачею наближення.

- Рівномірне наближення.
- Інтерполяція
- Середньоквадратичне наближення.

# ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ

Задана система вузлів  $x_0, x_1, \dots, x_m$  та значень функції у вузлах  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_m)$  :

Поліном

$$\varphi(x) = a_0\psi_0(x) + a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x) \dots + a_m\psi_m(x)$$

називається узагальненим поліномом,

де  $\psi_j(x)$  – система базисних функцій,

$a_0, a_1, \dots, a_m$  – деякі постійні коефіцієнти.

Системою базисних функцій можуть бути:

$$\psi_k(x) = x^k, \quad k = 0, m$$

$$\psi_k(x) = \exp(2\pi i k x), \quad k = 0, m$$

$$\psi_k(x) = 1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots$$

$$f(x_0) = a_0\psi_0(x_0) + a_1\psi_1(x_0) + a_2\psi_2(x_0) \dots + a_m\psi_m(x_0)$$

$$f(x_1) = a_0\psi_0(x_1) + a_1\psi_1(x_1) + a_2\psi_2(x_1) \dots + a_m\psi_m(x_1)$$

$$f(x_2) = a_0\psi_0(x_2) + a_1\psi_1(x_2) + a_2\psi_2(x_2) \dots + a_m\psi_m(x_2)$$

...

$$f(x_m) = a_0\psi_0(x_m) + a_1\psi_1(x_m) + a_2\psi_2(x_m) \dots + a_m\psi_m(x_m)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \psi_0(x_0) & \psi_1(x_0) & \psi_2(x_0) & \dots & \psi_m(x_0) \\ \psi_0(x_1) & \psi_1(x_1) & \psi_2(x_1) & \dots & \psi_m(x_1) \\ \psi_0(x_2) & \psi_1(x_2) & \psi_2(x_2) & \dots & \psi_m(x_2) \\ \dots & & & & \\ \psi_0(x_m) & \psi_1(x_m) & \psi_2(x_m) & \dots & \psi_m(x_m) \end{bmatrix} \neq 0; \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_m) \end{bmatrix}; \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix};$$

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{a} = \Delta^{-1} \mathbf{f}$$

$$f(x_0) = a_0 + a_1 x_0^1 + a_2 x_0^2 \dots + a_m x_0^m$$

$$f(x_1) = a_0 + a_1 x_1^1 + a_2 x_1^2 \dots + a_m x_1^m$$

$$f(x_2) = a_0 + a_1 x_2^1 + a_2 x_2^2 \dots + a_m x_2^m$$

...

$$f(x_m) = a_0 + a_1 x_m^1 + a_2 x_m^2 \dots + a_m x_m^m$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & x_0^1 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1^1 & \dots & x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m^1 & \dots & x_m^m \end{bmatrix} \neq 0;$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_m) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix};$$

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{a} = \Delta^{-1} \mathbf{f}$$

# НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Інтерполяційний поліном Лагранжа можна записати як:

$$L_m(x) = \varphi(x) = \sum_{j=0}^m f(x_j) \psi_j(x)$$

де  $\psi_j(x)$  – поліном степеня  $m$ , що у вузлах інтерполяції задовольняє умови:

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } i = j \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Поліном, що задовольняє цим вимогам:

$$\psi_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_{m-1})(x - x_m)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{m-1})(x_j - x_m)}$$

## Приклад

$$x_0 = 1 \quad f(x_0) = 1$$

$$x_1 = 2 \quad f(x_1) = 4$$

$$x_2 = 3 \quad f(x_2) = 9.$$

$$L(x) = 1 \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} + 4 \cdot \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3} + 9 \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2} = x^2.$$

## Приклад

$$x_0 = 1 \quad f(x_0) = 1$$

$$x_1 = 2 \quad f(x_1) = 8$$

$$x_2 = 3 \quad f(x_2) = 27$$

$$L(x) = 1 \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} + 8 \cdot \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3} + 27 \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2} = 6x^2 - 11x + 6.$$

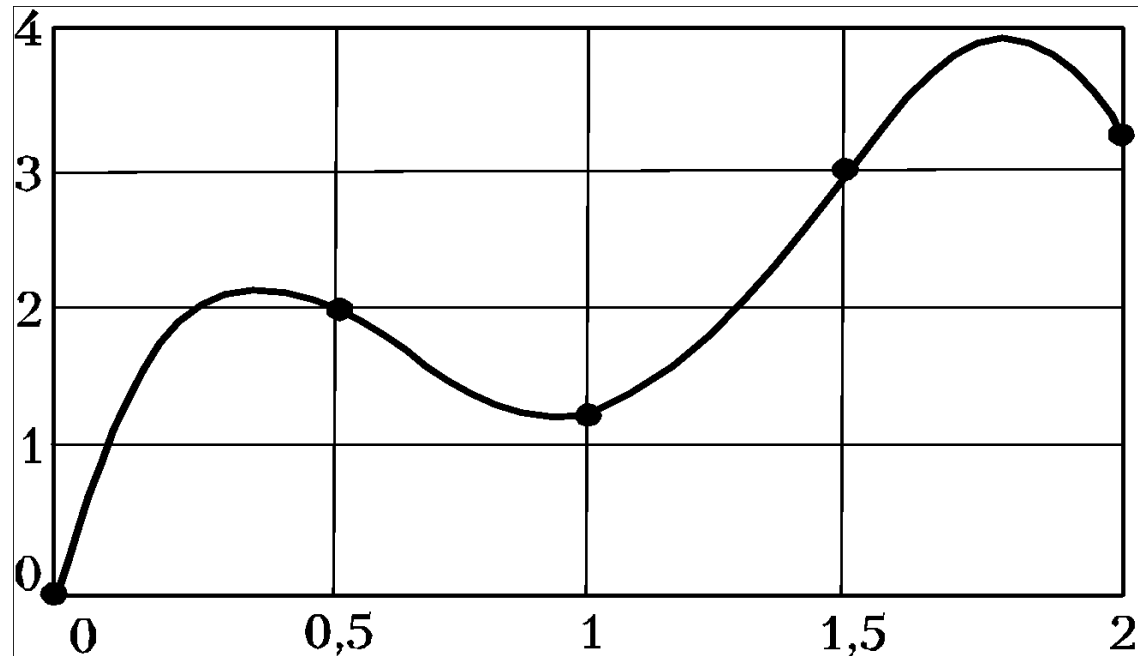
Інтерполяційний поліном Лагранжа можна записати як:

$$L_m(x) = \sum_{j=0}^m f(x_j) \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_{m-1})(x - x_m)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{m-1})(x_j - x_m)}$$

