ЛИЦЕЙ-ИНТЕРНАТ
естественных наук
при Саратовском государственном аграрном университете им. Н.И. Вавилова

Лекция по алгебре. Тема: логарифмические неравенства.

Преподаватель математики Хохлова С.Н., Мещенко Н.В.

Определение:

Неравенства, содержащие переменную под знаком логарифма, называются **логарифмическими.**

Например:

$1)\ \log_5 x > -2;$ $\qquad 2)\ \lg(x^2 + 5) < \sqrt{5};$

$3)\ \ln(x^3 - 1) \le \pi\ ;$ $\qquad 4)\ \log_{(-x^2+x-6)} 25 \ge -2$

I. Типы простейших логарифмических неравенств

Неравенства вида

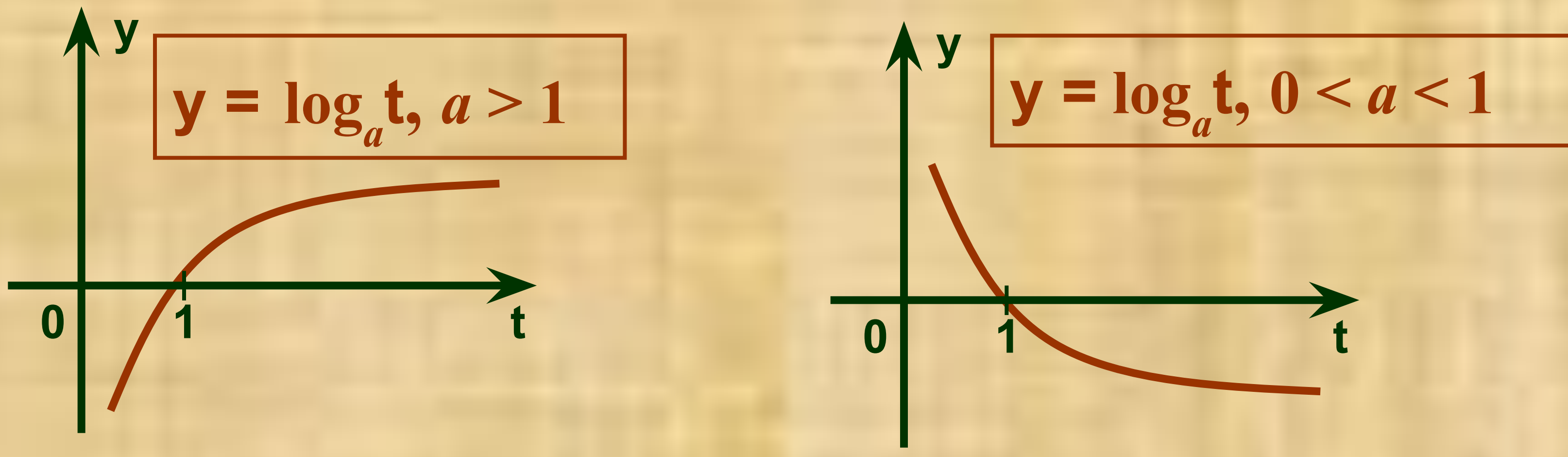
1) $\log_a x > b$ или $\log_a x < b$

называются простейшими логарифмическими неравенствами

Неравенства можно переписать

$\log_a x > \log_a a^b$ или $\log_a x < \log_a a^b$

Решение логарифмических неравенств основано на свойстве монотонности функции $y = \log_a t$: при $a > 1$ логарифмическая функция возрастает и при $0 < a < 1$ убывает.



Методы решения логарифмических неравенств.

I) Неравенство вида $\log_a f(x) > c$ (или $< c$).

$\log_a f(x) > c,$

$\log_a f(x) > c \cdot \log_a a\,,$

$\log_a f(x) > \log_a a^c\,.$

Если $a > 1$,то функция $y = \log_a t$ возрастает на R_+ и неравенство$\log_a f(x) > c$ равносильно системе

$$\begin{cases} a > 1 \\ f(x) > 0 \text{ – это ОДЗ} \\ f(x) > a^c \text{ – это монотонность} \end{cases}$$

или $\boxed{f(x) > a^c}$

Пример. Решить неравенство $\log_7(4x + 1) \geq 2$

Решение.

$\log_7(4x + 1) \geq \log_7 49$ Так как (a = 7 > 1)

$$\begin{cases} 4x + 1 > 0 \text{ – это ОДЗ} \\ 4x + 1 \geq 49 \end{cases}$$

$4x + 1 \geq 49,$

$x \geq 12$

Ответ: $x \geq 12$.

2) Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a t$ убывает на R_+ и неравенство $\log_a f(x) > c$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0 \text{ – это ОДЗ} \\ f(x) < a^c \text{ – это монотонность} \end{cases}$$

Систему в этом случае упростить нельзя.

Пример. Решить неравенство

$$\log_{1/2}(1 - x) > 2$$

Решение.

$$\log_{1/2}(1 - x) > \log_{1/2}(1/4)$$

$$\begin{cases} 1 - x > 0 \text{ – это ОДЗ} \\ 1 - x < 1/4 \ (a = 1/2 < 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ x > 3/4 \end{cases}$$

$$3/4 < x < 1$$

Ответ: (0,75; 1) .

I I. Неравенство вида $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$

или $\log_a f(x) < \log_a \varphi(x)$.

1) Если $a > 1$, то функция $y = \log_a t$ возрастает на R_+ и неравенство $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \end{cases} \text{ – это ОДЗ}$$

$$f(x) > \varphi(x) \text{ – это монотонность}$$

$$\begin{cases} f(x) > \varphi(x) \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$$

Пример. Решить неравенство

$$\lg x^2 > \lg(5x - 4)$$

Решение.

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ 5x - 4 > 0 \\ x^2 > 5x - 4 \end{cases} \quad \text{– это ОДЗ} \quad (a = 10 > 1)$$

$$\begin{cases} x^2 > 5x - 4 \\ 5x - 4 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 1)(x - 4) > 0 \\ x > 4/5 \end{cases}$$

Ответ: $(0{,}8;1) \cup (4;\infty)$.

I I. Неравенство вида $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$ или $\log_a f(x) < \log_a \varphi(x)$.

2) Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a t$ убывает на R_+ и неравенство $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ f(x) < \varphi(x) \end{cases}$$

$f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ – это ОДЗ

$f(x) < \varphi(x)$ – это монотонность

$$\begin{cases} \varphi(x) > f(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Пример. Решить неравенство

$$\log_{1/3}(3x-4) \ge \log_{1/3}(x^2-2)$$

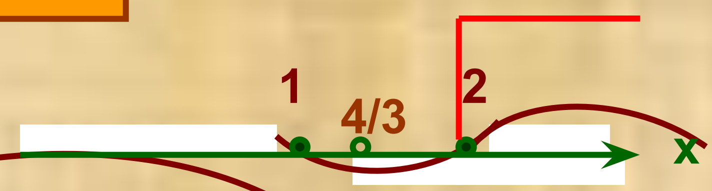
Решение.

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-4>0 \\ x^2-2>0 \\ 3x-4 \le x^2-2 \ (a=1/3<1) \end{array}\right.$$

– это ОДЗ (первые два неравенства)

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-2 \ge 3x-4 \\ 3x-4>0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} (x-1)(x-2) \ge 0 \\ x>4/3 \end{array}\right.$$



Ответ: $[\,2;\infty)$.

Простейшие логарифмические неравенства.

$$1)\ \begin{cases}\log_a f(x) > 0,\\ a > 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_a f(x) > \log_a 1,\\ a > 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x) > 1,\\ a > 1\end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases}\log_a f(x) > 0,\\ 0 < a < 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_a f(x) > \log_a 1,\\ 0 < a < 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0 < f(x) < 1,\\ 0 < a < 1\end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases}\log_a f(x) < 0,\\ a > 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_a f(x) < \log_a 1,\\ a > 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0 < f(x) < 1,\\ a > 1\end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases}\log_a f(x) < 0,\\ 0 < a < 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_a f(x) < \log_a 1,\\ 0 < a < 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x) > 1,\\ 0 < a < 1\end{cases}$$

I I I) <u>Неравенства, требующие предварительных преобразований.</u>

1) Находят **ОДЗ** неравенства.

2) Преобразуют неравенство к виду I или I I и решают полученное неравенство, используя свойство монотонности.

3) Находят пересечение множества решений с **ОДЗ** неравенства и записывают ответ.

