

ЛОГИЧЕСКАЯ СЕМИОТИКА

Язык – это *знаковая система*, которая является средством фиксации, хранения, передачи информации, средством выражения внутреннего мира человека.

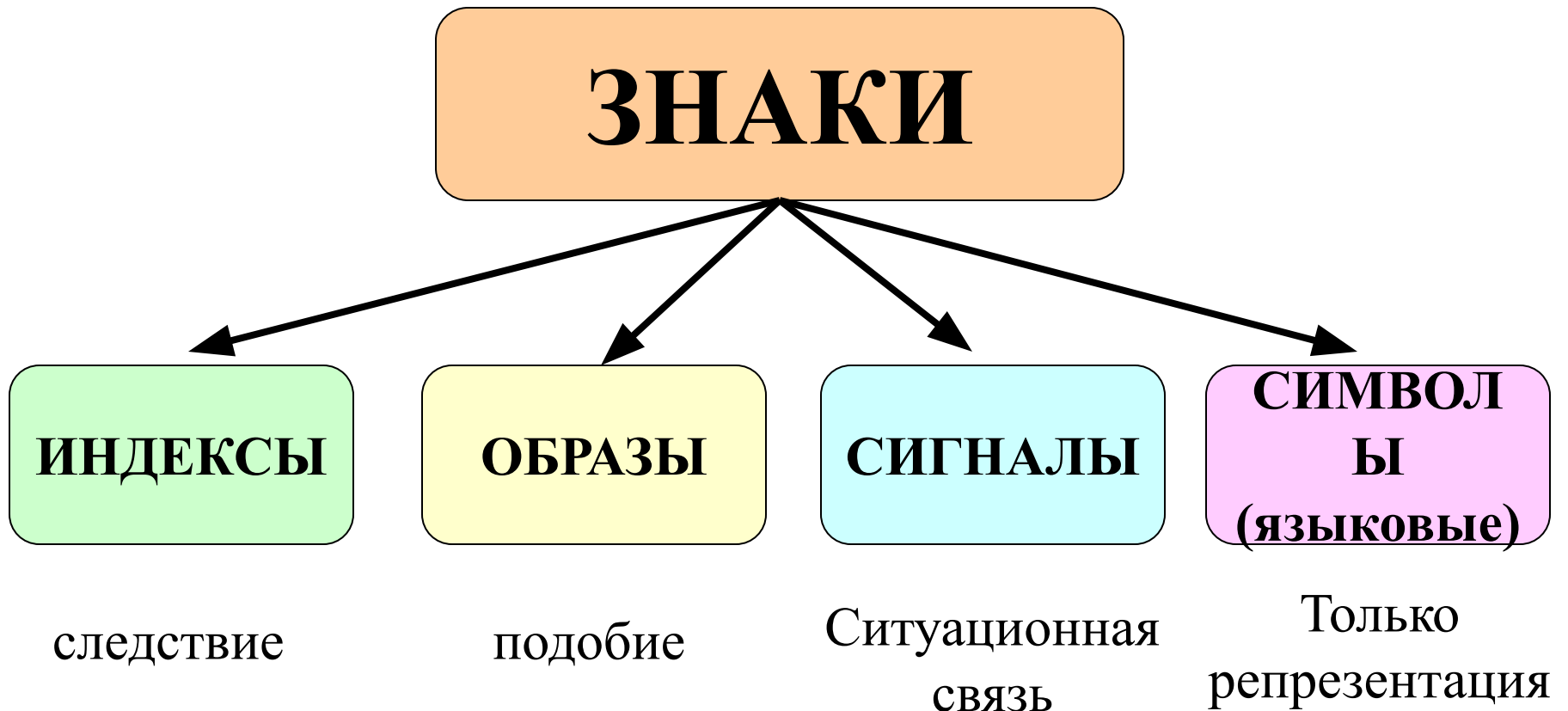
Таким образом,
можно выделить следующие **функции языка**:
познавательная, информационная,
коммуникативная, экспрессивная.

Система – некоторое множество элементов с заданными на них отношениями.

Элементами языка являются знаки.

Знак – это материальный объект, который для некоторого интерпретатора (пользователя языка) выступает в качестве представителя другого объекта.

ВИДЫ ЗНАКОВ



Дым (на огонь)

Фото (на человека)

Слово (на объект)

светофор

РАЗДЕЛЫ СЕМИОТИКИ

СЕМИОТИКА

```
graph TD; A[СЕМИОТИКА] --> B[СИНТАКСИС]; A --> C[СЕМАНТИКА]; A --> D[ПРАГМАТИКА];
```

СИНТАКСИС

Отношения между самими знаками
(напр., правила построения выражений)

СЕМАНТИКА

Отношения между знаками и объектами
(значениями знаков),
используется категория «истина»

ПРАГМАТИКА

Отношения между знаками и пользователями языка
(напр., анализ зависимости значения от контекста)

