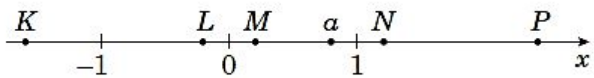
Концентруємо увагу!
Помилки :

22. На координатній осі x вибрано точку з координатою a так, як зображено на рисунку. Установіть відповідність між виразом (1–3) та точкою на осі x (А – Д), координата якої дорівнює значенню цього виразу.



Вираз		*Точка на осі x*	
1	$-2a$	А	M
2	3^a	Б	L
3	$\lvert a-1 \rvert$	В	P
		Г	K
		Д	N

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

1) $a > 0$ $\quad a < 1$
$-2a < 0$ $\quad 2a < 2$
$-2a > -2$
$a > \frac{1}{2}$
$2a > 1$
$-2a < -1$ $\quad K \to |-2a|$

2) $a < 1$ $\quad a > \frac{1}{2}$
$3^a < 3^1$ $\quad 3^a > 3^{\frac{1}{2}}$
Так як $3 > 1$, то ф-ція зростає
$3^a > \sqrt{3}$
$3^a > 1,7$; $N \to 3^a$ неправильно, правильно Р

3) $|a-1| = |1-a|$
$M \to |a-1|$

Концентруємо увагу!
Помилки:

1) х – вартість для дитини

$1,5x$ – для дорослого

2 велосипеди для дорослих

$$2 \cdot 1,5x + x = 1200$$
$$3x + x = 1200$$
$$4x = 1200$$
$$x = 300$$

300 грн – вартість для дитини

2) 15% від 300 грн

$15\% = 0,15$

$0,15 \cdot 300 = 45$

$3 \cdot 45 = 135$ грн

25. Сім'я за оренду двох велосипедів для батьків та одного велосипеда для дитини заплатила 1200 грн. Вартість оренди одного велосипеда для дорослих в 1,5 раза більша за вартість оренди одного велосипеда для дитини.

1. Визначте вартість (у грн) оренди велосипеда для дитини.

33. Задано функції $f(x) = 3 - \frac{x}{4}$ та $g(x) = \log_2 x$.

Завдання (1–3) виконайте на одному рисунку.

1. Побудуйте графік функції f.
2. Побудуйте графік функції g.
3. Позначте точку перетину графіків функцій f і g та запишіть її координати.
4. Скориставшись рисунком, розв'яжіть нерівність $f(x) \geqslant g(x)$.

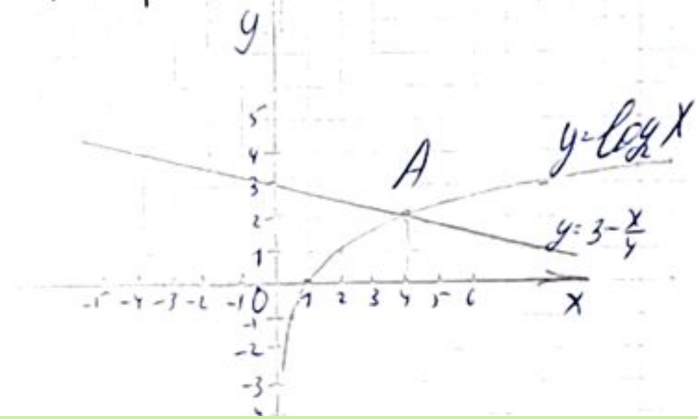
$A(4;2)$ – точка перетину

$f(x) \geq g(x)$, якщо

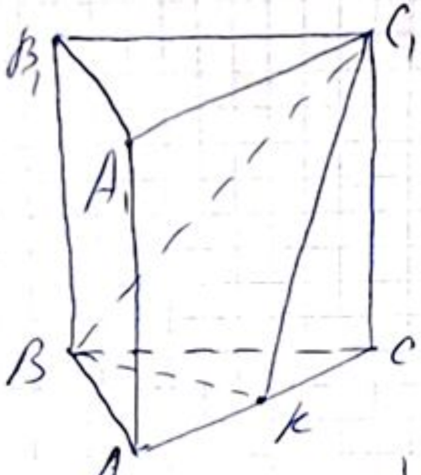
$x \in (0;4]$

$g(x) = \log_2 x$ $\quad x > 0$

x	1	$\frac{1}{2}$	2	4	8
y	0	-1	1	2	3



34. Задано правильну трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$, основою якої є трикутник ABC. Висота призми дорівнює H, діагональ бічної грані нахилена до площини основи під кутом α. Через висоту BK трикутника ABC та вершину C_1 проведено площину γ.



