Теория вероятностей и математическая статистика

Случайные величины

Тема 6.

Определение

Случайная величина **–** это переменная, которая в результате эксперимента принимает одно из своих возможных значений, причем заранее не известно какое именно.

Случайные величины обозначается заглавными буквами латинского алфавита, соответствующие числовые значения - строчными

Дискретные и непрерывные случайные величины

1

Возможные значения ***дискретной случайной величины*** можно перечислить (перенумеровать натуральными числами)

2

Возможные значения ***непрерывной случайной величины*** заполняют некоторый промежуток вещественной оси.

Определение

- Пусть X – дискретная случайная величина с возможными значениями

$$x_1, x_2, \dots x_n.$$

- Каждое из этих значений возможно, но не достоверно, и X может принять любое из них с некоторой вероятностью.
- Принятие случайной величиной некоторого числового значения из набора возможных (т.е. выполнение равенства X = x) есть случайное событие, характеризующееся вероятностью $P(X=x_i) = p_i$

Закон распределения случайных величин

- ***Законом распределения случайной величины*** называется соотношение устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующей вероятности

- *Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан в виде*:
  1. таблицы
  2. аналитически (в виде формулы)
  3. графически

Ряд распределения дискретной случайной величины

- Ряд распределения дискретной случайной величины (ДСВ) представляет собой таблицу, в верхней части которой представлены варианты значений ДСВ, а в нижней – соответствующие вероятности того, что X примет значение x_i

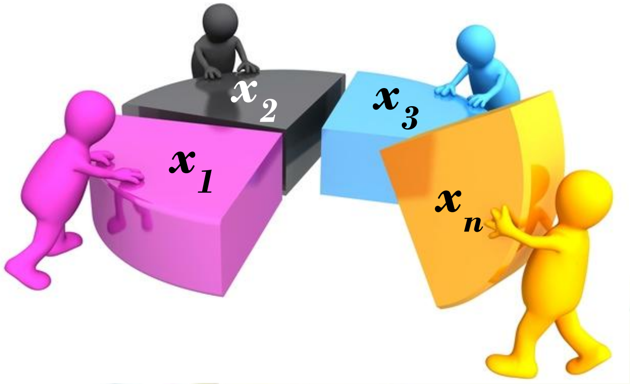
X_i	x_1	x_2	…	x_n
$P_i = P(x=x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Ряд распределения дискретной случайной величины

-
- При построении ряда распределения необходимо помнить, что:

1. $0 \le p_i \le 1$

2. $\sum p_i = 1$, так как события ($X=x_1$), ($X=x_2$)…($X=x_n$) образуют полную группу несовместных событий