КЛАССИФИКАЦИИ ЯЗЫКОВ

ЯЗЫКИ

```
graph TD; A[ЯЗЫКИ] --> B[ЕСТЕСТВЕННЫ Е]; A --> C[ИСКУССТВЕННЫ Е];
```

ЕСТЕСТВЕННЫ

Е

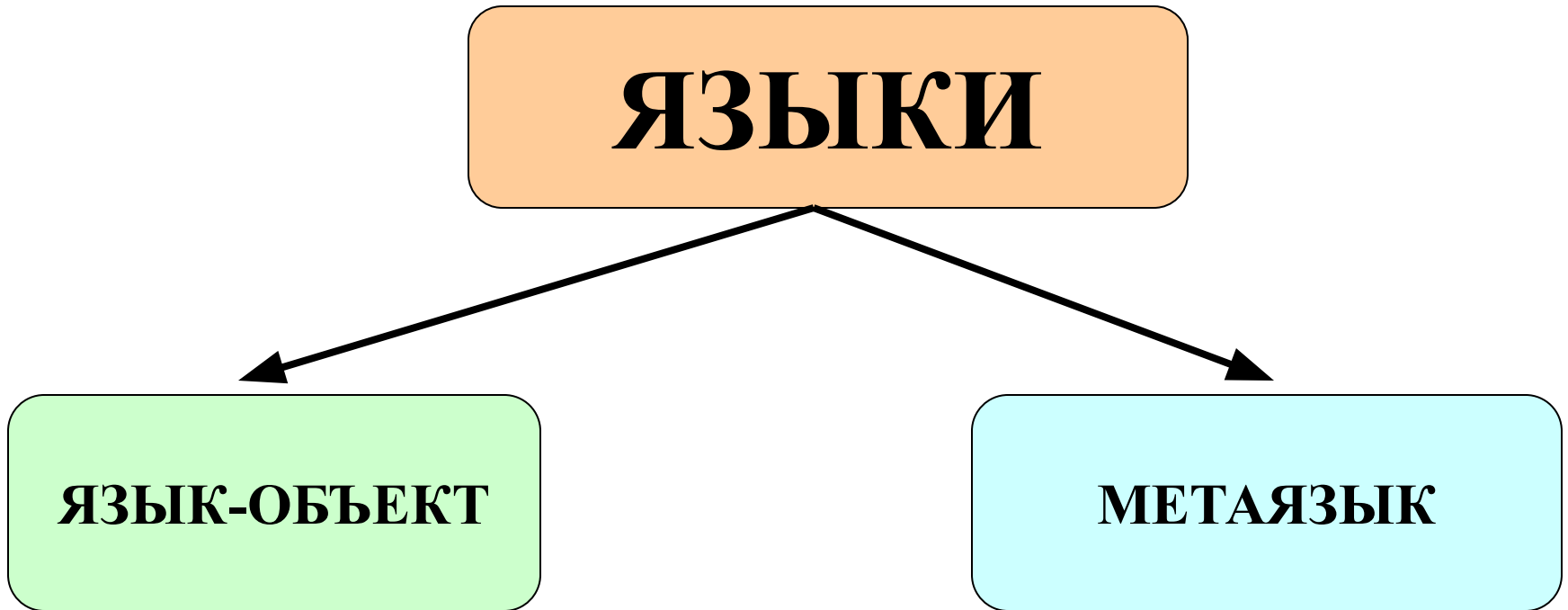
Формируются стихийно
Имеют гибкую структуру
Выразительно богаты
(Универсальны)

ИСКУССТВЕННЫ

Е

Создаются целенаправленно
Имеют жесткую структуру
Выразительно ограничены
(Узко специализированы)

КЛАССИФИКАЦИИ ЯЗЫКОВ



Язык, о котором идет речь

Напр., язык шахматной нотации

Кb1-с3

**Язык, с помощью которого
(на котором) говорится о
языке-объекте**

Русский язык

«Кb1-с3» - выражение ЯШН

КЛАССИФИКАЦИИ ЯЗЫКОВ

СЕМАНТИЧЕСКИ
ЗАМКНУТЫЙ
ЯЗЫК

ЯЗЫК-ОБЪЕКТ

=

МЕТАЯЗЫК

Язык, о котором идет речь

Русский язык

Язык, на котором
говорится о языке-объекте

Русский язык

Наполеон был испанцем

«Наполеон был испанцем» -
ложное предложение рус. языка

ЗНАЧЕНИЕ И СМЫСЛ

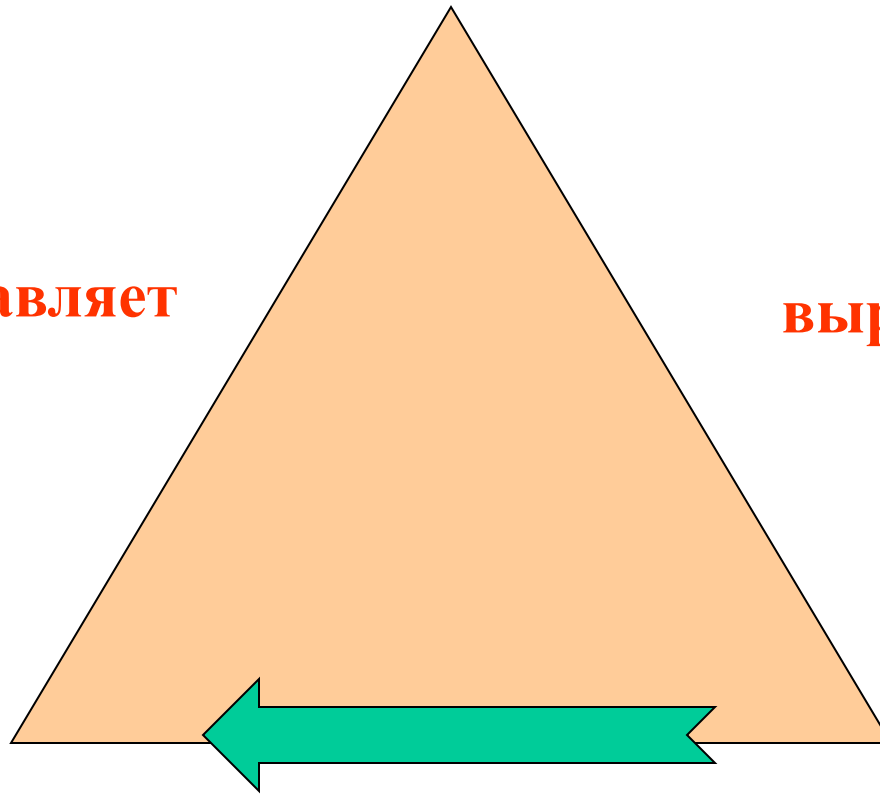
ЗНАК

представляет

выражает

ЗНАЧЕНИЕ
(экстенционал)

СМЫСЛ
(интенционал)