1) $ABCA_1B_1C_1$ — правильна трикутна призма

△ABC — рівносторонній, BK — медіана, бісектриса, висота

$CC_1 = H$

BC_1K — переріз є трикутником

2) C_1C — перпендикуляр, C_1B — діагональ бічної грані, похила

BC — проекція

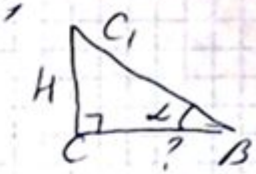
$\angle C_1BC = \alpha$ — кут між діагоналлю і площиною основи

3) CC_1 — перпендикуляр, C_1K — похила, CK — проекція на (ABC)

Так як $BK \perp AC$, то і $BK \perp C_1K$ за теоремою про три перпендикуляри

△BC_1K — прямокутний, $\angle K = 90^\circ$

4) Знайдемо площу: $S_{BC_1K} = \frac{1}{2} BK \cdot KC_1$



5) З △BCC_1

$tg\angle B = \frac{CC_1}{CB}$

$CB = \frac{CC_1}{tg\alpha} = \frac{H}{tg\alpha}$

$BK = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{H\cdot\sqrt{3}}{tg\alpha\cdot 2}$

$CK = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot\frac{H}{tg\alpha}$

З △KC_1C за теоремою Піфагора знайдемо C_1K:

$C_1K^2 = CC_1^2 + KC^2$

$C_1K^2 = \frac{H^2}{4tg^2\alpha} + H^2 = \frac{H^2(1+4tg^2\alpha)}{4tg^2\alpha} \Rightarrow$

$C_1K = \sqrt{\frac{H^2(1+4tg^2\alpha)}{4tg^2\alpha}} = \frac{H\sqrt{1+4tg^2\alpha}}{2|tg\alpha|} = \frac{H\sqrt{1+4tg^2\alpha}}{2tg\alpha}$, $tg\alpha > 0$

$S_{\triangle BKC_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{H\sqrt{3}}{2tg\alpha}\cdot\frac{H\sqrt{1+4tg^2\alpha}}{2tg\alpha} = \frac{H^2\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+4tg^2\alpha}}{8tg^2\alpha}$

Розв'яжіть завдання 25–32. Одержані числові відповіді запишіть у зошиті та *бланку А*. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми, по одній цифрі в кожній клітинці відповідно до зразків, наведених у *бланку А*.

25. **Поле площею 12 га розділено на три однакові ділянки. За 6 днів трактор зорав половину першої ділянки, $\frac{3}{4}$ другої ділянки і всю третю ділянку, працюючи з однаковою продуктивністю.**

1. Яку площу (в га) трактор орав кожного дня?

4га – I, II, III ділянки
2га + 3га + 4 га = 9га
$\frac{3}{4}$ від 4га
9 : 6 = 1,5 (га) за 1 день

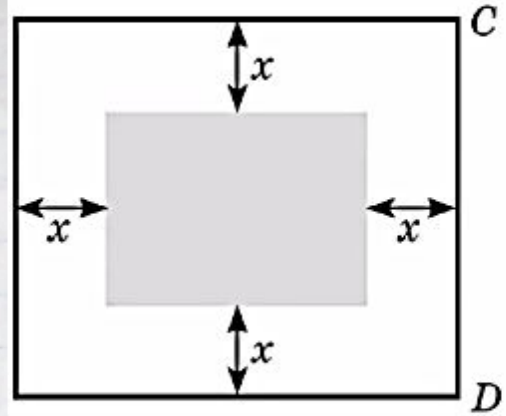
Відповідь: 1,5

2. За скільки днів трактор зоре решту поля?