Приклад

$x_j$	0	0.5	1	1.5	2
$f(x_j)$	0	2	1.25	3	3.25

$$L_4(x) = 14.875x - 32.9583x^2 + 25.5x^3 - 6.16667x^4$$



# ПОХИБКИ ФОРМУЛИ ЛАГРАНЖА

Різницю між функцією та її інтерполяційним наближенням називають залишковим членом інтерполяційної формули або похибкою інтерполяції:

$$r_m(x) = L_m(x) - f(x)$$

Для полінома Лагранжа маємо:

$$r_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \omega(x),$$

$$M_{m+1} = \max_{[a,b]} |f^{(m+1)}(x)|$$

$$|f(x) - L_m(x)| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \omega(x),$$

$$\text{де } \omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_m).$$

Коли функція  $f(x)$  є поліномом степеня  $m$ , інтерполяційний поліном на вузлах  $x_0, x_1, \dots, x_m$  є точним, тобто:

$$L_m(x) \equiv f(x)$$



$$y = \ln x$$

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
y	0.000	0.95310	0.182322	0.262364	0.336472

$$x = 1.23;$$

$$x_0 = 1.1; x_1 = 1.2;$$

$$x_0 = 1.1; x_1 = 1.2; x_2 = 1.3;$$

$$L(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1, \quad n = 1;$$

$$L(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2, \quad n = 2.$$

$$L_1(1.23) = 0.206335;$$

$$L_2(1.23) = 0.207086;$$

$$|f(x) - L_1(x)| \leq \frac{M_2}{2} |(x - x_0)(x - x_1)|,$$

$$|f(x) - L_2(x)| \leq \frac{M_3}{6} |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|.$$

$$f(x) = \ln(x) \quad f^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2} \quad M_2 = \max_{[1.2, 1.3]} |f^{(2)}(x)| = \frac{1}{1.2^2} \approx 0.69$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} \quad M_3 = \max_{[1.2, 1.3]} |f^{(3)}(x)| = \frac{2}{1.1^3} \approx 1.5$$

$$\varepsilon_1 = |\ln(1.23) - L_1(x)| \leq \frac{0.69}{2} |(1.23 - 1.2)(1.23 - 1.3)| \approx 7.3 * 10^{-4},$$

$$\varepsilon_2 = |\ln(1.23) - L_2(x)| \leq \frac{1.5}{6} |(1.23 - 1.1)(1.23 - 1.2)(1.23 - 1.3)| \approx 6.9 * 10^{-5},$$

Скінченні різниці першого порядку:

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0),$$

$$\Delta f(x_1) = f(x_2) - f(x_1),$$

...

$$\Delta f(x_{m-1}) = f(x_m) - f(x_{m-1}).$$

Скінченні різниці другого порядку:

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0),$$

$$\Delta^2 f(x_1) = \Delta f(x_2) - \Delta f(x_1),$$

...

$$\Delta^2 f(x_{m-2}) = \Delta f(x_{m-1}) - \Delta f(x_{m-2}).$$

У загальному випадку скінченні різниці  $k$ -го порядку:

$$\Delta^k f(x_i) = \Delta^{k-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{k-1} f(x_i).$$

# ВЛАСТИВОСТІ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ

1. Скінченні різниці сталої дорівнюють нулю.
2. Сталий множник можна виносити за знак скінченної різниці.
3. Якщо  $f(x)$  – многочлен степеня  $m$ , то різниця

$$\Delta^k f(x) \equiv 0 \quad . \quad k > m$$

4. Якщо  $m$ -і різниці функції  $f(x)$  сталі, то ця функція є многочленом степеня  $m$ .

## ГОРИЗОНТАЛЬНІ СКІНЧЕННІ РІЗНИЦІ

$x_i$	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
$x_0$	$f(x_0)$	$\Delta f(x_0)$	$\Delta^2 f(x_0)$	$\Delta^3 f(x_0)$	$\Delta^4 f(x_0)$
$x_1$	$f(x_1)$	$\Delta f(x_1)$	$\Delta^2 f(x_1)$	$\Delta^3 f(x_1)$	$\Delta^4 f(x_1)$
$x_2$	$f(x_2)$	$\Delta f(x_2)$	$\Delta^2 f(x_2)$	$\Delta^3 f(x_2)$	
$x_3$	$f(x_3)$	$\Delta f(x_3)$	$\Delta^2 f(x_3)$		
$x_4$	$f(x_4)$	$\Delta f(x_4)$			
$x_5$	$f(x_5)$				

## ГОРИЗОНТАЛЬНІ СКІНЧЕННІ РІЗНИЦІ

$x_i$	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
1,215	9,58756	0,07418	0,00159	0,00001	0,00000
1,220	9,66174	0,07576	0,00160	0,00001	0,00000
1,225	9,73750	0,07736	0,00162	0,00001	
1,230	9,81487	0,07898	0,00163		
1,235	9,89385	0,08061			
1,240	9,97446				

## ДІАГОНАЛЬНІ СКІНЧЕННІ РІЗНИЦІ

$x_i$	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$	$\Delta^5 f(x_i)$
$x_0$	$f(x_0)$					
		$\Delta f(x_0)$				
$x_1$	$f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$			
		$\Delta f(x_1)$		$\Delta^3 f(x_0)$		
$x_2$	$f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_1)$		$\Delta^4 f(x_0)$	
		$\Delta f(x_2)$		$\Delta^3 f(x_1)$		$\Delta^5 f(x_0)$
$x_3$	$f(x_3)$		$\Delta^2 f(x_2)$		$\Delta^4 f(x_1)$	
		$\Delta f(x_3)$		$\Delta^3 f(x_2)$		
$x_4$	$f(x_4)$		$\Delta^2 f(x_3)$			
		$\Delta f(x_4)$				
$x_5$	$f(x_5)$					

## ДІАГОНАЛЬНІ СКІНЧЕННІ РІЗНИЦІ

$x_i$	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$	$\Delta^5 f(x_i)$
1,215	9,58756					
		0,07418				
1,220	9,66174		0,00159			
		0,07576		0,00001		
1,225	9,73750		0,00160		0,00000	
		0,07736		0,00001		0,00000
1,230	9,81487		0,00162		0,00000	
		0,07898		0,00001		
1,235	9,89385		0,00163			
		0,08061				
1,240	9,97446					



# ПЕРША ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА ФОРМУЛА НЬЮТОНА

Нехай, вузли інтерполяції  $x_0, x_1, \dots, x_m$  розташовані рівномірно:  $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_m = x_0 + mh$ .

Побудуємо інтерполяційний поліном у вигляді:

$$N_m(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_m(x - x_0)\dots(x - x_{m-1})$$

Задача полягає в обчисленні значень  $a_0, a_1, \dots, a_m$ .

