



# Невизначений інтеграл, його властивості і обчислення

*1. Первісна і невизначений інтеграл.*

*2. Властивості невизначеного інтеграла.*

*Таблиця невизначених інтегралів.*

*3. Основні методи знаходження невизначеного інтеграла.*

# Первісна і невизначений інтеграл

**Визначення.** Функція  $F(x)$  називається *первісною* для функції  $f(x)$ , якщо її похідна або диференціал задовольняє умову

$$F'(x) = f(x), \quad \text{або}$$
$$dF(x) = f(x)dx.$$

# Первісна і невизначений інтеграл

Якщо  $F(x)$  є первісною для  $f(x)$ , то і кожна функція виду  $F(x) + C$  також є первісною для  $f(x)$ .

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

Для кожної неперервної на проміжку функції існують первісні на цьому проміжку. Знаходження цих первісних називається *інтегруванням*.

Сукупність усіх первісних для функції  $f(x)$  називається *невизначеним інтегралом від*

функції  $f(x)$ : 
$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

# Властивості невизначеного інтегралу

Похідна невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральній функції, а його диференціал - підінтегральному виразу.  
Дійсно:

$$1. (\int f(x) dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x);$$

$$2. d \int f(x) dx = (\int f(x) dx)' dx = f(x) dx.$$

# Властивості невизначеного інтегралу

Невизначений інтеграл від диференціала  
неперервно диференційовної функції  
дорівнює самій цій функції

$$3. \int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C,$$

так як  $\varphi(x)$  є первісною для  $\varphi'(x)$ .

# Властивості невизначеного інтегралу

Сформулюємо далі наступні властивості невизначеного інтегралу:

4. Якщо функції  $f_1(x)$  і  $f_2(x)$  мають первісні, то функція  $f_1(x) + f_2(x)$  також має первісну, при цьому:  $\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$  ;

5.  $\int Kf(x) dx = K \int f(x) dx$  ;

6.  $\int f'(x) dx = f(x) + C$  ;

7.  $\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C$  .

# Таблиця невизначених інтегралів

$$1. \int dx = x + C .$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C .$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C .$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C .$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C .$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C .$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C .$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctgx} + C .$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tgx} + C .$$

$$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctgx} + C .$$

# Таблиця невизначених інтегралів

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$15. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C .$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$$



# ***Методи інтегрування***

# 1. Метод безпосереднього інтегрування

Приклад. Обчислити  $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)dx$

Так як під знаком інтегралу знаходиться сума чотирьох доданків, то розкладемо інтеграл на суму чотирьох інтегралів:

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)dx &= \int x^2 dx + 3\int x^3 dx + \int x dx + \int dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C\end{aligned}$$

## 2. Метод заміни змінної (спосіб підстановки).

Застосовується наступна формула:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \quad (4)$$

де  $x = \varphi(t)$  - диференційована функція ,

а  $t$  - нова змінна.

# Приклади

Приклад 1 . Обчислити :

$$\int \cos 2x dx = \left. \begin{array}{l} 2x = t \\ d(2x) = dt \\ 2dx = dt \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

# Приклади

**Приклад 2.** Обчислити:  $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$ .

**Рішення.** Преобразімо  $x^2 + 4x + 5$ ,

виділяючи повний квадрат по формулі  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ .

Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned}x^2 + 4x + 5 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 4 - 4 + 5 = \\&= \left( x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4 \right) + 1 = (x + 2)^2 + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} &= \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1} = \left. \begin{array}{l} x + 2 = t \\ x = t - 2 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \\&= \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x + 2) + C.\end{aligned}$$

# Приклади

**Приклад 3.** Обчислити :

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x} dx &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t, x = t^2, \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{1+t}{1+t^2} 2t dt = \\ &= 2 \int \frac{t dt}{1+t^2} + 2 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = \left| \begin{array}{l} 1+t^2 = z, \\ 2t dt = dz, t dt = \frac{1}{2} dz \end{array} \right| = \int \frac{dz}{z} + 2 \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt = \\ &= \ln|z| + 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = \ln(t^2 + 1) + 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \ln(t^2 + 1) + 2t - 2 \operatorname{arctg} t + C = \ln(x + 1) + 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

### 3. Метод інтегрування частинами

Цей метод засновано на формулі  $\int u dv = uv - \int v du$  (3)

Методом інтегрування частинами беруть такі інтеграли:

а)  $\int x^n \sin x dx$ , де  $n = 1, 2, \dots, k$ ;

б)  $\int x^n e^x dx$ , де  $n = 1, 2, \dots, k$ ;

в)  $\int x^n \arctg x dx$ , де  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$ ;

г)  $\int x^n \ln x dx$ , де  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$ .

При обчисленні інтегралів а) і б) вводять позначення:  $x^n = u$ , тоді  $du = nx^{n-1} dx$ , наприклад  $\sin x dx = dv$ , тоді  $v = -\cos x$ .

При обчисленні інтегралів в), г) позначають за  $u$  функцію  $\arctg x$ ,  $\ln x$ , а за  $dv$  беруть  $x^n dx$ .

# Приклади

Приклад 1. Обчислити  $\int x \cos x dx$  .

$$\int x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C .$$



# Приклади

Приклад 2. Обчислити

$$\int x \ln x dx = \left. \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C.$$