3 га залишилось
3 : 1,5 = 2 (дні)

25. Фотокартку розміром 20 см × 15 см помістили в рамку (див. рисунок). Площа рамки (площа прямокутника *ABCD*) у 2,5 разу більша за площу самої фотокартки.

1. На скільки відсотків площа рамки більша за площу фотокартки?



$20+2x$ $\quad 20\cdot 15=300\,(см^2)$ була

$15+2x$

$(20+2x)\cdot(15+2x)$ — стала

$(20+2x)\cdot(15+2x)=300\cdot 2{,}5$

$300+30x+40x+4x^2=750$

$4x^2+70x-450=0$

$2x^2+35x-225=0$

$D=1225+1800=3025=55^2$

$x_{1,2}=\dfrac{-35\pm 55}{4}$

$x_1=-\dfrac{90}{4}$ — не задов.

$\underline{x_2=5}$ Відповідь: 5

26. Двоє робітників, працюючи разом, за один день виготовили 110 деталей. Виявилось, що 6 % виготовленого першим робітником дорівнює 5 % виготовленого другим.

1. Скільки деталей виготовив другий робітник?

2. На скіль... в другий робітник?

1) x – деталей за 1 день I
y – деталей за 1 день II

$x+y=110$

6% від x   5% від y

$6\%=0{,}06$ $5\%=0{,}05$

$0{,}06x$ $0{,}05y$

$0{,}06x=0{,}05y$

$6x=5y$

$\begin{cases} x+y=110 \\ 6x=5y \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=110 \\ 6x-5y=0 \end{cases} \Big| \cdot 5$

$\begin{cases} 5x+5y=550 \\ 6x-5y=0 \end{cases}$ (+)

$11x=550$

$x=550:11$

$\underline{x=50}$ $\underline{y=60}$

II за 1 день $\underline{60}$ деталей

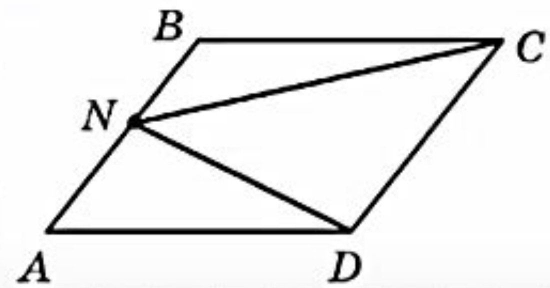
2) На ?% 60 больше 50

1) $60-50=10$

2) ?% 10 від 50

$10:50\cdot 100\%=\underline{20\%}$

29. У паралелограмі $ABCD$ (див. рисунок) точка N належить стороні AB, причому $AB:BN=5:2$. Знайдіть відношення площі трикутника AND до площі трикутника NCD.



$AB : BN = 5 : 2$

Нехай $AB = 5x$; $BN = 2x$

$AN = 3x$;

$$\frac{S_{AND}}{S_{NCD}} = \frac{\frac{1}{2} AN \cdot h}{\frac{1}{2} DC \cdot h} = \frac{AN}{DC} =$$

$$= \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5} = \underline{0{,}6}$$

31. Довідкову інформацію промовляють почергово по одному разу п'ятьма мовами: українською, англійською, німецькою, російською та польською. Скільки всього є варіантів послідовностей озвучування цієї інформації цими п'ятьма мовами, якщо спочатку її промовляють українською?

Перша мова – українська (фіксоване число)
Всі інші чотири мови можна застосовувати
$4! = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ способами
Всього 24 способи

31. Знайдіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ чисел, що належать області визначення функції $y=\log_{8-x} x$.