Покладемо  $x = x_0$  то  $f(x_0) = N_m(x_0) = a_0$

Покладемо  $x = x_1$ .

$$f(x_1) = N_m(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1h.$$

$$\text{Звідки } a_1 = \frac{\Delta f(x_0)}{h}.$$

Для  $x = x_2$  маємо:

$$f(x_2) = N_m(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$

Враховуючи, що  $(x_2 - x_0) = 2h$  та  $(x_2 - x_1) = h$ :

$$f(x_2) = 2f(x_1) - f(x_0) + a_2 2!h^2, a_2 = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}.$$

Аналогічно, для  $x = x_3$

$$a_3 = \frac{f(x_3) - 3f(x_2) + 3f(x_1) - f(x_0)}{3!h^3} = \frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!h^3}.$$

Для  $x = x_k$  маємо:

$$a_k = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k} (k = 1, 2, \dots, m).$$

Таким чином, маємо :

$$N_m(x) = a_0 + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \\ + \frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}(x - x_0)\dots(x - x_{k-1}) + \dots + \\ + \frac{\Delta^m f(x_0)}{m!h^m}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{m-1}).$$

### **Завдання**

*Покласти  $t = \frac{x - x_0}{h}$  і отримати іншу*

*форму запису першої інтерполяційної формули Ньютона.*

# ДРУГА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА ФОРМУЛА НЬЮТОНА

Нехай, вузли інтерполяції  $x_0, x_1, \dots, x_m$  розташовані рівномірно:  $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_m = x_0 + mh$ .

Побудуємо інтерполяційний поліном у вигляді:

$$N_m(x) = a_0 + a_1(x - x_m) + a_2(x - x_m)(x - x_{m-1}) + \dots + a_m(x - x_m)\dots(x - x_1)$$

Задача полягає в обчисленні значень  $a_0, a_1, \dots, a_m$ .

Покладемо  $x = x_m$  то  $f(x_m) = N_m(x_m) = a_0$

Покладемо  $x = x_{m-1}$ .

$$f(x_{m-1}) = N_m(x_{m-1}) = a_0 + a_1(x_{m-1} - x_m).$$

$$\text{Звідки } a_1 = \frac{f(x_m) - f(x_{m-1})}{(x_m - x_{m-1})} = \frac{\Delta f(x_{m-1})}{h}.$$

Для  $x = x_{m-2}$  маємо:

$$f(x_{m-2}) = N_m(x_{m-2}) = a_0 + a_1(x_{m-2} - x_m) + a_2(x_{m-2} - x_m)(x_{m-2} - x_{m-1}).$$

$$a_2 = \frac{f(x_m) - 2f(x_{m-1}) + f(x_{m-2})}{2!h^2} = \frac{\Delta^2 f(x_{m-2})}{2!h^2}.$$

Аналогічно, для  $x = x_k$  маємо:

$$a_k = \frac{\Delta^k f(x_{m-k})}{k!h^k} \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Таким чином, маємо :

$$\begin{aligned} N_m(x) = & f(x_m) + \frac{\Delta f(x_{m-1})}{h} (x - x_m) + \frac{\Delta^2 f(x_{m-2})}{2!h^2} (x - x_m)(x - x_{m-1}) + \\ & + \frac{\Delta^3 f(x_{m-3})}{3!h^3} (x - x_m)(x - x_{m-1})(x - x_{m-2}) + \dots + \\ & + \frac{\Delta^m f(x_0)}{m!h^m} (x - x_m)(x - x_{m-1}) \dots (x - x_1). \end{aligned}$$

## Завдання

Покласти  $t = \frac{x - x_m}{h}$  і отримати іншу

форму запису другої інтерполяційної формули Ньютона.

$$N_m(t) = f(x_0) + t\Delta f(x_0) + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f(x_0) + \dots \\ \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-(m-1))}{m!} \Delta^m f(x_0).$$

$$N_m(t) = f(x_n) + t\Delta f(x_{m-1}) + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 f(x_{m-2}) + \dots \\ \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+m-1)}{m!} \Delta^m f(x_0).$$

## ВИБІР ВУЗЛІВ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Похибки інтерполяційних формул дорівнюють добутку двох множників, з яких один,  $f^{(m+1)}(\xi)$ , залежить від властивостей функції і не піддається корегуванню, а величина  $\omega_{m+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{m-1})(x - x_m)$  визначається винятково вибором вузлів інтерполяції.

$$r_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \omega_{m+1}(x).$$

Задача про раціональний вибір вузлів інтерполяції  $x_i$  (для заданого  $m$ ) полягає у знаходженні найменшого максимального значення  $\omega_{m+1}(x)$ .

Вузли задаються:

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \xi_i, \quad \xi_i = -\cos \frac{2i+1}{2m+2} \pi, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$



$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}, \quad i \neq j \neq k.$$

$$f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}) = \frac{f(x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}) - f(x_j, \dots, x_{j+k})}{x_{j+k+1} - x_j}.$$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots$$

$x_0$	$f(x_0)$			...	
		$f(x_0, x_1)$		...	
$x_1$	$f(x_1)$		$f(x_0, x_1, x_2)$	...	
		$f(x_1, x_2)$		...	
$x_2$	$f(x_2)$			...	
...	...	...	...	...	$f(x_0, x_1, \dots, x_n)$
			$f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$	...	
		$f(x_{n-1}, x_n)$		...	
$x_n$	$f(x_n)$			...	

$$\begin{aligned}
 L_n(x) &= f(x_0) + \sum_{j=1}^n (x-x_0)\dots(x-x_{j-1}) f(x_0, x_1, \dots, x_j) = \\
 &= f(x_0) + (x-x_0)f(x_0, x_1) + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots \\
 &\quad \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_n(x) &= f(x_n) + (x-x_n)f(x_n, x_{n-1}) + (x-x_n)(x-x_{n-1})f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots \\
 &\quad \dots + (x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_1)f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0),
 \end{aligned}$$

Поліноми Чебишева першого роду  $T_n(x)$  можуть бути визначені за допомогою рекурсивних співвідношень ( $n \geq 2$ )