Смысл – это информация, которую несет знак о своем значении

ЗНАКИ И ИХ СМЫСЛЫ

ЗНАКИ

```
graph TD; A[ЗНАКИ] --> B[ОПИСАТЕЛЬНЫЕ]; A --> C[НЕОПИСАТЕЛЬНЫЕ];
```

ОПИСАТЕЛЬНЫЕ

Имеют **СОБСТВЕННЫЙ** смысл

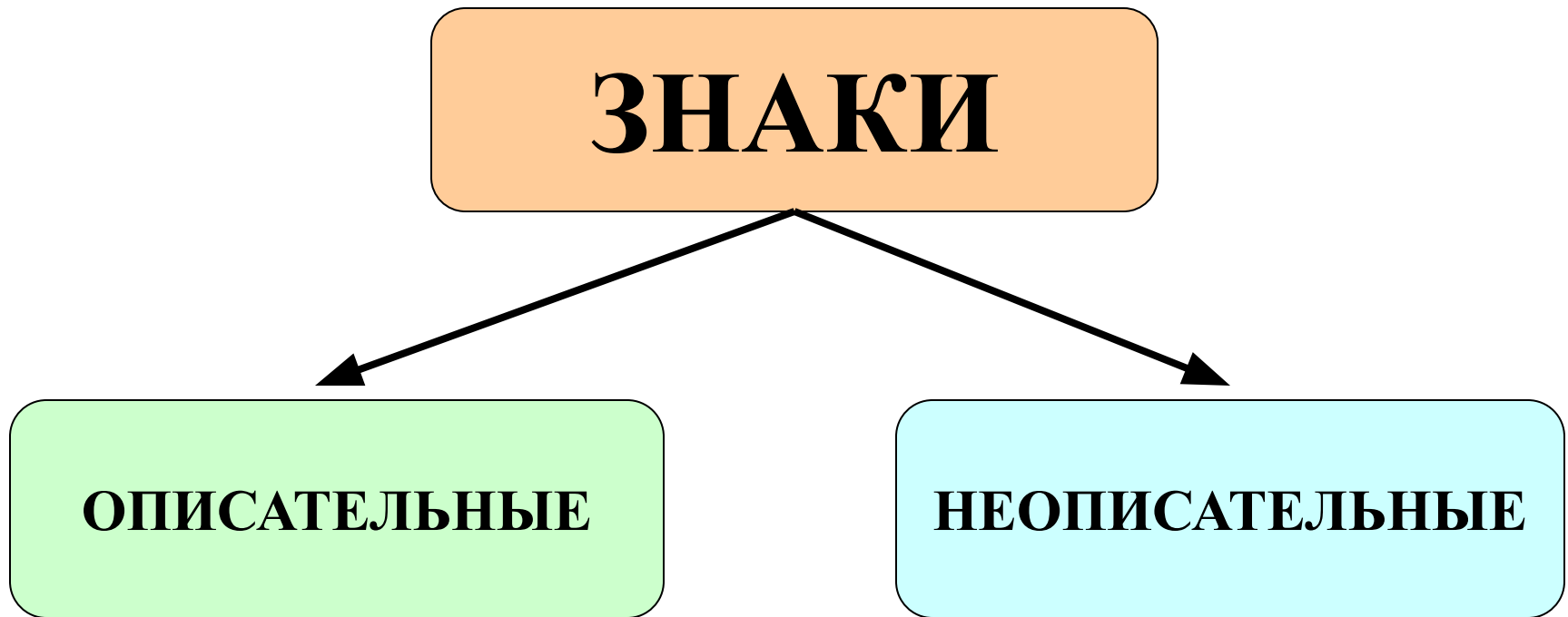
самая длинная река в Европе

НЕОПИСАТЕЛЬНЫЕ

Имеют лишь **ПРИДАННЫЙ** смысл, а **СОБСТВЕННОГО** не имеют

Волга

ЗНАКИ И ИХ СМЫСЛЫ



самая длинная река в Европе

Волга

Очевидно, что знаки могут иметь одно **значение**, но разные **смыслы**: ср. с аналогичным случаем для понятий – одинаковый **объем**, но разное **содержание**

ТЕОРИЯ СЕМАНТИЧЕСКИХ КАТЕГОРИЙ

Выражения разбиваются на различные категории в зависимости от типов их значений и выражаемых смыслов

ВЫРАЖЕНИЯ

```
graph TD; A[ВЫРАЖЕНИЯ] --> B[КАТЕГОРЕМАТИЧЕСКИЕ]; A --> C[СИНКАТЕГОРЕМАТИЧЕСКИЕ]; B --> D[ПРЕДЛОЖЕНИЯ]; B --> E[ТЕРМИНЫ];
```

КАТЕГОРЕМАТИЧЕСКИЕ

СИНКАТЕГОРЕМАТИЧЕСКИЕ

ПРЕДЛОЖЕНИЯ

ТЕРМИНЫ

Не имеющие определенных типов значений/смыслов: технические символы и к ним приравненные (например, «и» как знак простого перечисления).

ТЕОРИЯ СЕМАНТИЧЕСКИХ КАТЕГОРИЙ

ПРЕДЛОЖЕНИЯ

По типам выражаемых смыслов

**ПОВЕСТВО-
ВАТЕЛЬНЫЕ**

СУЖДЕНИЕ

(мысль о
наличии/отсутствии
некоторой ситуации)

**ПОБУДИ-
ТЕЛЬНЫЕ**

ИМПЕРАТИВ

(мысль о
необходимости (не)
совершения
некоторого действия)

**ВОПРОСИ-
ТЕЛЬНЫЕ**

ВОПРОС

(мысль о
необходимости
восполнения
недостающей
информации)

ТЕОРИЯ СЕМАНТИЧЕСКИХ КАТЕГОРИЙ

ТЕРМИНЫ

ЛОГИЧЕСКИЕ

выражают наиболее общие отношения между предметами и ситуациями

КВАНТОРЫ

Все
Ни один
Некоторые

ПРОПОЗИЦИОННЫЕ СВЯЗКИ

Или
Если..то...
Ни...ни...