ОДЗ: $\begin{cases} 8-x>0 \\ 8-x\neq 1 \\ x>0 \end{cases}$

$-x>-8$ $\quad$ $-x\neq -7$

$x<8$ $\quad$ $x\neq 7$

$\begin{cases} x<8 \\ x>0 \\ x\neq 7 \end{cases}$

$x \in (0;7)\cup(7;8)$

Цілі: 1; 2; 3; 4; 5; 6

Кількість: 6

32. У прямокутній системі координат xy на площині задано рівнобедрений трикутник ACB, у якому $AC = BC$, $A(2; -5)$, $B(4; 3)$. Навколо цього трикутника описано коло, задане рівнянням $(x-3)^2 + y^2 + 2y = 16$. Визначте площу трикутника ABC.

O – центр описаного кола, тому $OA = OB = OC$

$(x-3)^2 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 16$

$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 17$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

$a = 3;\ b = -1;\ R = \sqrt{17}$

$O(3; -1)$ – центр

Нехай K – середина AB

$x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$ $\quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$

$x_K = \frac{2+4}{2}$ $\quad y_K = \frac{-5+3}{2}$

$x_K = 3$ $\quad y_K = -1$

$K(3; -1)$, тобто середина AB точка K збігається з центром кола.

$\triangle ACB$ – прямокутний

OC – медіана, бісектриса, висота

$AC = CB$, $AC = \frac{AB}{\sqrt{2}}$

$AB = 2R = 2\sqrt{17}$

$AC = \frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{17} = \sqrt{34}$

$S_{ACB} = \frac{1}{2} AC^2 = \frac{1}{2} \cdot 34 = 17$

проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками тощо.

33. Задано функції $f(x)=3-|x|$ і $g(x)=x^2+1$.

1. Побудуйте графік функції $f(x)$.

2. Побудуйте графік функції $g(x)$.

3. Знайдіть кут, який утворює з додатним напрямом осі Ox графік функції $f(x)$ у точці $x=2$.

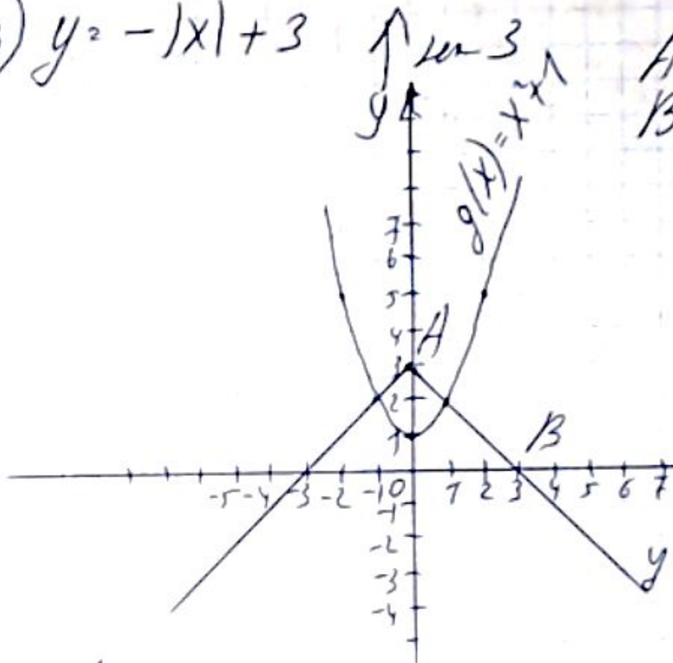
4. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками заданих функцій. У відповідь запишіть $3S$.