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

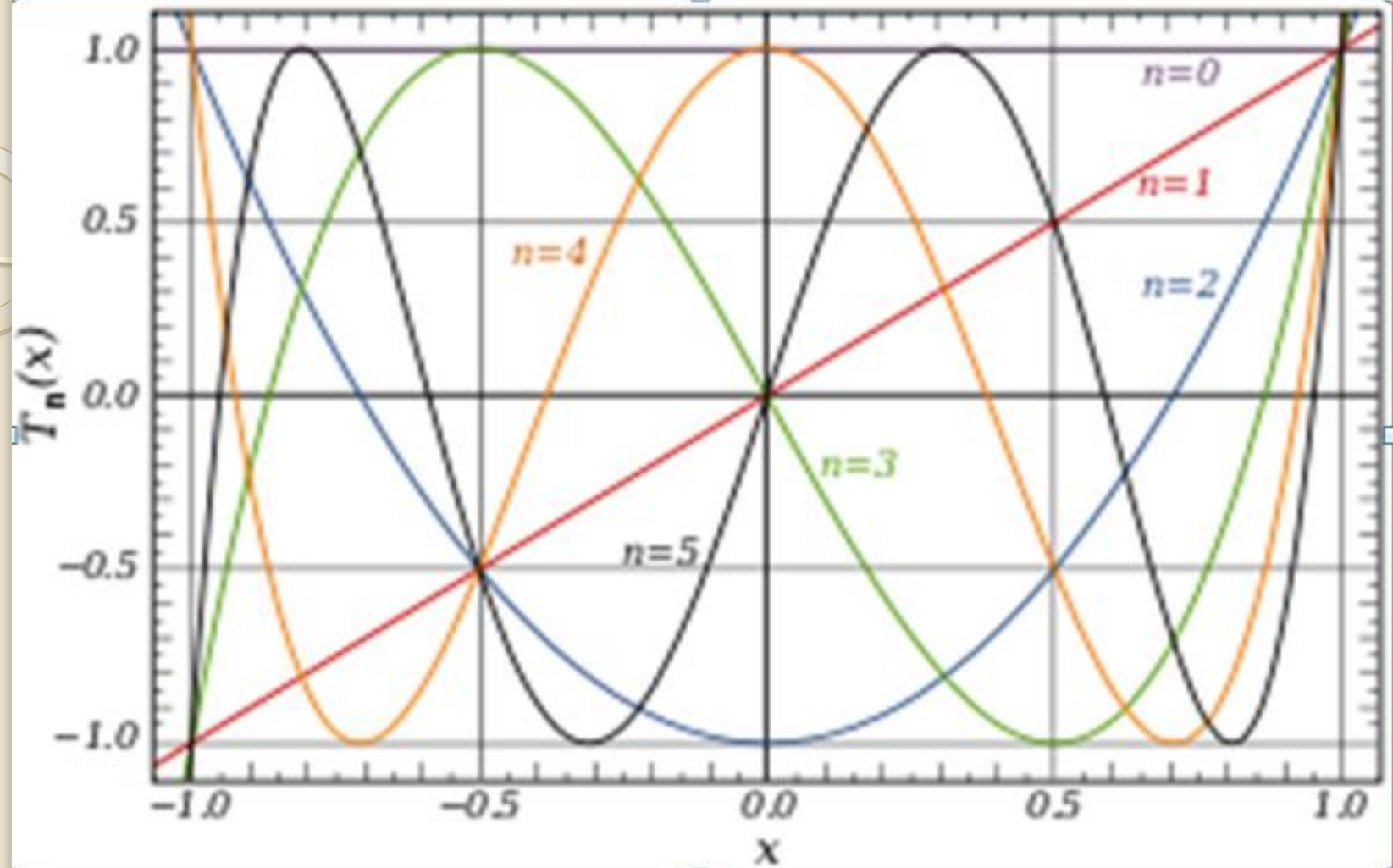
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x.$$



# ЗБІЖНІСТЬ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ

Збільшення кількості вузлів інтерполяції з метою зменшення похибки  $f(x) - L_m(x)$  не завжди виправдане. Необхідно досліджувати збіжність інтерполяційного процесу. Для цього вводять систему сіток, а саме:

$$S^0 = \{x_0^0\},$$

$$S^1 = \{x_0^1, x_1^1\},$$

... ..

$$S^m = \{x_0^m, x_1^m, \dots, x_m^m\},$$

Теорема Фабера: За будь-якої послідовності сіток  $S^m$  знайдеться неперервна на відрізку  $[a, b]$  функція  $f(x)$ , що послідовність інтерполяційних поліномів  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)$ , побудованих на послідовності сіток, не збігатиметься до  $f(x)$ .

# Кусково-поліноміальна інтерполяція

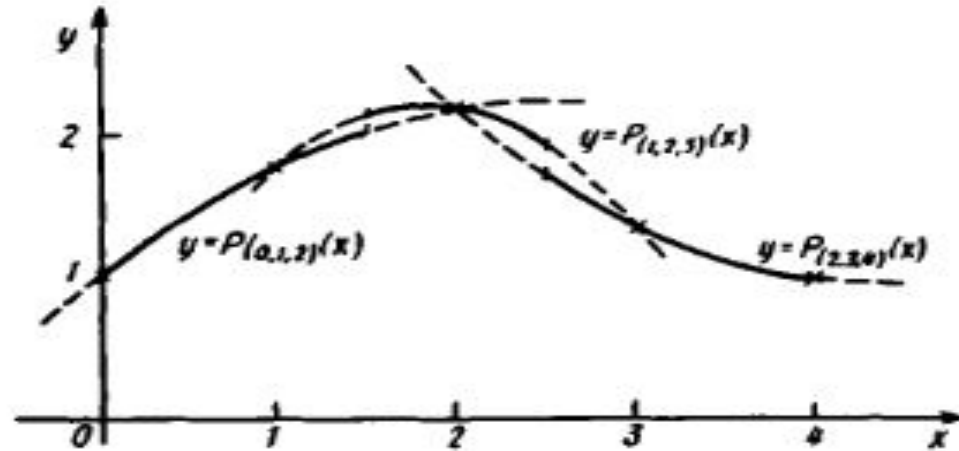
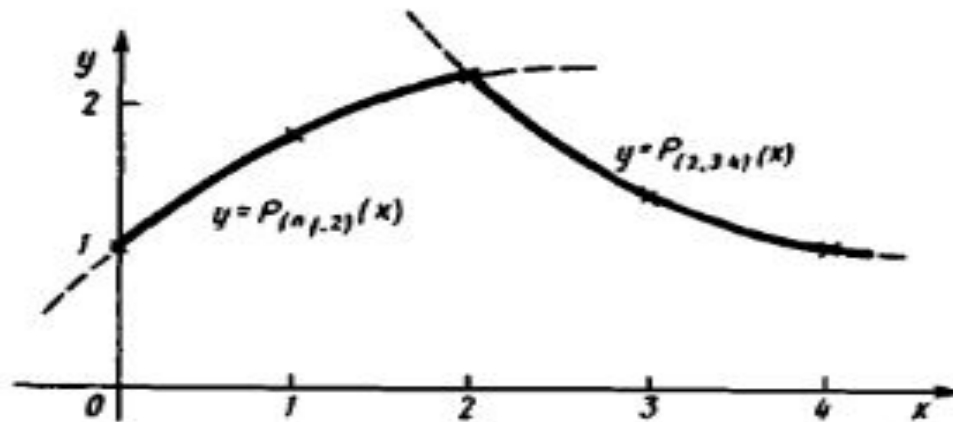


Рис. 11.6



# СПЛАЙНИ

Поліном третього степеня називається кубічним сплайном  $S(x)$ , що відповідає функції  $f(x)$  і заданий на сітці вузлів  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_m \equiv b$ , якщо задовольняються такі умови:

- на кожному відрізку  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ , функція  $S(x)$ , є поліномом третього степеня:

$$S(x) = S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3,$$

$$x_i \ll x \ll x_{i+1}.$$

- функція  $S(x)$ , а також її перша і друга похідні наперервні на відрізку  $[a, b]$ ;
- у вузлах інтерполяції  $S(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = 1, m$ .