ВНУТРЕННИЕ СВЯЗКИ

не

НЕЛОГИЧЕСКИЕ (ДЕСКРИПТИВНЫЕ)

имеют конкретное («содержательное») значение

ТЕОРИЯ СЕМАНТИЧЕСКИХ КАТЕГОРИЙ

НЕЛОГИЧЕСКИЕ ТЕРМИНЫ

ИМЕНА

знаки, обознач.
отдельные индивиды
и приравненные к ним

СОБСТВЕННЫЕ

Волга; Юрий Гагарин

ОПИСАТЕЛЬНЫЕ
Е

Первый космонавт;
Четное простое число

ПРЕДИКАТОРЫ

знаки, обозначающие
свойства и отношения
(предм.-истинностные ф.)

ОДНОМЕСТНЫЕ

Свойства: Красный; Кошка

МНОГОМЕСТНЫЕ
Е

Отношения: Севернее;
Любит больше чем и т.д.

**ПРЕДМЕТНЫЕ
ФУНКТОРЫ**

знаки,
обозначающие
предметные
функции

ОДНОМЕСТНЫЕ

Отец ... ; $\sqrt{\quad}$

МНОГОМЕСТНЫЕ
Е

Перепад высот;
+

ВИДЫ ФУНКЦИЙ

Функция	Тип аргумента	Тип значения	Знак функции
Предметно-предметная	Индивиды	Индивиды	Предметный функтор
Предметно-истинностная	Индивиды	Истинностные значения (И\Л)	Предикатор
(Истинностно)-истинностная	Истинностные значения (И\Л)	Истинностные значения (И\Л)	Пропозициональная связка

ВИДЫ ФУНКТОРОВ

1. ... (Мурка) – **кошка**. ... (Москва) – **столица**.
2. ... (Тристан) **любит** ... (Изольду).
3. ... (Маша) **знает** ... (топологию) **хуже, чем** ... (логику)
4. ... (Шарапов) **встретил** ... (Левченко) **у** ... (Горбатого) **на** ... (хазе).

КРИТЕРИЙ ПРЕДИКАТОРА:

Сочленение n-местного **предикатора** с n именами дает
высказывание

1. **Старшая кошка** ... (этого «кошатника»). **Столица** ... (России).
2. **Расстояние от** ... (Земли) **до** ... (Солнца). **Сумма** ... (2) и ... (5)

КРИТЕРИЙ ПРЕДМЕТНОГО ФУНКТОРА:

Сочленение n-местного **предметного функтора** с n именами
дает новое сложное (описательное) имя

ВИДЫ ФУНКТОРОВ

КРИТЕРИЙ ПРЕДИКАТОРА:

Сочленение n -местного предикатора с n именами дает высказывание

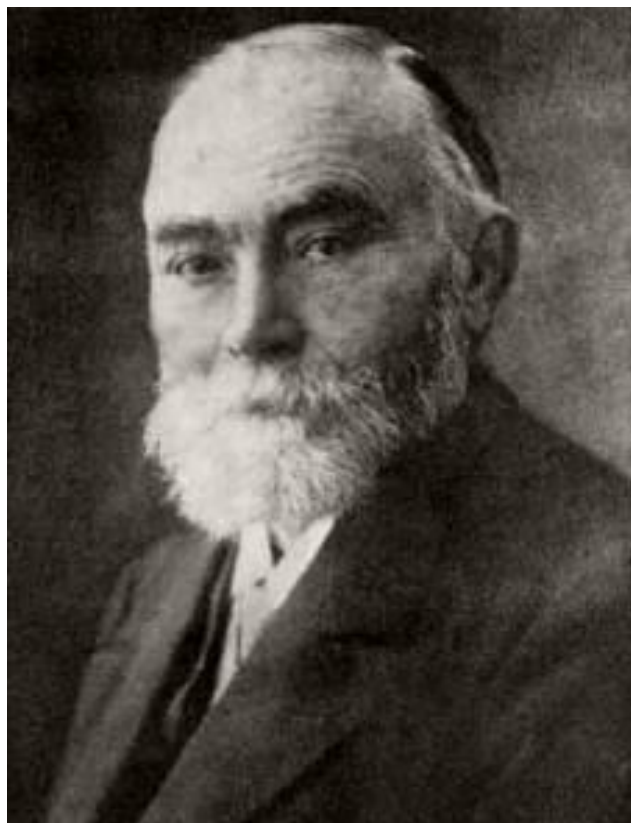
КРИТЕРИЙ ПРЕДМЕТНОГО ФУНКТОРА:

Сочленение n -местного предметного функтора с n именами дает новое сложное (описательное) имя

ПРИМЕР:

1. У Сократа есть дети, поэтому Сократ – **отец**.
(ПР-1, одноместный предикатор)
2. **Отец** Сократа – каменотес.
(ПФ-1, одноместный предметный функтор)
1. Софрониск – **отец** Сократа.
(ПР-2, двухместный предикатор)

ПРИНЦИПЫ УПОТРЕБЛЕНИЯ ЯЗЫКОВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ



Готлоб Фреге
(1848 – 1925)

**ПРИНЦИП
ОДНОЗНАЧНОСТ
И**

**ПРИНЦИП
ПРЕДМЕТНОСТИ**

**ПРИНЦИП
ВЗАИМОЗАМЕНИМОСТ
И**

ПРИНЦИПЫ УПОТРЕБЛЕНИЯ ЯЗЫКОВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

ПРИНЦИП ОДНОЗНАЧНОСТ И

Одинаковые по написанию языковые выражения должны иметь одинаковые значения в рамках данного контекста.

1. Во время выхода из окружения Штирлиц нес Ерунду. Он нес ее, Ерунду с большой буквы, уже два часа. Ему было невыносимо тяжело. Со времени их последней встречи агент ЧК Светлана Крымова по кличке «Ерунда» потяжелела на пятнадцать килограммов...
2. Сколько человек у Вас работает? – Примерно один из десяти. Остальные валяют дурака. По полу, в перьях валяют, естественно...

ПРИНЦИПЫ УПОТРЕБЛЕНИЯ ЯЗЫКОВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

ПРИНЦИП ПРЕДМЕТНОСТИ

- а) Для того, чтобы нечто сказать о каком-то объекте, надо употребить знак этого объекта.
- б) Утверждения, содержащиеся в контексте, должны относиться не к самим знакам, а к их значениям.