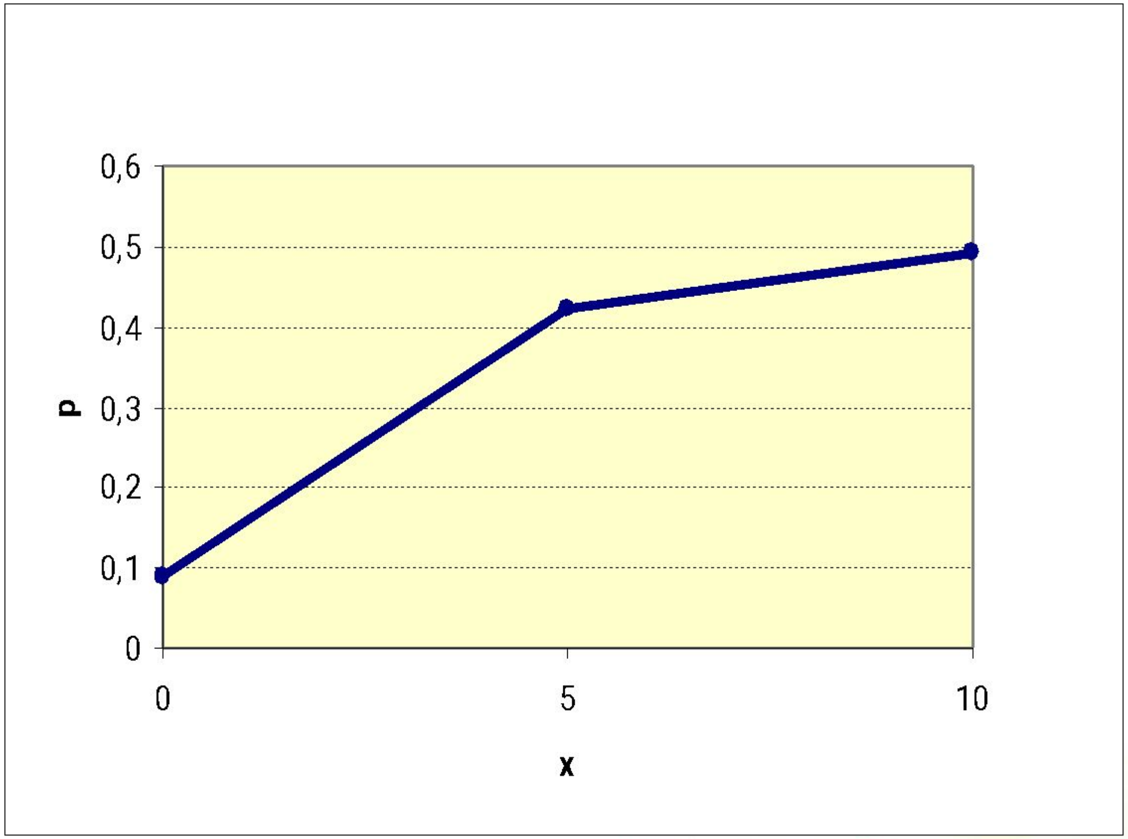


- Графическое представление ряда распределения ДСВ называется ***многоугольником (полигоном) распределения***

Пример 2

Стрелок проводит два выстрела по мишени. Вероятность попадания равна 0,7. За каждое попадание стрелку засчитывают 5 очков. Случайная величина Х – число выбитых очков.

X	0	5	10
P	0,09	0,42	0,49



Операции над случайными величинами

- Две СВ называются ***независимыми***, если закон распределения одной из них не меняется от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае СВ – ***зависимые***.

1. Произведением $k\mathrm{X}$ случайной величины X на постоянную величину k называется случайная величина, которая принимает значения kx_i, с теми же вероятностями p_i $(\mathrm{i} = \overline{1, n})$
2. m-й степенью случайной величины X называется случайная величина, которая принимает значения x^m с теми же вероятностями p_i $(\mathrm{i} = \overline{1, n})$

Числовые характеристики дискретной случайной величины

-
- ***Математическое ожидание*** ДСВ X – сумма произведений всех ее значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

- Это число, характеризующее среднее значение случайной величины X

Свойства математического ожидания

1) $M(C) = C$, где $C = const$;
2) $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$;
3) $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$, где X и Y – любые случайные величины;
4) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, где X и Y – независимые случайные величины;
5) $M(X \pm C) = M(X) \pm C$, где $C = const$.

Дисперсия случайной величины

- ***Дисперсией*** случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

- характеризует разброс (рассеяние) значений СВ около ее математического ожидания

Свойства дисперсии случайной величины

1) $D(C) = 0$, где $C = const$;
2) $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$;
3) $D(X_1 \pm X_2 \pm \ldots \pm X_n) = D(X_1) + D(X_2) + D(X_n)$, если $X_1, X_2 \ldots X_n$ независимые случайные величины;
4) $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$

ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ (биномиальный закон распределения)

- Вероятность $P_n(m)$ того, что в n независимых испытаний событие А наступит ровно m раз, равна

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

где p – вероятность наступления события А в каждом испытании, q– вероятность противоположного события