Доведення існування кубічного сплайна і того, що такий сплайн тільки один, містить спосіб його побудови.

Кількість невідомих коефіцієнтів –  $(4m - 4)$ .

СЛАР для обчислення коефіцієнтів сплайна:

$$S_i(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, m,$$

$$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i), \quad i = 2, m-1;$$

$$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i), \quad i = 2, m-1;$$

$$S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i), \quad i = 2, m-1;$$

$$S''_1(x_1) = 0,$$

$$S''_m(x_m) = 0.$$

СЛАР з  $(4m - 4)$  рівнянь має  $(4m - 4)$  невідомих коефіцієнтів.



Дану СЛАР після перетворень можна звести до СЛАР з тридіагональною матрицею виду:

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{3}(c_{i+2} + 2c_{i+1}) =$$

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h} - \frac{h}{3}(c_{i+1} + 2c_i) + 2c_i h + c_{i+1} - c_i, \quad i = 1, m-1;$$

де  $c_1 = 0$ ,  $c_m = -3d_m h$ ,

$$a_i = f(x_i), \quad d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h},$$

$$b_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{3}(c_{i+2} + 2c_{i+1}),$$

**Теорема.** Нехай функція  $f(x) \in C^4[a,b]$ . Тоді для кубічного сплайну  $S(x)$ , побудованого на системі вузлів

$a = x_1 < x_2 < \dots < x_m \equiv b$ , справедливі нерівності:

$$\max_{[a,b]} |f(x) - S(x)| \leq M_4 h^4,$$

$$\max_{[a,b]} |f'(x) - S'(x)| \leq M_4 h^3,$$

$$\max_{[a,b]} |f''(x) - S''(x)| \leq M_4 h^2,$$

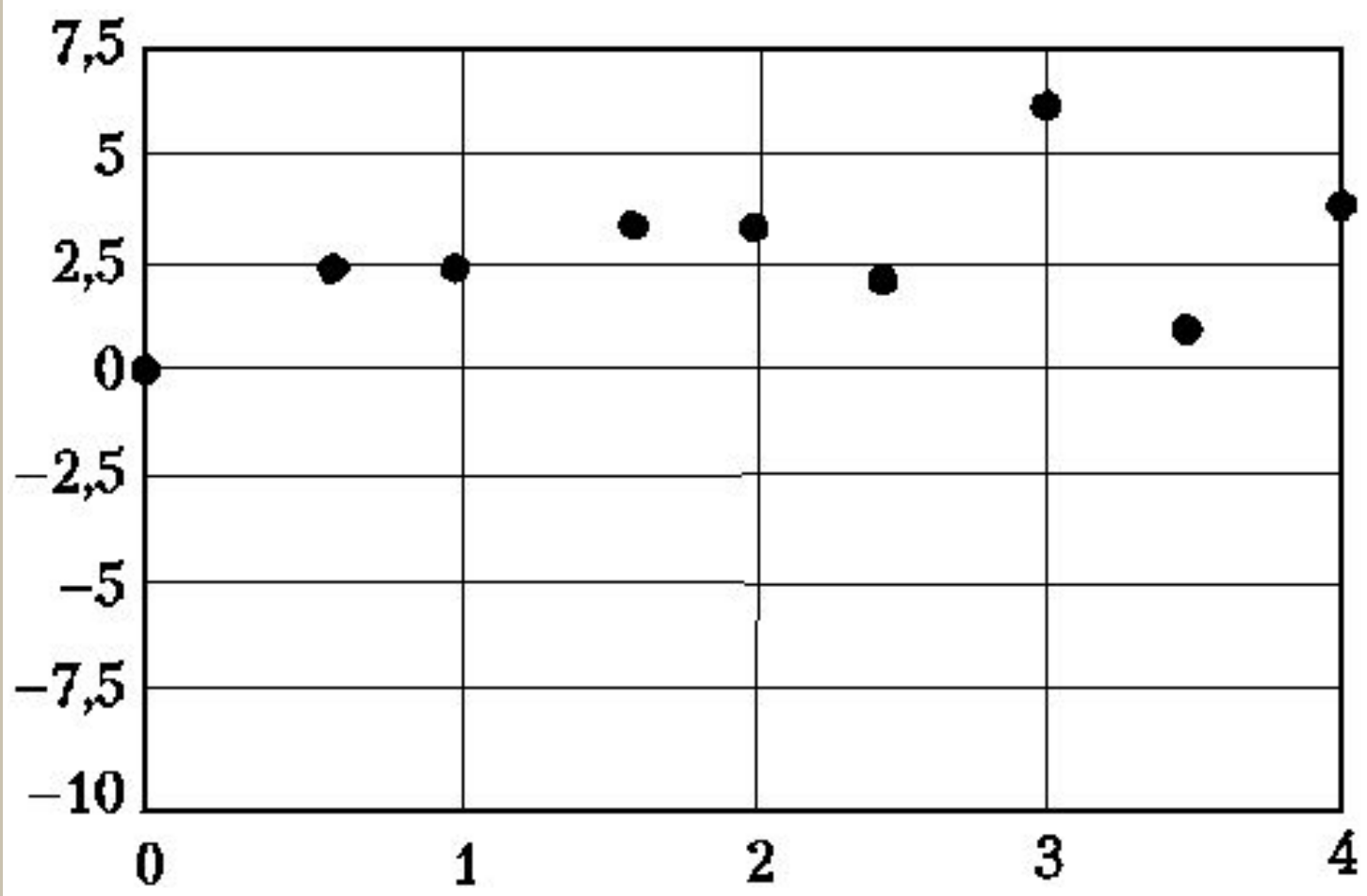
де

$$M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|, \quad h = \max_m (x_{m+1} - x_m).$$

Звідси випливає, що при  $h \rightarrow 0$  послідовність функцій

$S^{(k)}(x)$ ,  $k=0,1,2$  (кубічний сплайн та його перші дві похідні)

збігається до  $f^{(k)}(x)$ , відповідно.