Зайцы потребляют морковь.

Морковь включает мягкий знак.

Значит, зайцы потребляют мягкие знаки вместе с морковью.

ПРИНЦИПЫ УПОТРЕБЛЕНИЯ ЯЗЫКОВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

ПРИНЦИП ПРЕДМЕТНОСТИ

- а) Для того, чтобы нечто сказать о каком-то объекте, надо употребить знак этого объекта.
- б) Утверждения, содержащиеся в контексте, должны относиться не к самим знакам, а к их значениям.

Принцип предметности **запрещает**
автономное употребление знаков
(представление ими самих себя).

“«Столица России» = «Москва»” – ложь!

“Столица России = Москва” – истина!

ПРИНЦИПЫ УПОТРЕБЛЕНИЯ ЯЗЫКОВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

ПРИНЦИП ВЗАИМОЗАМЕНИМОСТ И

Если в некотором контексте заменить некоторые вхождения выражения a на выражение b с тем же значением, что и у a , то значение всего контекста не должно измениться

Контексты, где правило эквивалентной замены может применяться неограниченно, называются **экстенциональными**. Прочие – **интенциональными**.

ПРИНЦИПЫ УПОТРЕБЛЕНИЯ ЯЗЫКОВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

ПРИНЦИП ВЗАИМОЗАМЕНИМОСТ И

Если в некотором контексте заменить некоторые вхождения выражения *a* на выражение *b* с тем же значением, что и у *a*, то значение всего контекста не должно измениться

Король Георг IV хотел узнать, является ли В. Скотт автором романа «Уэверли».

Автор романа «Уэверли» = В. Скотт

Король Георг IV хотел узнать, является ли В. Скотт В. Скоттом.

ПРИНЦИПЫ УПОТРЕБЛЕНИЯ ЯЗЫКОВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

ПРИНЦИП ВЗАИМОЗАМЕНИМОСТ И

Если в некотором контексте заменить некоторые вхождения выражения a на выражение b с тем же значением, что и у a , то значение всего контекста не должно измениться

Кеплер не знал, что число больших планет Солнечной системы больше 7.

Число больших планет Солнечной системы = 8

Кеплер не знал, что 8 больше 7.

ПРИНЦИПЫ УПОТРЕБЛЕНИЯ ЯЗЫКОВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

ПРИНЦИП ВЗАИМОЗАМЕНИМОСТ И

Если в некотором контексте заменить некоторые вхождения выражения a на выражение b с тем же значением, что и у a , то значение всего контекста не должно измениться

Необходимо, что 7 больше 6.

7 – число гномов у Белоснежки

Необходимо, чтобы число гномов у Белоснежки было больше 6.

ПРИНЦИПЫ УПОТРЕБЛЕНИЯ ЯЗЫКОВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

ПРИНЦИП ВЗАИМОЗАМЕНИМОСТ И

Если в некотором контексте заменить некоторые вхождения выражения a на выражение b с тем же значением, что и у a , то значение всего контекста не должно измениться

Фокс знал, что написал под диктовку Шарапова текст.

Текст, который Шарапов надиктовал Фоксу, был письмом в банду

Фокс признавал, что писал под диктовку Шарапова письмо в свою банду

ПРИНЦИПЫ УПОТРЕБЛЕНИЯ ЯЗЫКОВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

ПРИНЦИП ВЗАИМОЗАМЕНИМОСТ И

Если в некотором контексте заменить некоторые вхождения выражения a на выражение b с тем же значением, что и у a , то значение всего контекста не должно измениться

Поиски Шлиманом местоположения Трои (непустое имя)

Местоположение Трои – холм Гиссарлык (тождество)

Поиски Шлиманом холма Гиссарлык (пустое имя)

ПРИНЦИПЫ УПОТРЕБЛЕНИЯ ЯЗЫКОВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

ПРИНЦИП ВЗАИМОЗАМЕНИМОСТ И

Если в некотором контексте заменить некоторые вхождения выражения a на выражение b с тем же значением, что и у a , то значение всего контекста не должно измениться

Антиномия отношения именованя –
ситуация несохранения значения контекста при
применении правила эквивалентной замены.

ЛОГИЧЕСКИЕ ПАРАДОКСЫ

ЛОГИЧЕСКИЕ
ПАРАДОКСЫ

СЕМАНТИЧЕСКИЕ

Связаны с понятиями
истинности, выразимости,
определимости и т.д.

СИНТАКСИЧЕСКИ
Е

(П. теории множеств)

Получаются в результате чисто
формальных выводов в
аксиоматических системах
(типа теории множеств)

Это весьма условное разделение предложил *Ф. Рамсей*

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ПАРАДОКСЫ

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ПАРАДОКСЫ

```
graph TD; A[СЕМАНТИЧЕСКИЕ ПАРАДОКСЫ] --> B[ПАРАДОКС ЛЖЕЦА]; A --> C[ПАРАДОКС ГРЕЛЛИНГА-НЕЛЬСОНА]; A --> D[ПАРАДОКС РИШАРА]; A --> E[ПАРАДОКС БЕРРИ];
```