1) $f(x) = 3 - |x|$

1) $y = |x|$

2) $y = -|x|$

3) $y = -|x| + 3$



2) $g(x) = x^2+1$ − графіком є парабола

x	0	1	−1	2	−2
y	1	2	2	5	5

3) $S_{\triangle}$ AOB

$tg\angle ABO = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \angle$

$tg\angle ABO = \frac{AD}{OB}$ $\angle ABx = 180 - 45^\circ = 135^\circ$

4) $S_{фігури} = 2 \cdot \int_0^1 (3-x) - (x^2+1)\, dx =$

A при $x > 0$

B $f(x) = 3 - |x| = 3 - x$

$= 2 \cdot \int_0^1 (3 - x - x^2 - 1)\, dx = 2 \cdot \int_0^1 (-x^2 - x + 2)\, dx =$

$= 2 \cdot \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_0^1 =$

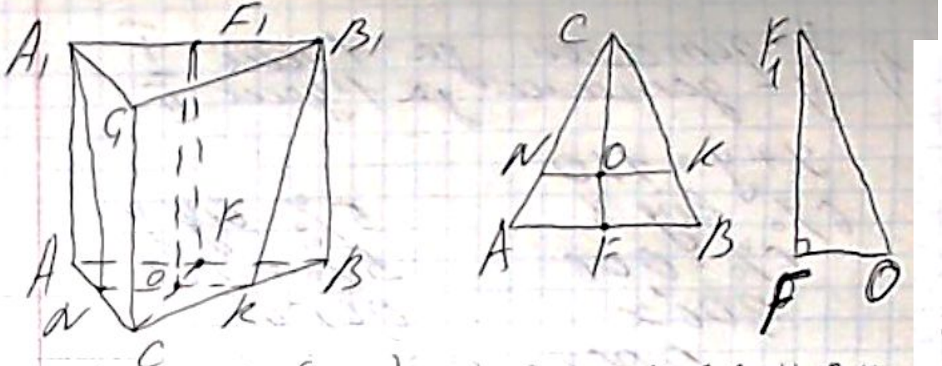
$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = -\frac{2}{3} - 1 + 4 =$

$= 3 - \frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}$

$3 S_{фігури} = 3 \cdot \frac{7}{3} = 7$

Відповідь: 7

34. Дано правильну трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$ (див. рисунок), сторона основи якої дорівнює $4\sqrt{3}$, а бічне ребро $2\sqrt{3}$. Через точки A_1, B_1 і точку O — центр вписаного кола трикутника ABC — проведено



1) $FF_1 \perp (ABC)$, $FF_1 \parallel CC_1 \parallel AA_1 \parallel BB_1$,
O – центр описаного кола ... ABC

З $\triangle F_1FO$:

$tg\angle F_1OF = \frac{F_1F}{FO} = \frac{2\sqrt3}{2} = \sqrt3$

$\angle F_1OF = \underline{60°}$

2) Трапеція $ABKN$ – ортогональна проекція перерізу A_1B_1KN

$S_{ABKN} = S_{A_1B_1KN} \cdot \cos\angle F_1OF$

$S_{A_1B_1KN} = \frac{S_{ABKN}}{\cos 60°}$

...$K \sim \triangle CAB$ ($\angle C$ – спільний, $\angle CNK = \angle A$ – відповідно при $NK \parallel AB$ та січній AC)

... $= \frac{2}{3} = k$; $\frac{S_{CNK}}{S_{CAB}} = k^2 = \frac{4}{9}$

... $= \frac{AB^2\sqrt3}{4} = \frac{16\cdot 3\sqrt3}{4} = 12\sqrt3$

$\frac{S_{CNK}}{12\sqrt3} = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{CNK} = \frac{12\sqrt3\cdot 4}{9} = \frac{16\sqrt3}{3}$

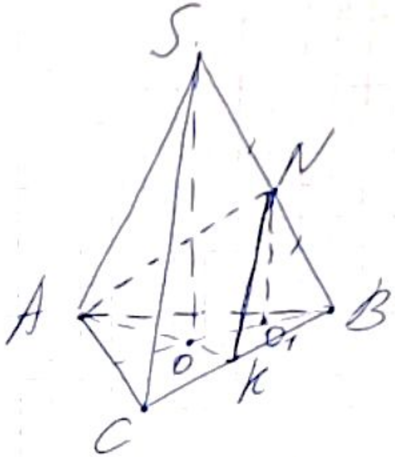
$S_{ABKN} = S_{CAB} - S_{CNK} = 12\sqrt3 - \frac{16\sqrt3}{3} = \frac{36\sqrt3 - 16\sqrt3}{3} = \frac{20\sqrt3}{3}$ (см²)

$S_{A_1B_1KN} = \frac{20\sqrt3}{3} : \frac{1}{2} = \frac{40\sqrt3}{3}$ (см²)

$S\sqrt3 = \frac{40\sqrt3}{3}\cdot\sqrt3 = \underline{40}$

Відповідь: 40.