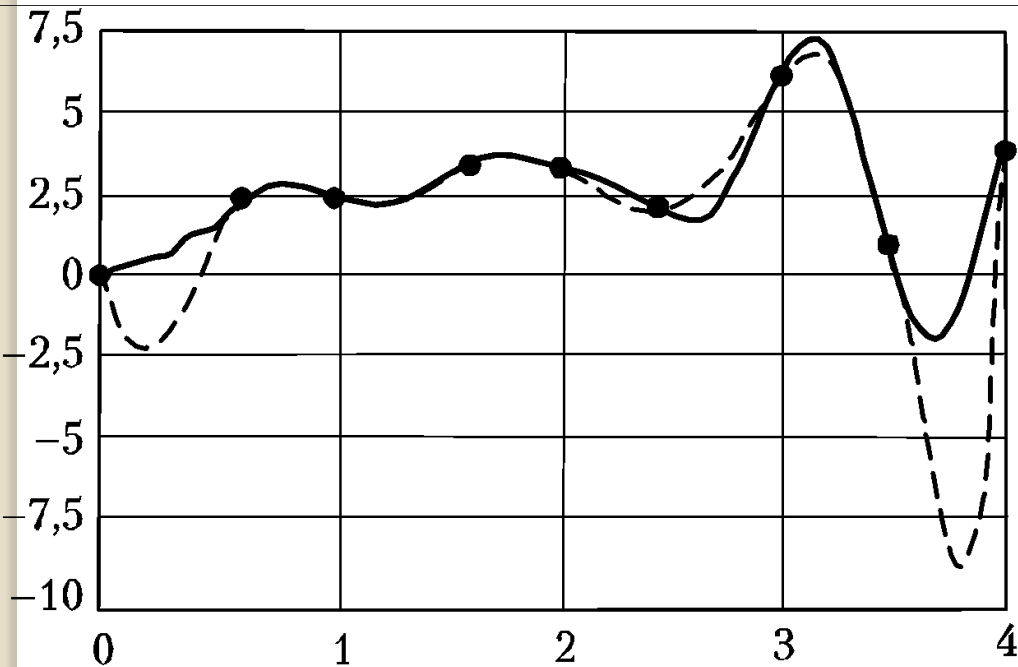
$\{x_i, f(x_i)\} = \{(0, 0), (0.5, 2), (1., 2.25), (1.5, 3), (2, 3.25), (2.5, 3), (3, 6), (3.5, 0.75), (4, 3.75)\};$

$\{a[1]= 2, a[2] = 2.25, a[3] = 3,$   
 $a[4] = 3.25, a[5] = 3, a[6] = 6,$   
 $a[7] = 0.75, a[8] = 3.75,$

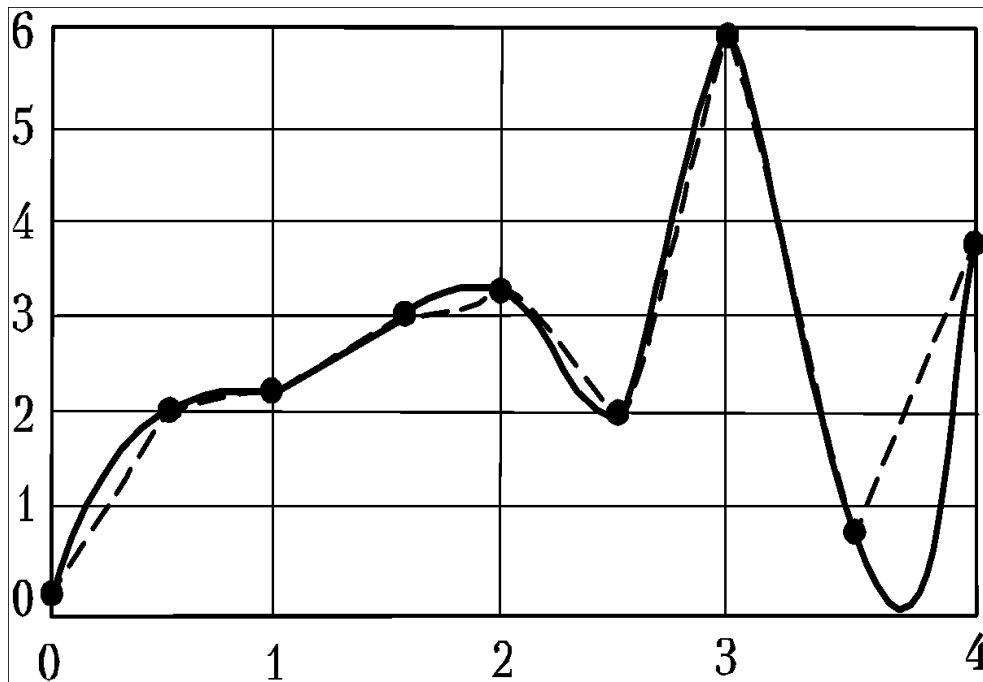
$\{b[1]= 2.45238, b[2] = 5.54762, b[3] = -3,$   
 $b[4] = 4.04762, b[5] = -2.45238, b[6] = 4.90476,$   
 $b[7] = 16.1429, b[8] = 33.7619,$

$c[1] = 2.28719 \times 10^{-17}, c[2] = 6.19048,$   
 $c[3] = -7.80952, c[4] = 2.38095, c[5] = -9.42857,$   
 $c[6] = -19.0476, c[7] = 13.5238, c[8] = -79.5238,$

$d[1] = 3.09524, d[2] = -13.1905, d[3] = 12.9048,$   
 $d[4] = -8.28571, d[5] = 4.61905, d[6] = 35.3333,$   
 $d[7] = -60.0476, d[8] = 119.286$



Результати інтерполяції функції поліномом Лагранжа (пунктирна лінія) і кубічним сплайном (суцільна лінія)



Результати інтерполяції функції лінійним сплайном (пунктирна лінія) і кубічним сплайном (суцільна лінія)

# МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Міра відхилення заданих значень від обраної функції у заданих  $m + 1$  точках  $(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, 2, \dots, m$ :