**ПАРАДОКС
ЛЖЕЦА**

ИСТИННОСТЬ

**ПАРАДОКС
ГРЕЛЛИНГА-
НЕЛЬСОНА**

выразимость
обозначение

**ПАРАДОКС
РИШАРА**

выразимость

**ПАРАДОКС
БЕРРИ**

определимость

ПАРАДОКС ЛЖЕЦА

ДАННОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ ЛОЖНО

ИСТИНА

Оно
действительно
ложно

ПРОТИВОРЕЧИ
Е

ПРОТИВОРЕЧИЕ

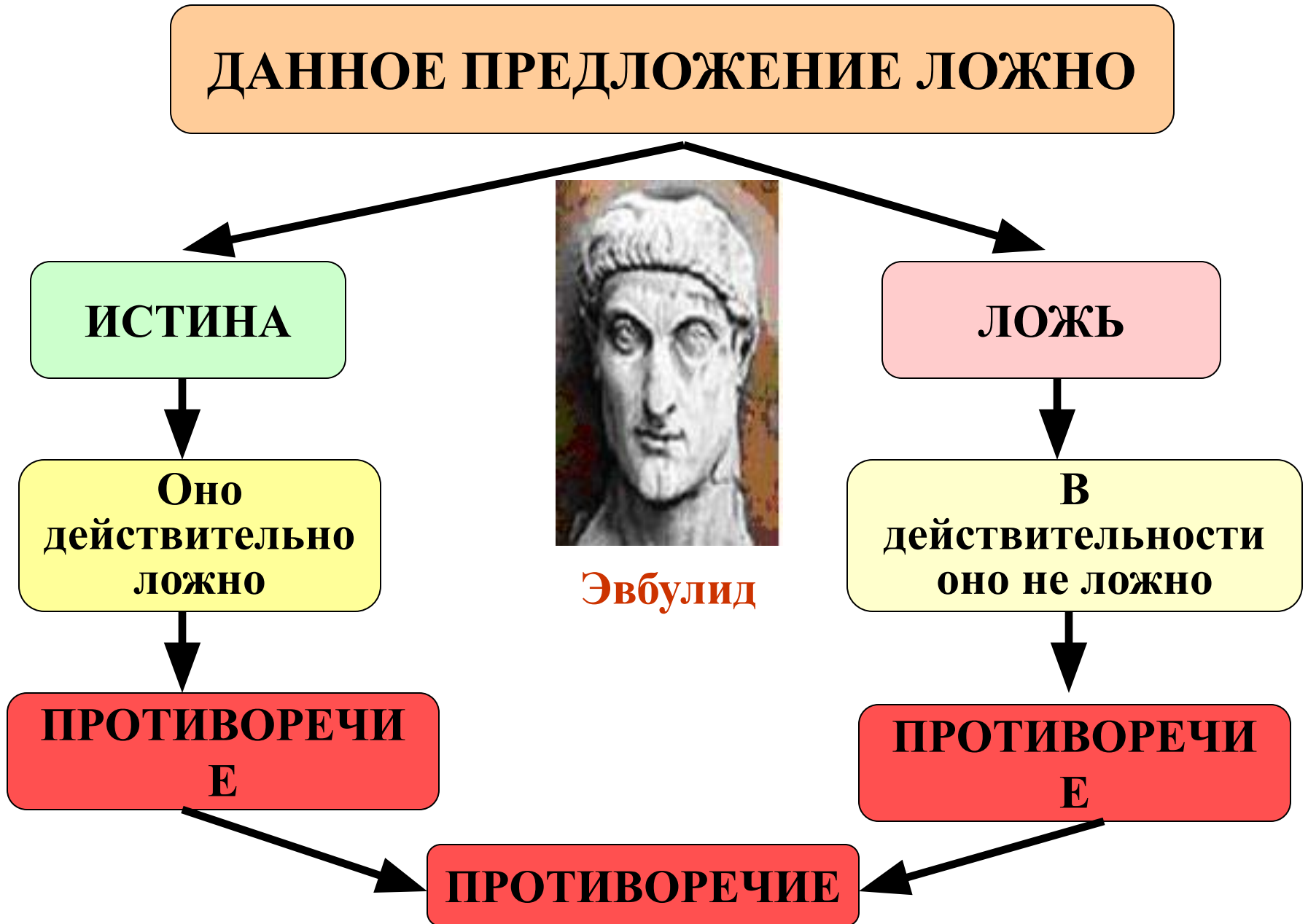


Эвбулид

ЛОЖЬ

В
действительности
оно не ложно

ПРОТИВОРЕЧИ
Е



ПАРАДОКС ЛЖЕЦА

«ВСЕ КРИТЯНЕ ЛГУТ»
(сказано критянином)

ИСТИНА

Все критяне
лгут,
в т.ч. Эпименид

ПРОТИВОРЕЧИ
Е



Эпименид

ЛОЖЬ

Не все критяне
лгут

Некоторые
критяне
говорят правду

На о. Крит, кроме Эпименида,
живет кто-то, кто говорит
правду

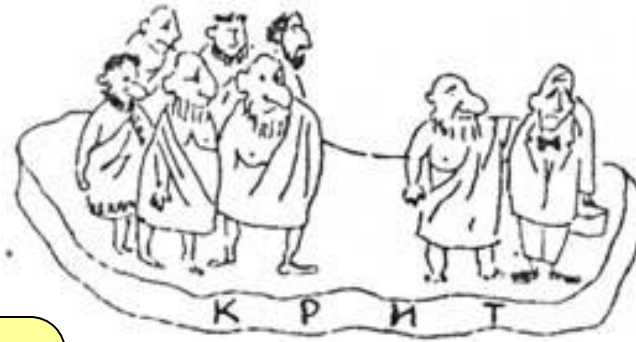
ПАРАДОКС ЛЖЕЦА

«ВСЕ КРИТЯНЕ ЛГУТ»
(сказано критянином)

ИСТИНА

Все критяне
лгут,
в т.ч. Эпименид

ПРОТИВОРЕЧИ
Е



Эпименид
и
критяне

ЛОЖЬ

Не все критяне
лгут

Некоторые
критяне
говорят правду

НЕТ ПРОТИВОРЕЧИЯ

ПАРАДОКС ЛЖЕЦА

«ВСЕ КРИТЯНЕ ЛГУТ»

(сказано **ЕДИНСТВЕННЫМ** критянином)

ИСТИНА

Все критяне
лгут,
в т.ч. Эпименид

ПРОТИВОРЕЧИЕ
Е



ЭПИМЕНИД

ЛОЖЬ

Не все критяне
лгут

Некоторые
критяне
говорят правду

ПРОТИВОРЕЧИЕ
Е

(других нет)

