Курс «Прикладные задачи ТМО»

Цепи Маркова

Лекция 2

Обозначения

$\{\nu_n, \ \ n \geq 0\}$ - случайная последовательность

X - множество состояний последовательности:

конечное X $=\{X_1, X_2, \ldots, X_M\}$

счётное X $=\{X_1, X_2, \ldots\}$

X $\rightarrow$ J, где J - множество номеров состояний:

конечное J$=\{i_1, i_2, \ldots, i_M\}$

счётное J$=\{i_1, i_2, \ldots\}$

Определение цепи Маркова

Последовательность $\{\nu_n,\ n \geq 0\}$ называется однородной *цепью Маркова* (ЦМ), если она удовлетворяет *свойству марковости*:

$\forall n \geq 1$ и $i_0,\ i_1,\ \ldots\ ,i_{n-1},\ i\ ,j \in$ J

$$P\left\{\ \nu_{n+1} = j\ \middle|\ \nu_0 = i_0,\ \nu_1 = i_1,\ \ldots\ ,\nu_{n-1} = i_{n-1},\ \nu_n = i\ \right\} =$$

$$= P\left\{\ \nu_{n+1} = j\ \middle|\ \nu_n = i\ \right\} =: p_{ij}\,.$$

Переходные вероятности ЦМ

p_{ij} - переходная вероятность из состояния i в состояние j **за 1 шаг**, $i, j \in \mathrm{J}$.

$\mathbf{P} = \left(p_{ij}\right)_{i,j \in \mathrm{J}}$ - матрица переходных вероятностей (за 1 шаг)

Матрица $\mathbf{P}$ - стохастическая, т.е. $\sum\limits_{j \in \mathrm{J}} p_{ij} = 1,\ i \in \mathrm{J}$.

$p_{ij}^{(n)} = P\left\{ \nu_{n+m} = j \mid \nu_m = i \right\}$ - переходная вероятность из состояния i в состояние j **за** n **шагов**, $i, j \in \mathrm{J}$.

$\left(p_{ij}^{(n)}\right)_{i,j \in \mathrm{J}} =: \mathbf{P}^{(n)}$ - матрица переходных вероятностей за n шагов, $n \geq 1$.

Уравнения Колмогорова-Чепмена (1/2)

По формуле полной вероятности

$$p_{ij}^{(n+l)} = \sum_{k \in \mathrm{J}} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(l)} \qquad (4.1)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{P}^{(n+l)} = \mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{P}^{(l)} \qquad (4.1a)$$

Из (4.1)

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k_1, \ldots, k_{n-1} \in \mathrm{J}} p_{ik_1} p_{k_1 k_2} \cdots p_{k_{n-1} j}$$

или в матричной форме

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n, \; n \geq 1 \qquad (4.2)$$

Уравнения Колмогорова-Чепмена (2/2)

$p_i(n) = P\{\ \nu_n = i\ \}$ - вероятность того, что на шаге n ЦМ находится в состоянии i, $i \in \mathrm{J}$, $n \geq 1$

$$p_i(n) = \sum_{j \in \mathrm{J}} p_j(0) p_{ji}^{(n)},\ i \in \mathrm{J} \qquad (4.3)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{p}^T(n) = \mathbf{p}^T(0)\mathbf{P}^n \qquad (4.3\text{a})$$

Задать цепь Маркова:

1) $\mathbf{p}^T(0)$ - начальное распределение,

т.е. $p_i(0) = P\{\ \nu_0 = i\ \},\ i \in \mathrm{J}$;

2) матрицу переходных вероятностей $\mathbf{P} = \left(p_{ij}\right)_{i,\,j \in \mathrm{J}}$.

Стационарная цепь Маркова

ЦМ $\{\nu_n,\ n \ge 0\}$ называется *стационарной*, если вероятности $p_i(n)$ не зависят от шага n, $i \in J$, $n \ge 1$:

$$p_i(1) = p_i(0);$$

$$p_i(n) = p_i(0) := p_i.$$

p_i - стац. вероятности состояний ЦМ $\{\nu_n,\ n \ge 0\}$, $i \in J$

$\{\ p_i,\ i \in J\ \}$ - стационарное распределение вероятностей

Если все $p_i > 0$, $i \in J$, то распределение $\{\ p_i,\ i \in J\ \}$ - *равновесное*

СУР для стационарной ЦМ

Стационарные вероятности $\{\ p_i,\ i\in \mathrm{J}\ \}$ состояний ЦМ $\{v_n,\ \ n\geq 0\}$ удовлетворяют системе уравнений равновесия (СУР):

$$p_j=\sum_{i\in \mathrm{J}} p_i p_{ij},\ j\in \mathrm{J} \qquad (4.4)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{p}^T=\mathbf{p}^T\mathbf{P} \qquad (4.4a)$$

с условием нормировки

$$\sum_{i\in \mathrm{J}} p_i=1 \qquad (4.5)$$

Неприводимая ЦМ

Состояния i и j, $i, j \in \mathrm{J}$, называются *сообщающимися*, если $\exists\ n_1 \geq 1$ и $n_2 \geq 1$ такие, что $p_{ij}^{(n_1)} > 0$ и $p_{ji}^{(n_2)} > 0.$

ЦМ $\{\nu_n,\ n \geq 0\}$, все состояния которой сообщающиеся, называется *неприводимой*.
Матрица $\mathbf{P}$ такой цепи неразложима.

Непериодическая ЦМ

i - состояние ЦМ $\{\nu_n,\ n \ge 0\}$, $i \in$ J

N_i - множество таких чисел $n \ge 1$, что $p_{ii}^{(n)} > 0$

l - НОД всех $n \in \mathrm{N}_i$.

Состояние i называется

периодическим с периодом l, если $l > 1$;

непериодическим, если $l = 1$.

ЦМ $\{\nu_n,\ n \ge 0\}$, все состояния которой непериодические, называется *непериодической*.

Эргодическая ЦМ

ЦМ $\{\nu_n,\ n \geq 0\}$ называется *эргодической*, если $\exists$ такое распределение $\{\ p_i,\ i \in \mathrm{J}\}$, $p_i > 0,\ i \in \mathrm{J}$, что переходные вероятности $p_{ij}^{(n)}$ удовлетворяют соотношению

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = p_j,\ i \in \mathrm{J}.$$

В этом случае распределение $\{\ p_i,\ i \in \mathrm{J}\}$ называется *предельным* или *финальным*.

Эргодическая теорема

Теорема (эргодическая теорема для конечной ЦМ).

Любая неприводимая непериодическая ЦМ $\{\nu_n,\ n \geq 0\}$ с конечным множеством состояний J является эргодической.

Предельные вероятности $\{\ p_i,\ i \in \mathrm{J}\ \}$ определяются как единственное решение СУР (4.4) с условием нормировки (4.5).