ТЕОРЕМА ПУАССОНА

- Если вероятность наступления события А в каждом испытании стремится к нулю ($p \to 0$), при неограниченном увеличении числа испытаний ($n \to \infty$), причем $np \to \lambda$, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие А появится m раз в n независимых испытаниях приближенно равно:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

$e \cong 2{,}718281828459045..$

Функция распределения

- Введенный выше ряд распределения пригоден лишь для дискретных случайных величин. Более общей характеристикой является *функция распределения* случайной величины.
- ***Функцией распределения случайной величины X называется функция F(x)***, выражающая для каждого X вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее чем x:

$$F(x) = P(X < x)$$

$$F(x) = \sum_{i: x_i < x} P(X = x_i)$$

Таким образом, значение функции распределения в точке x есть вероятность того, что в результате эксперимента X примет значение строго меньшее x, то есть вероятность события $\{X < x\}$.

Функция распределения определена на всей вещественной оси.

Функция распределения – самая универсальная характеристика случайной величины. Она определена как для дискретных так и для непрерывных случайных величин.

Функция распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения.

Функция распределения

- График функции распределения в общем случае представляет собой график неубывающей функции, значения которой начинаются с нуля и доходят до 1, при этом возможны разрывы (справа) в отдельных точках.

Свойства функции распределения

- Функция распределения может принимать любое значение от 0 до 1, т.е. является вероятностью по определению: $0 \le F(x) \le 1$;
- Функция распределения является не убывающей

$$\text{при } x_2 > x_1 \quad F(x_2) \ge F(x_1);$$

- $\lim F(x) = 0$ при $x \to -\infty \quad \leftrightarrow \quad F(-\infty) = 0$;
- $\lim F(x) = 1$ при $x \to +\infty \leftrightarrow \quad F(+\infty) = 1$.
- Вероятность попадания ДСВ в интервал [a;b) равна приращению функции распределения на этот интервал: $F(a \le x < b) = F(b) - F(a)$
- Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b), то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \le a; \quad F(x) = 1 \text{ при } x \ge b.$$

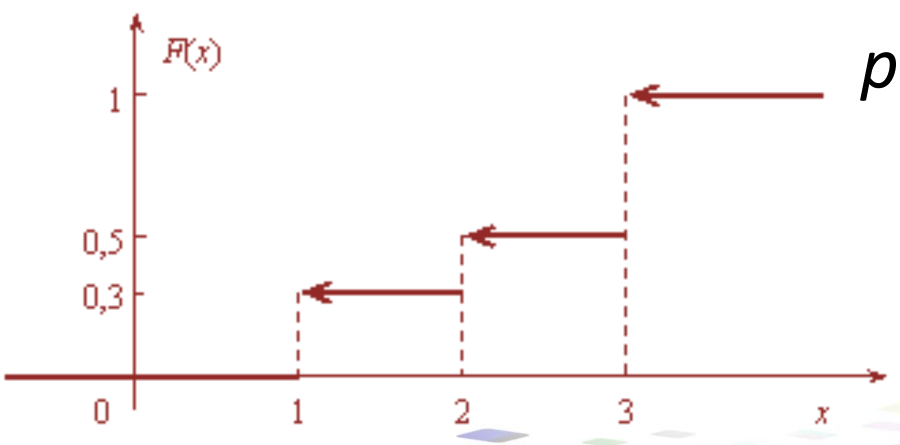
Пример 3

- Дан ряд распределения случайной величины:

X_i	1	2	3
P_i	0,3	0,2	0,5

- Найти и изобразить графически ее функцию распределения.

График функции F(x):



Решение:

Пусть $x \le 1$, тогда $F(x) = 0$, (*так как событие $X < x$ будет невозможным*)

Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = p_1 = 0{,}3$.

Если $2 < x \le 3$, то $F(x) = p_1 + p_2 = 0{,}5$.

Если $x > 3$, то $F(x) = p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1, \\ 0{,}3, & \text{если } 1 < x \le 2, \\ 0{,}5, & \text{если } 2 < x \le 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$