ТЕМА 2.
Матрицы и их виды. Действия над матрицами. Обратная матрица. Ранг матрицы.

Матрицей называется совокупность чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов и записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{или сокращенно} \quad A = \left(a_{ij}\right)$$

a_{ij} - элемент матрицы, i – номер строки, j – номер столбца.

ОСНОВНЫЕ ВИДЫ МАТРИЦ

- **Квадратная** – это матрица, у которой число строк равно числу столбцов (m=n).
- **Диагональная** – это квадратная матрица, все элементы которой, кроме элементов главной диагонали, равны нулю.
- **Единичная** – это квадратная матрица, элементы главной диагонали которой равны единице (всегда обозначается буквой Е).
- **Треугольная** – это матрица, все элементы которой, выше или ниже главной диагонали, равны нулю.
- **Симметрическая** – это квадратная матрица, элементы которой симметричны относительно главной диагонали
- **Нулевая** – это матрица, все элементы которой равны нуль (всегда обозначается – О).
- **Вектор** – это матрица содержащая одну строку

Примеры различных видов матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

- СЛОЖЕНИЕ (только для матриц одинаковой размерности):

$A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}$, если $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

- ВЫЧИТАНИЕ (только для матриц одинаковой размерности):

$A_{m\times n} - B_{m\times n} = C_{m\times n}$, если $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

- УМНОЖЕНИЕ НА ЧИСЛО (k):

$k \cdot A_{m\times n} = B_{m\times n}$, если $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$

- УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ (строка на столбец):

$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$, если $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$.

Элемент матрицы произведения, стоящий на пересечении i-той строки и j-того столбца, равен сумме произведений элементов i-той строки первой матрицы на элементы j-того столбца второй матрицы.

- ТРАНСПОНИРОВАНИЕ (A^T):

Чтобы получить транспонированную матрицу, нужно в исходной матрице заменить строки на соответствующие столбцы.

- ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ (только для квадратной матрицы):

$A^2 = A \cdot A$;

Свойства линейных операций

1. $A+B=B+A$

2. $A+(B+C)=(A+B)+C$

3. $A-A=O$ (O – нулевая матрица)

4. $A+O=A$

5. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

6. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

7. $1 \cdot A=A$

Свойства произведения матриц

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

2. $(A+B) \cdot C = AC+BC$

3. $C \cdot (A+B) = CA+CB$

4. $A \cdot E = E \cdot A = A$

5. $(\alpha A)B = A(\alpha B)$

Матрицы A и B называются **перестановочными**, если $AB=BA$

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

- Квадратная матрица называется <u>невырожденной</u>, если ее определитель отличен от нуля. Для любой невырожденной матрицы существует обратная, причем единственная
- Союзной матрицей называется матрица:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$$

- A^{-1} называется обратной матрице A, если:

$A^{-1}A = AA^{-1} = E$

$$A^{-1} = \frac{A^{*T}}{\Delta}$$

Пример: Найти A^{-1} для $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -5 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Решение:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}^{T};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -5 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Матрица *A* невырожденная, значит A^{-1} существует.

Найдем алгебраические дополнения (это минор со знаком «+», если элемент матрицы стоит на четном месте, и со знаком «–», если на нечетном).

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверка :

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -5 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Следовательно, обратная матрица найдена верно

Свойства обратной матрицы

1. $$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

2. $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

3. $$(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$$

РАНГ МАТРИЦЫ

Рассмотрим матрицу общего вида (порядка $m \times n$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- **Минором матрицы *k*-того порядка** называется определитель, составленный из элементов матрицы, стоящих на пересечении произвольно выбранных *k* строк и *k* столбцов.
- **Рангом матрицы** называется наивысший из порядков миноров, отличных от нуля.
- Минор, порядок которого определяет ранг

Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Максимально возможный порядок ненулевого минора – третий, но в данном случае все миноры третьего порядка- нулевые.

Рассмотрим миноры второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ следовательно } rangA = 2;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{– базисные миноры.}$$

- **Канонической** называется матрица, в начале главной диагонали которой стоят единицы, а остальные элементы равны нулю.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Матрицы называются **эквивалентными** ($A \sim B$), если одну можно получить из другой с помощью элементарных преобразований.

$$A \sim B \quad \Rightarrow \quad rangA = rangB$$

СВОЙСТВА РАНГА МАТРИЦЫ

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Ранг матрицы не меняется при перестановке ее столбцов (или строк).
3. Ранг матрицы не меняется при умножении всех элементов ее столбца (или строки) на отличное от нуля число.
4. Ранг матрицы не изменится, если к одному из ее столбцов (или строк) прибавить другой столбец (соответственно строку), умножив его (ее) на некоторое число.
5. Ранг матрицы не изменится, если удалить из нее столбец, состоящий из одних нулей.
6. Ранг матрицы не изменится, если удалить из нее столбец, являющийся линейной комбинацией других столбцов.

Метод элементарных преобразований для вычисления рангов:

1) $A \sim K$

2) $rangA = rangK$ и равен числу единиц в *К*.

Ранг матрицы удобно вычислять методом элементарных преобразований. К элементарным преобразованиям относят следующие:

- перестановки строк (столбцов);
- умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
- прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.

Пример. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Решение. Среди миноров первого порядка (то есть среди элементов матрицы) существуют отличные от нуля, поэтому . Рассмотрим миноры второго порядка:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Таким образом, все миноры второго порядка равны нулю и ранг равен *rang A=1*.

Пример. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Решение. Приведем заданную матрицу с помощью элементарных преобразований к верхнему треугольному виду. Поменяем в исходной матрице местами первую и вторую строки:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на (-3), а к третьей первую, умноженную на (-4):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

В полученной матрице прибавим к третьей строке вторую, умноженную на (-1):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

После элементарных преобразований в матрице осталось две линейно независимые строки, следовательно *rang A=2*.

Пример. Найти ранг матрицы

Решение. Поменяем местами строки матрицы, поставив последнюю строку на место первой:

Умножим первую строку на –3 и прибавим ко второй. При этом на месте элемента 3 получим 0. Затем умножим первую строку на –2 и прибавим к третьей:

Умножим вторую строку получившейся матрицы на –1 и прибавим к последней, тогда:

Умножим теперь вторую строку на –5 и прибавим к последней:

Преобразования матрицы можно прекратить, так как, очевидно, минор , являющийся

определителем треугольного вида, равен произведению элементов главной диагонали, то есть отличен от нуля.