ПРОТИВОРЕЧИЕ

ПАРАДОКС ЛЖЕЦА

**Сократ: То, что скажет Платон, – истина.
Платон: То, что сказал Сократ – ложь.**

**Сократ
говорит
правду**

**Платон
сказал правду**

Сократ солгал

ПРОТИВОРЕЧИЕ



**Сократ
солгал**

Платон солгал

Сократ не солгал

ПРОТИВОРЕЧИЕ

ПРОТИВОРЕЧИЕ

ПАРАДОКС ЛЖЕЦА

Таня: Я существую

Настя: Я тоже существую

Кирилл Авенирович: Как минимум, одно из этих трех утверждений ложно

КА лжет

Ложных суждений нет

ПРОТИВОРЕЧИЕ

КА сказал правду

Ложные суждения есть, но к ним не относится фраза КА

Либо Таня не существует, либо Настя, либо они не существуют обе вместе

ПАРАДОКС БЕРРИ

Числа можно выражать языковыми конструкциями (например, «двести тридцать»). Для записи некоторых чисел потребуются выражения, содержащие больше двадцати слов. Среди таких чисел есть наименьшее (как число 122 наименьшее из тех, для записи которых требуется больше двух слов).

X: *«Наименьшее натуральное число, которое нельзя определить выражением, состоящим менее, чем из двадцати слов»*

Данное выражение определенным способом (через выражение языка) определяет некоторое натуральное число

ПАРАДОКС БЕРРИ

X: *«Наименьшее натуральное число,
которое нельзя определить выражением,
состоящим менее, чем из двадцати слов»*

Данное выражение определенным способом
(через выражение языка) определяет
некоторое натуральное число

Оно определяет его выражением, состоящим из 13 слов

Существует число, одновременно **неопределимое**
через выражение языка некоторого вида (по дефиниции числа) и
определимое через такое выражение (через описание X)

ПАРАДОКС ГРЕЛЛИНГА

ПРИЛАГАТЕЛЬНЫЕ

```
graph TD; A[ПРИЛАГАТЕЛЬНЫЕ] --> B[АВТОЛОГИЧЕСКИЕ]; A --> C[ГЕТЕРОЛОГИЧЕСКИЕ];
```

АВТОЛОГИЧЕСКИ
Е

Обладают сами свойством,
на которое указывают

**многосложный
русский**

ГЕТЕРОЛОГИЧЕСКИЕ

Не обладают сами свойством,
на которое указывают

**односложный
английский**

ПАРАДОКС ГРЕЛЛИНГА

«ГЕТЕРОЛОГИЧЕСКИЙ»

Автологическое

Обладает
указанным свойством

Гетерологическое

ПРОТИВОРЕЧИЕ

Гетерологическое

Не обладает
указанным
свойством

Автологическое

ПРОТИВОРЕЧИЕ

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ



Георг Кантор

ПАРАДОКС КАНТОРА

С каждым множеством связана такая характеристика, как его **МОЩНОСТЬ**. Приблизительно это может быть охарактеризовано как число элементов множества.

Мощности множества X (состоящего из пяти берез) и множества Y (состоящего из пяти коров) совпадают, так как можно к каждой березе привязать по одной корове, и не останется коров, не привязанных ни к одной березе.

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ



Георг Кантор

ПАРАДОКС КАНТОРА

Если все-таки останутся лишние коровы, после того, как оказалась занятой какой-нибудь коровой каждая береза, говорят, что мощность множества коров больше, чем мощность множества берез. Очевидно, что два множества имеют одинаковую мощность, если их можно поставить друг с другом в одно-однозначное соответствие.

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

ПАРАДОКС КАНТОРА



Георг Кантор

Понятие мощности можно распространить и на бесконечные множества, так сказать, «численно измерить бесконечность».

Очевидно, что по любому множеству можно образовать новое множество, а именно множество всех его подмножеств.

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ



Георг Кантор

ПАРАДОКС КАНТОРА

Очевидно, что по любому множеству можно образовать новое множество, а именно множество всех его подмножеств.

Пусть $X = \{A, B\}$

Тогда

$X^* = \{ \{A\}, \{B\}, \{A, B\}, \emptyset \}$

так как

$\{A\} \subseteq \{A, B\}, \{B\} \subseteq \{A, B\},$
 $\{A, B\} \subseteq \{A, B\}, \emptyset \subseteq \{A, B\}$

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ



Георг Кантор

ПАРАДОКС КАНТОРА

Пусть $X = \emptyset$

Тогда

$X^* = \{ \emptyset \}$, т.е. непустое множество

так как

$$\emptyset \subseteq \{ \emptyset \}$$

Так же «очевидно», что мощность X^* всегда больше, чем мощность X , и равна $2^{M(X)}$, где $M(X)$ – мощность X .

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ



Георг Кантор

ПАРАДОКС КАНТОРА

Мощность X^* всегда больше, чем мощность X , и равна $2^{M(X)}$, где $M(X)$ – мощность X .

Докажем это утверждение для
бесконечных множеств

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

ПАРАДОКС КАНТОРА

1. Пусть все бесконечные множества имеют одинаковую мощность, т.е. их можно поставить в ООС с множеством всех их подмножеств.
2. Назовем элемент исходного множества X «синим», если он входит в то подмножество, которое поставлено ему в соответствие, и «красным», если не входит.
3. Рассмотрим подмножество «красных» элементов X .
4. Оно не может быть поставлено в соответствие ни «синему» элементу, ни «красному».

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ



Георг Кантор

ПАРАДОКС КАНТОРА

Но если X – множество всех множеств, «максимальное множество», то его мощность наибольшая и не может быть меньше мощности никакого другого множества, даже множества все своих подмножеств, потому что и его оно (X) содержит в себе в качестве своей собственной части, ведь оно множество ВСЕХ МНОЖЕСТВ.

$M(X) < M(X^*)$ – по теореме Кантора

$M(X) > M(X^*)$ – так как X – максимальное множество

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ



Георг Кантор

ИЕРАРХИЯ АЛЕФОВ

Каких чисел больше – целых положительных или целых положительных нечетных? Целых или натуральных? Рациональных или целых? Ответ удивителен – ПОРОВНУ!!! (В указанном смысле термина «мощность»).