34. На рисунку зображено правильну трикутну піраміду $SABC$. Усі її бічні ребра удвічі більші за ребра основи. Точки N і K — середини ребер SB і BC відповідно. Через точки N, K і A проведено переріз, який ділить пі

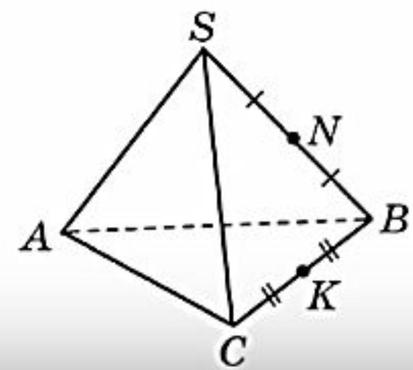


1) $NO_1 \perp (ABC)$
SO - висота
$SO \parallel NO_1$
в $\triangle SOB$
N - середина SB
За теоремою Фалеса O_1 - середина OB
NO_1 - середня лінія $\triangle SOB$
$SO : NO_1 = \underline{2}$ (за властивістю середньої лінії трапеції)

2) AK - медіана $\triangle ABC$
$S_{AKB} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ (за властивістю медіани)
$2S_{AKB} = S_{ABC}$; $SO = 2NO_1$
$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO$
$V_{NAKB} = \frac{1}{3} S_{AKB} \cdot NO_1$
$$\frac{V_{SABC}}{V_{NAKB}} = \frac{2S_{AKB} \cdot 2NO_1}{S_{AKB} \cdot NO_1} = 4$$

1. ... $SABC$ до висоти пірамі-ди...

2. ... многогранника, до об'єму ме...



35. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} |x-y| = |x-a|, \\ \lg(y-a) = \lg(4a^2 + x - x^2) \end{cases}$ залежно від значень параметра a.

$$\begin{cases} |x-y| = |x-a| \\ \lg(y-a) = \lg(4a^2+x-x^2) \end{cases}$$

1) $\lg(y-a) = \lg(4a^2+x-x^2)$

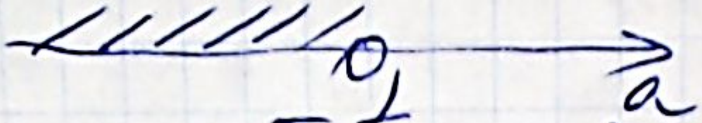
ОДЗ: $\begin{cases} y-a>0 \\ 4a^2+x-x^2>0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y-a = 4a^2+x-x^2 \\ y-a>0 \\ 4a^2+x-x^2>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-a = 4a^2+x-x^2 \\ y-a>0 \end{cases}$$

потім перевіряти цю умову

2)



$-\frac{1}{3}$

$a \in (0; +\infty)$

$$\begin{cases} a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \\ x = -1 - 2a \\ y = -5a - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2a \\ y = 3a \\ a \in (0; +\infty) \end{cases}$$

Відповідь:

якщо $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$, то $(-1-2a; -5a-2)$,

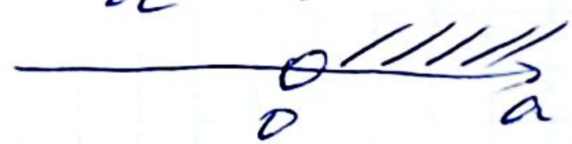
якщо $a \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right]$, то розв'язків немає,

якщо $a \in (0; +\infty)$, то $(2a; 3a)$.