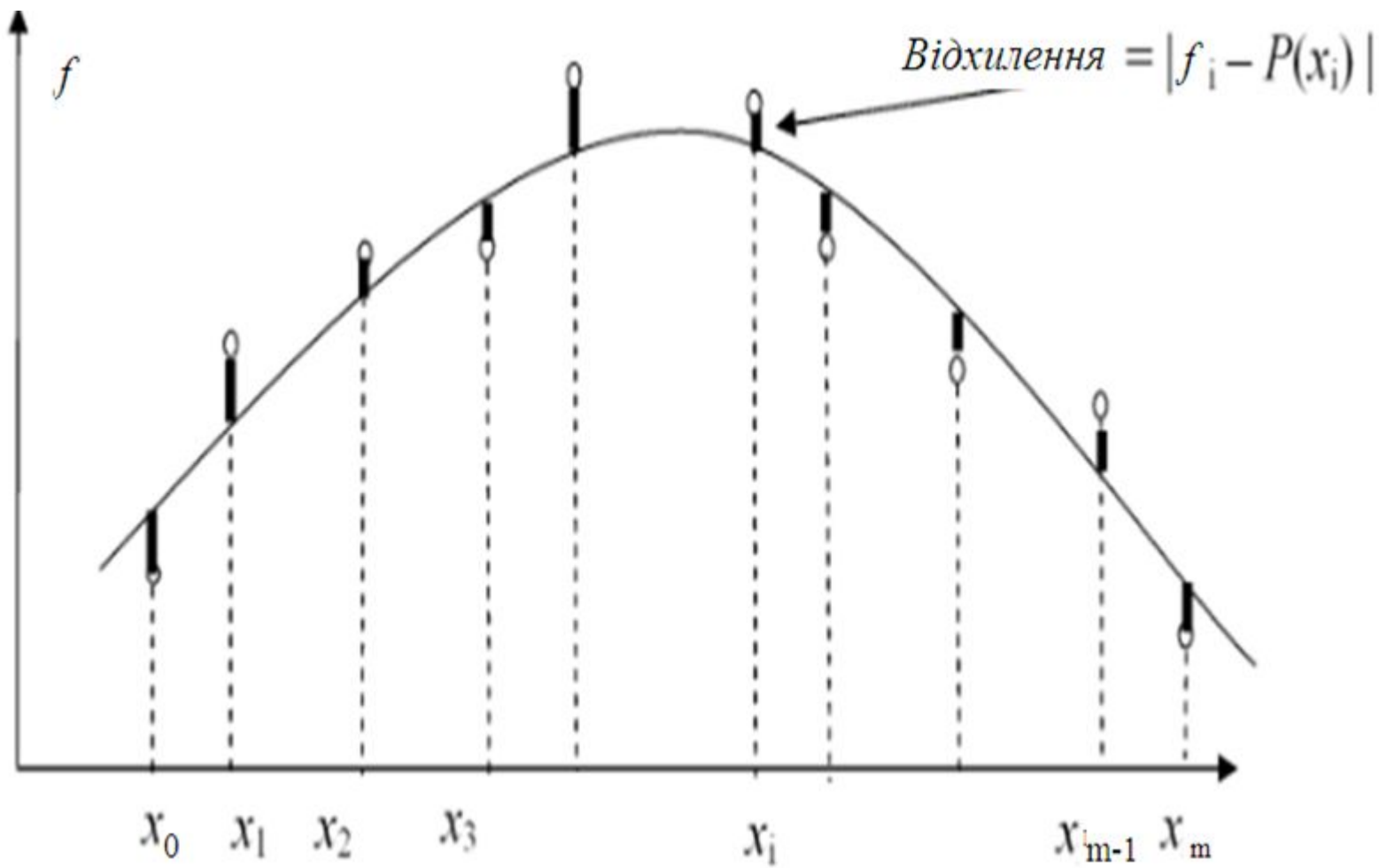
$$I = \sum_{i=0}^m (f(x_i) - P_k(x_i))^2 \rightarrow \min.$$

повинна бути мінімальною.

Задамо

$$P_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k, \quad k < m,$$

$$I = \sum_{i=0}^m [a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_kx_i^k - f(x_i)]^2 \rightarrow \min.$$



Необхідно, щоб для всіх коефіцієнтів виконувалась умова:

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = 0, j = 0, m.$$

Почнемо з  $a_0$

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=0}^m [a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_k x_i^k - f(x_i)] 1 = 0.$$

Далі продовжимо для всіх  $a_j$

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=0}^m [a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_k x_i^k - f(x_i)] x_i^j = 0,$$

$$j = 1, k.$$



У результаті отримуємо СЛАР виду:

$$\begin{bmatrix}
 k+1 & \sum_{i=0}^m x_i & \sum_{i=0}^m x_i^2 & \dots & \sum_{i=0}^m x_i^k \\
 \sum_{i=0}^m x_i & \sum_{i=0}^m x_i^2 & \sum_{i=0}^m x_i^3 & \dots & \sum_{i=0}^m x_i^{k+1} \\
 \sum_{i=0}^m x_i^2 & \sum_{i=0}^m x_i^3 & \sum_{i=0}^m x_i^4 & \dots & \sum_{i=0}^m x_i^{k+2} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \sum_{i=0}^m x_i^k & \sum_{i=0}^m x_i^{k+1} & \sum_{i=0}^m x_i^{k+2} & \dots & \sum_{i=0}^m x_i^{2k}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_0 \\
 a_1 \\
 a_1 \\
 \dots \\
 a_k
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \sum_{i=0}^m f(x_i) \\
 \sum_{i=0}^m f(x_i)x_i \\
 \sum_{i=0}^m f(x_i)x_i^2 \\
 \dots \\
 \sum_{i=0}^m f(x_i)x_i^k
 \end{bmatrix}
 .$$

$$P_1(x) = a_0 + a_1x,$$

$$(n+1)a_0 + \left[ \sum_{i=0}^n x_i \right] a_1 = \sum_{i=0}^n y_i,$$

$$\left[ \sum_{i=0}^n x_i \right] a_0 + \left[ \sum_{i=0}^n x_i^2 \right] a_1 = \sum_{i=0}^n y_i x_i.$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

$$(n+1)a_0 + \left[ \sum_{i=0}^n x_i \right] a_1 + \left[ \sum_{i=0}^n x_i^2 \right] a_2 = \sum_{i=0}^n y_i,$$

$$\left[ \sum_{i=0}^n x_i \right] a_0 + \left[ \sum_{i=0}^n x_i^2 \right] a_1 + \left[ \sum_{i=0}^n x_i^3 \right] a_2 = \sum_{i=0}^n y_i x_i,$$

$$\left[ \sum_{i=0}^n x_i^2 \right] a_0 + \left[ \sum_{i=0}^n x_i^3 \right] a_1 + \left[ \sum_{i=0}^n x_i^4 \right] a_2 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^2.$$

$x$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$y$	0.21	0.23	0.31	0.29	0.42	0.35	0.58	0.61	0.59	0.66

$$\sum_{i=0}^9 x_i = 4.5, \quad \sum_{i=0}^9 x_i^2 = 2.85, \quad \sum_{i=0}^9 x_i^3 = 2.025, \quad \sum_{i=0}^9 x_i^4 = 1.5333, \quad \sum_{i=0}^9 y_i = 4.25,$$