Пример. **Решить неравенство**

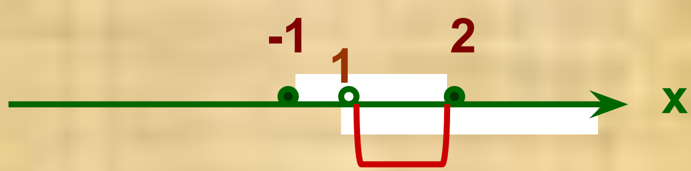
$$\log_2(x-1) + \log_2 x \le 1$$

Решение. **1) ОДЗ :** $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$ $\quad x > 1$

2) $\log_2(x-1)\cdot x \le \log_2 2$ $\quad a = 2 > 1$

$$x^2 - x \le 2, \ \ (x+1)(x-2) \le 0$$

3) Пересечение множества решений с ОДЗ.



Ответ: $(1; 2]$.

III. Метод замены переменной в логарифмическом неравенстве.

Пример. Решить неравенство $$\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$$

Решение. Пусть lgx = t, t – любое число, тогда

неравенство примет вид $$\frac{t^2 - 3t + 3}{t - 1} - 1 < 0$$

$$\frac{t^2 - 4t + 4}{t - 1} < 0$$

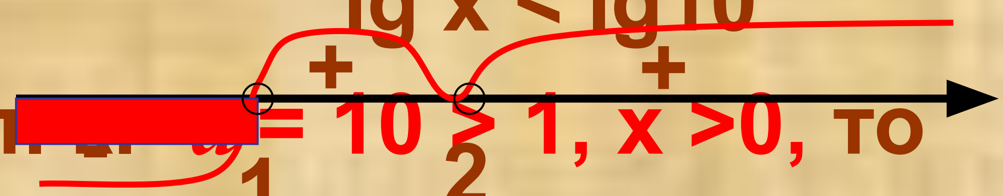
$$\frac{(t-2)^2}{t - 1} < 0$$

$$t < 1$$

Отсюда имеем

Нули числителя: 2(кратность четная)

Нули знам.: 1(кратность нечетная)



lg x < 1;

lg x < lg10

т.к. a = 10 > 1, x >0, то

0 < x < 10

Ответ: $(0; 10)$

IV. Решение логарифмических неравенств, содержащих переменную в основании логарифма

Теорема 1. **Если** $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$,

1) неравенство $\log_a b > \log_a c$ равносильно неравенству

$$(a-1)(b-c) > 0;$$

2) неравенство $\log_a b \geq \log_a c$ равносильно неравенству

$$(a-1)(b-c) \geq 0;$$

3) неравенство $\log_a b < \log_a c$ равносильно неравенству

$$(a-1)(b-c) < 0;$$

4) неравенство $\log_a b \leq \log_a c$ равносильно неравенству

$$(a-1)(b-c) \leq 0;$$

Замечание- соглашение.

Для упрощения записей целесообразно ввести символ $\vee$,

понимая, что там, где стоит этот символ, должен стоять один из знаков ≥, ≤,>либо<.

Тогда теорема 1 может быть сформулирована более коротко: при всех допустимых значениях a ,b и с неравенство

$\log_a b \vee \log_a c$ равносильно $(a-1)(b-c) \vee 0$.

Если в процессе решения смысл неравенства должен измениться, то пишется символ $\wedge$.

Пример 1.

Решите неравенство

$$\log_{x+7}(2x^2-6x+8) \le \log_{x+7}(x^2+x-2).$$

Решение: $\log_{x+7}(2x^2-6x+8) \le \log_{x+7}(x^2+x-2) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (x+7-1)\left(2x^2-6x+8-x^2-x+2\right) \le 0, \\ x+7>0,\ x+7\ne 1, \\ 2x^2-6x+8>0, \\ x^2+x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)\left(x^2-7x+10\right) \le 0, \\ x>-7,\ x\ne -6, \\ x^2-3x+4>0, \\ (x+2)(x-1)>0 \end{cases}$$