$6a < -2$

$a < -\frac{1}{3}$

$a > 0$



35. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y=-x^3+2ax^2-a^2x$ $(a>0)$ і вісс… площа дорівнюватиме $1\frac{1}{3}$?

1) Знайдемо границі інтегрування:

$y=0 \quad y=-x^3+2ax^2-a^2x$

$-x^3+2ax^2-a^2x=0$

$x^3-2ax^2+a^2x=0$

$x\cdot(x^2-2ax+a^2)=0$

$x=0$ або $x^2-2ax+a^2=0$

$(x-a)^2=0$

$x=a$

$S=1\frac{1}{3}; \quad S=\left|\int_0^a y\,dx\right|$

$\int_0^a(-x^3+2ax^2-a^2x)\,dx=$

$=\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{2ax^3}{3}-\frac{a^2x^2}{2}\right)\Big|_0^a=$

$=\left(-\frac{a^4}{4}+\frac{2a^4}{3}-\frac{a^4}{2}\right)-0=$

$=\frac{-3a^4+8a^4-6a^4}{12}=-\frac{a^4}{12}$

$\left|-\frac{a^4}{12}\right|=\frac{4}{3}; \quad \frac{a^4}{12}=\frac{4}{3} \Rightarrow$

$a^4=16 \quad a>0$

$a=\pm 2; \quad a=2$

$$a^2-2\cdot 4^{x+1}-a\cdot 2^{x+1}>0$$

1) ОДЗ: $x\in R$, $a\in R$

Заміна $2^{x+1}=t$, $t>0$

$$\begin{cases} a^2-2t^2-at>0 \\ t>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t^2+at-a^2<0 \\ t>0 \end{cases}$$

$$2t^2+at-a^2<0$$

Нулі: $2t^2+at-a^2=0$

$$D=a^2+8a^2=9a^2\geq 0$$

За теоремою Вієта

$$\begin{cases} t_1+t_2=-\frac{a}{2} \\ t_1\cdot t_2=-\frac{a^2}{2} \end{cases}$$

або методом „перекидки"