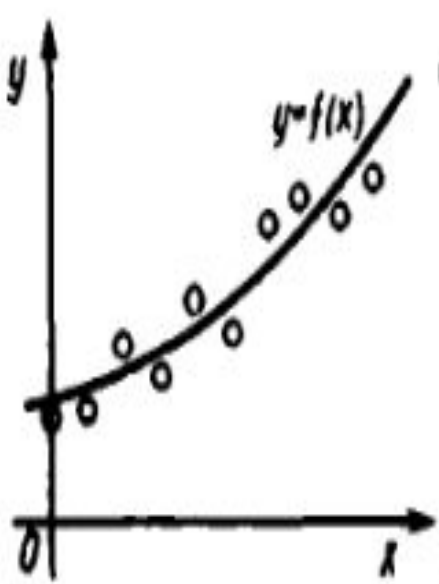
$$\sum_{i=0}^9 y_i x_i = 2.356, \quad \sum_{i=0}^9 y_i x_i^2 = 1.6154.$$

$$\begin{aligned} 10a_0 + 4.5a_1 &= 4.25, \\ 4.5a_0 + 2.85a_1 &= 2.356. \end{aligned}$$

$$f(x) \approx 0.183 + 0.536x$$

$$\begin{aligned} 10a_0 + 4.5a_1 + 2.85a_2 &= 4.25, \\ 4.5a_0 + 2.85a_1 + 2.025a_2 &= 2.356, \\ 2.85a_0 + 2.025a_1 + 1.5333a_2 &= 1.6154, \end{aligned}$$

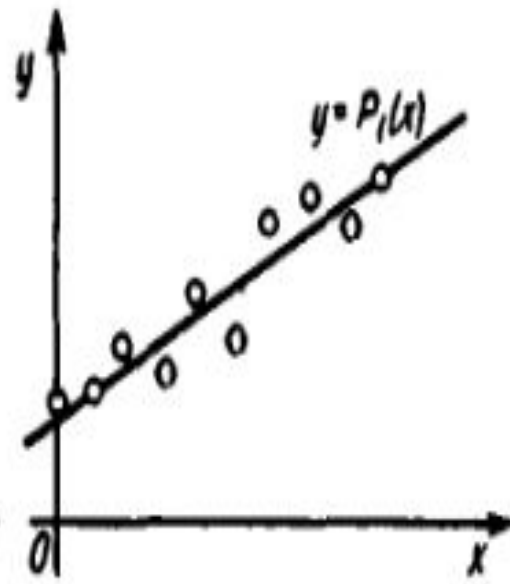
$$a_0 \approx 0.194, \quad a_1 \approx 0.452, \quad a_2 \approx 0.0947$$



$\sigma_1$



$\delta_1$



$\theta_1$

$$y = \sqrt{x}, \quad x \in [0,1]. \quad P = ax + b,$$

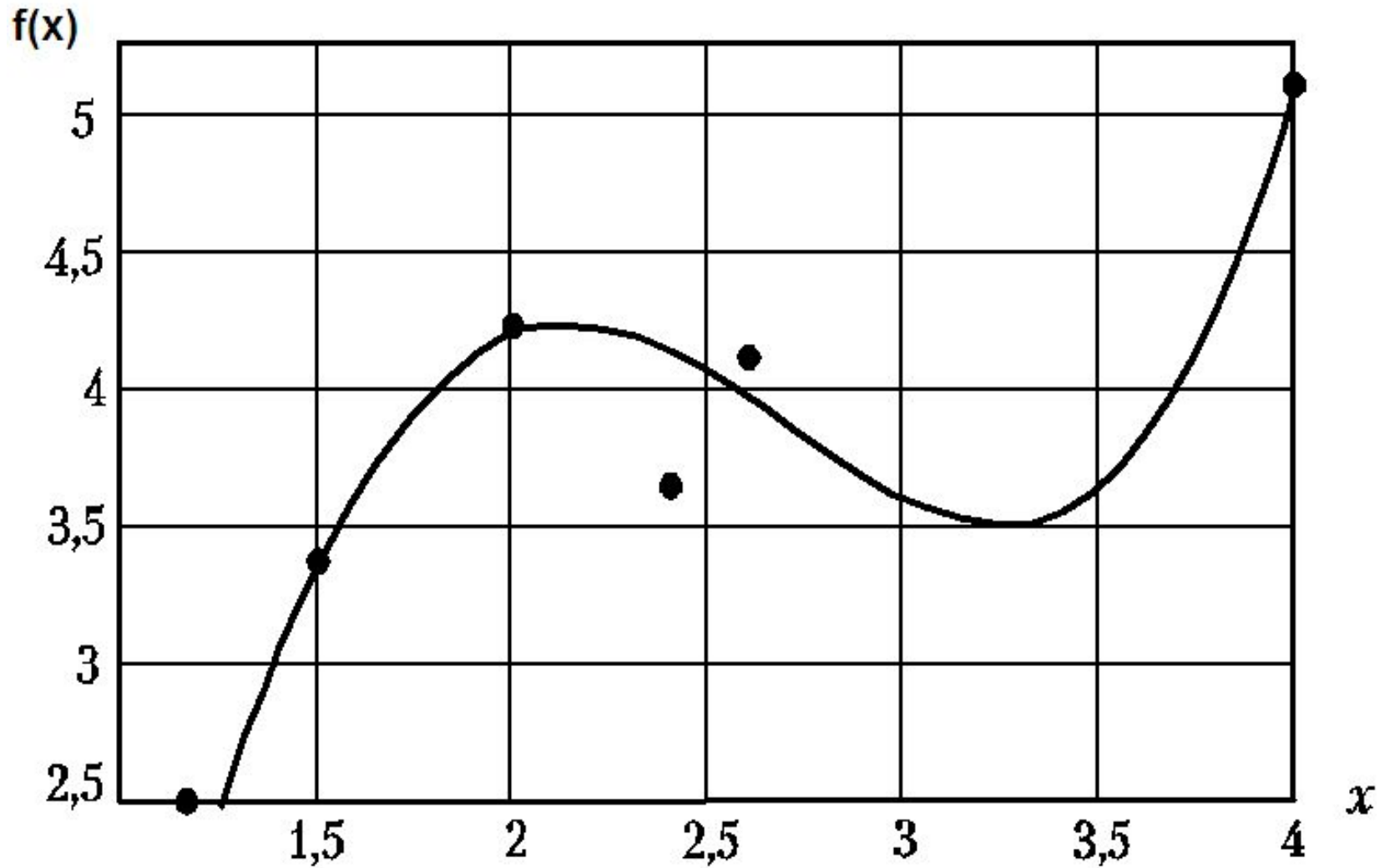
$$\varphi(a,b) = \int_0^1 (\sqrt{x} - ax - b)^2 dx.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = -2 \int_0^1 x(\sqrt{x} - ax - b) dx = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = -2 \int_0^1 (\sqrt{x} - ax - b) dx = 0.$$

$$a = 0.8, \quad b = \frac{4}{15}.$$

$$P_1(x) = 0.8x + \frac{4}{15}$$



$$f(x) = -35.417 + 59.0875x - 28.1038x^2 + 4.11221x^3$$