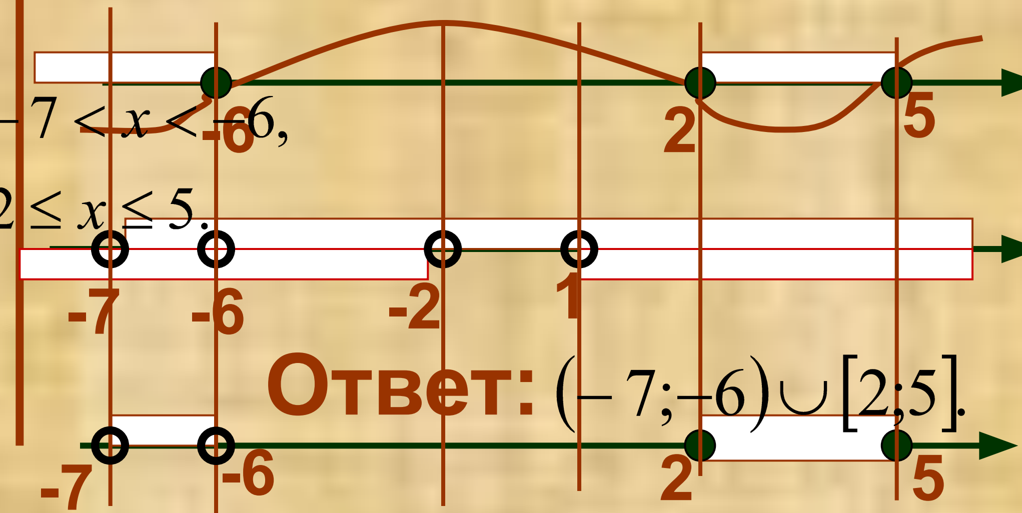
$x^2-3x+4>0$

Так как D<0,то

$x^2-3x+4>0$

на $x \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)(x-5)(x-2) \le 0, \\ x>-7,\quad x\ne -6, \\ (x+2)(x-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -7<x<-6, \\ 2\le x\le 5. \end{array}\right.$$



Ответ: $(-7;-6)\cup[2;5].$

Следствие 1. **При допустимых значениях** a, b **и** c **неравенство** $\log_a b - \log_a c$ V **0** **равносильно неравенству** $(a-1)(b-c)$ V 0

Следствие 2. **При допустимых значениях** a **и** b **неравенство** $\log_a b$ V **0 равносильно неравенству** $(a-1)(b-1)$ V 0

Пример. **Решите неравенство**

$$\log_{10-x}(x^2-5x+6)-\log_{10-x}(2x-4)\geq 0.$$

Решение:

$$\begin{cases}(10-x-1)(x^2-5x+6-2x+4)\geq 0,\\ 10-x>0,\ 10-x\neq 1,\\ x^2-5x+6>0,\\ 2x-4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-9)(x-2)(x-5)\leq 0,\\ x<10,\ x\neq 9,\\ (x-2)(x-3)>0,\\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-9)(x-5)(x-2)\leq 0,\\ 3<x<10,\ x\neq 9,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\leq x<9$$

Ответ: $[5;9)$

1. *Решите неравенство*:

$$\left(x^2-2x-8\right)\log_{x+5}\left(2x+7\right)<0.$$

Ответ: $\left(-4;-3\right)\cup\left(-2;4\right).$

2. *Решите неравенство*

$$\frac{\log_x\left(x-3\right)-\log_x\left(9-x\right)}{\log_{x-1}x}<0.$$

Ответ: $\left(3;6\right)$

Теорема 2.

При допустимых значениях a, b, c, d неравенство $\log_a b \cdot \log_c d$ V 0 равносильно неравенству

$(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$ V 0

Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{x+1}\right)\cdot\log_{x-2}\left(x^2+1\right)\le 0.$

Решение:

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{x}{x+1}-1\right)(x-3)\left(x^2+1-1\right)\le 0,\\ \frac{1}{x}>0, x\ne 1,\\ \frac{x}{x+1}>0,\\ x-2>0, x-2\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1-x}{x}\cdot\frac{-1}{x+1}(x-3)x^2\le 0,\\ x>0, x\ne 1,\\ x+1>0,\\ x>2, x\ne 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{(x-1)(x-3)}{x^3(x+1)}\le 0,\\ x>2,\\ x\ne 3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2<x<3.$$

Ответ: $(2;3)$.

Теорема 3.

При допустимых значениях a, b, c неравенство $\log_a b - \log_c b \vee 0$ равносильно неравенству $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a) \vee 0$.

Решите неравенство: $\log_x(x-1) - \log_{x+1}(x-1) < 0.$

Решение:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-1-1)(x+1-1)(x+1-x) < 0, \\ x > 0, \quad x \neq 1, \\ x-1 > 0, \\ x+1 > 0, x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)(x-2) < 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Ответ: $(1;2)$.

Домашнее задание.

1) Разобрать приёмы решений логарифмических уравнений и неравенств по лекции.

2) Никольский 10 кл.

I. № 6.33 – 6. 34, 6.37(а, б), 6.38(а),6.41(а,г)

II. № 6.37(а, б), 6. 39(в, г), 6.41(б, в), 6.42(в, г).