$t_1=\frac{-2a}{2}=-a$

$t_2=\frac{a}{2}$

$$z^2+az-2a^2=0$$

$$\begin{cases} z_1+z_2=-a \\ z_1\cdot z_2=-2a^2 \end{cases}$$

$z_1=-2a$; $z_2=a$

$$2t^2+at-a^2=2\cdot(t+a)\left(t-\frac{a}{2}\right)<0$$

$$\begin{cases} (t+a)\left(t-\frac{a}{2}\right)<0 \\ t>0 \end{cases}$$

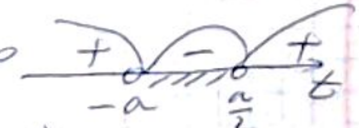
Нулі $-a$; $\frac{a}{2}$

2) Якщо $-a<\frac{a}{2}$

$-2a<a$

$-3a<0$

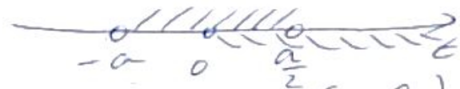
$\underline{a>0}$, то



$$\begin{cases} t\in\left(-a;\frac{a}{2}\right) \\ t>0 \end{cases}$$

$-a<0$

$\frac{a}{2}>0$



$$t\in\left(0;\frac{a}{2}\right)$$

Обернена заміна

$$0<2^{x+1}<\frac{a}{2}$$

виконується

$$2^{x+1}<\frac{a}{2}$$

Прологарифмуємо обидві частини по основі 2

$$\log_2 2^{x+1}<\log_2\frac{a}{2}$$

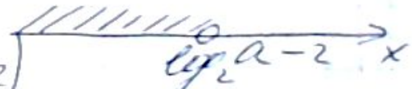
функція зростає, $2>1$

$$(x+1)\log_2 2<\log_2 a-\log_2 2$$

$$x+1<\log_2 a-1$$

$$x<\log_2 a-1-1$$

$$x<\log_2 a-2$$



$$x\in(-\infty;\log_2 a-2)$$

якщо $a\in(0;+\infty)$, то

$x\in(-\infty;\log_2 a-2)$

3) Якщо $-a=\frac{a}{2} \Rightarrow -2a=a$

$-3a=0$

$a=0$, то

$-2\cdot4^{x+1}-0>0$

$-2\cdot4^{x+1}>0$; $2\cdot4^{x+1}<0$

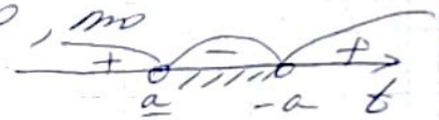
$4^{x+1}<0$

$x\in\varnothing$

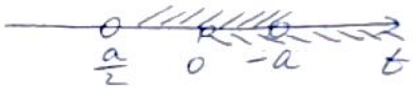
4) Якщо $-a>\frac{a}{2}$

$-3a>0$

$a<0$, то



$\begin{cases} t\in(\frac{a}{2};-a)\\ t>0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\frac{a}{2}<0\\ -a>0\end{matrix}$



$0<t<-a$

$\underbrace{0<2^{x+1}}_{\text{виконується}}<-a$

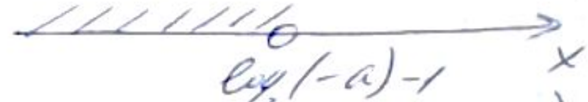
$2^{x+1}<-a$

Так як $2>1$, то ф-ція зростає. Пролографуємо по основі 2:

$\log_2 2^{x+1}<\log_2(-a)$

$x+1<\log_2(-a)$

$x<\log_2(-a)-1$



$x\in(-\infty;\log_2(-a)-1)$ при $a\in(-\infty;0)$

Відповідь: якщо $a\in(-\infty;0)$, то $x\in(-\infty;\log_2(-a)-1)$

якщо $a=0$, то $x\in\varnothing$

якщо $a\in(0;+\infty)$, то $x\in(-\infty;\log_2 a-2)$

35. Задано рівняння $\dfrac{(x-\sqrt{x}-2)(a^2-16)}{2^x-a}=0$, де x – змінна, a – стала.

1. Розв'яжіть рівняння $x-\sqrt{x}-2=0$.
2. Розв'яжіть задане рівняння залежно від значень a.

$\dfrac{(x-\sqrt{x}-2)\cdot(a^2-16)}{2^x-a}=0$

1) ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2^x - a \neq 0 \end{cases}$

2) $x-\sqrt{x}-2=0$ або $a^2-16=0$

Заміна $\sqrt{x}=t$, $t \geq 0$

$t^2-t-2=0$

$\begin{cases} t_1+t_2=1 \\ t_1 \cdot t_2=-2 \end{cases}$ $t=-1$ заибви

$t=2$

Обернена заміна

$t=2$

$\sqrt{x}=2 \Rightarrow \underline{x=4}$

$2^x-a \neq 0 \Rightarrow 2^4-a \neq 0$

$16-a \neq 0$

$a \neq 16$

3) Якщо $a^2-16=0$

$a^2=16$

$a=4$ і $a=-4$

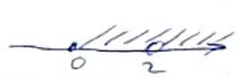
При $a=4$: $2^x-a \neq 0$

$2^x-4 \neq 0$

$2^x \neq 4$

$2^x \neq 2^2$

$x \neq 2$ і $x \geq$



$x \in [0;2) \cup (2;$

при $a=4$, $x \in [0;2) \cup (2;+\infty)$

4) Якщо $a=-4$, то

$2^x-a \neq 0$

$2^x+4 \neq 0$ виконується

при будь-яких x у ОДЗ

$x \in [0;+\infty)$

Відповідь:

Якщо $a \in (-\infty;-4) \cup (-4;4) \cup (4;16) \cup (16;+\infty)$, то $x=4$

Якщо $a=-4$, то $x \in [0;+\infty)$

Якщо $a=4$, то $x \in [0;2) \cup (2;+\infty)$

Якщо $a=16$, то рівняння коренів не має.