2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
15	13	11	9	7	5	3	1	2	4	6	8	10	12

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

ИЕРАРХИЯ АЛЕФОВ



Георг Кантор

Множества, которые можно поставить в ООС со множеством натуральных чисел, по понятным причинам называют **СЧЕТНЫМИ** множествами. Их мощность считается равной трансфинитному числу числу *алеф-нуль* \aleph_0 . Из теоремы Кантора следует, что множество всех подмножеств множества с мощностью алеф-нуль будет иметь бОльшую мощность, а именно мощность 2^{\aleph_0} . Такое трансфинитное число обозначается \aleph_1 (при принятии гипотезы континуума).

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ



Георг Кантор

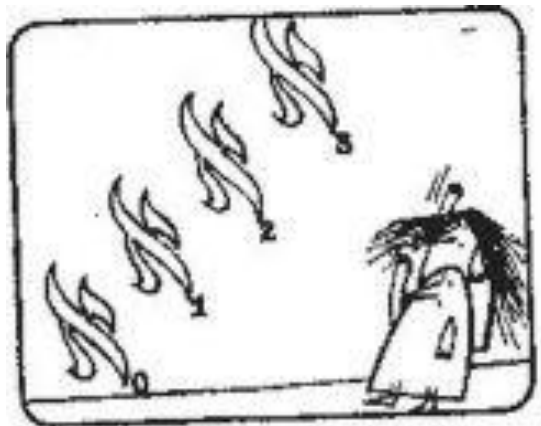
ИЕРАРХИЯ АЛЕФОВ

Можно показать, что мощность 2^{\aleph_0} имеет множество всех действительных чисел (так называемая мощность континуума – множества «точек на отрезке от 0 до 1»). Очевидно, что мощность множества всех его подмножеств равна $2^{\aleph_1} = \aleph_2$. (опять-таки при принятии теперь уже обобщенной гипотезы континуума). Такую мощность имеет множество всех одноместных арифметических функций.

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ



Георг Кантор



ИЕРАРХИЯ АЛЕФОВ

Но пока не удалось обнаружить никакого конкретного множества, мощность которого была бы равна трансфинитному числу алеф-три. «Мы оказываемся в положении дикаря, у которого множество детей, но который умеет считать только до трех».

Таким образом, бесконечности бывают разные. Бесконечные множества образуют бесконечную «иерархию алефов»...

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

ПАРАДОКС РАССЕЛА



Бертран Рассел

Кажется очевидным, что по любому (непротиворечивому) свойству можно образовать множество тех и только тех объектов, которые обладают этим свойством.

(Аксиома свертывания в теории множеств: для всякого свойства P и объекта x существует множество A такое, что x есть элемент A тогда и только тогда, когда x есть P).

Однако, это не так.

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

МНОЖЕСТВА

```
graph TD; A[МНОЖЕСТВА] --> B[НОРМАЛЬНЫЕ]; A --> C[НЕНОРМАЛЬНЫЕ]
```

НОРМАЛЬНЫЕ

Не включают себя в
качестве своего элемента

Множество коров

Множество четных чисел

Множество двухэлементных множеств

НЕНОРМАЛЬНЫЕ

Включают себя в качестве
своего элемента

Множество всех множеств

**МНОЖЕСТВО всех
нормальных множеств**

НОРМАЛЬНОЕ

**Не включает себя
(как нормальное по Df.)**

**Включает себя
(т.к. включает **все**
нормальные множества)**

ПРОТИВОРЕЧИЕ

НЕНОРМАЛЬНОЕ

**Включает себя
(как ненормальное по
Df.)**

**Не включает себя
(т.к. включает **только**
нормальные множества)**

ПРОТИВОРЕЧИЕ

ПАРАДОКС НЕОЖИДАННОЙ КАЗНИ

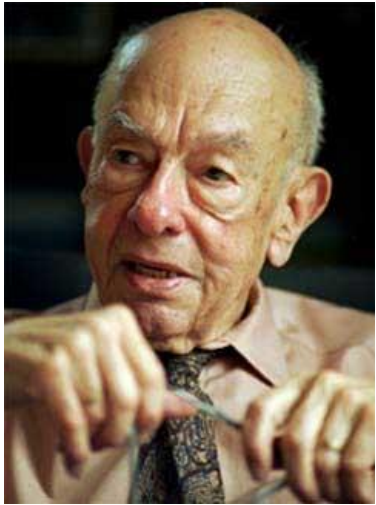


**У. Куайн
(1908 – 2000)**



Прокурор: Ну, Джонс, пришел тебе конец! Сегодня последний в твоей жизни воскресный вечер. Тебя казнят в один из дней на следующей неделе. Но в какой именно, ты узнаешь лишь в тот момент, когда за тобой однажды утром придет палач. Как тебе известно, казни происходят в нашей тюрьме с 10 до 12 ч. утра.

ПАРАДОКС НЕОЖИДАННОЙ КАЗНИ



**У. Куайн
(1908 – 2000)**

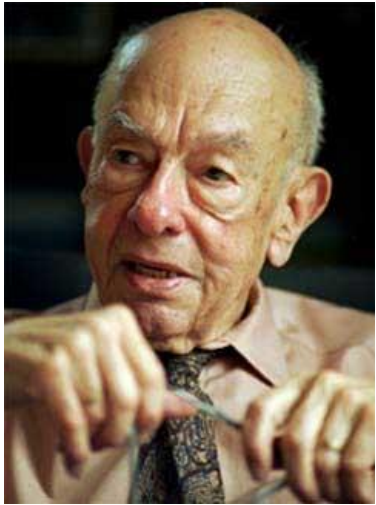


Прокурор: Это будет казнь врасплох. Ну а если мне не удастся выполнить это свое обещание, тебя отпустят вечером в следующее воскресенье.

Адвокат: Прокурор идиот! Теперь, Джонс, твое дело в шляпе. Через неделю ты будешь свободен!

Джонс: Как так?

ПАРАДОКС НЕОЖИДАННОЙ КАЗНИ

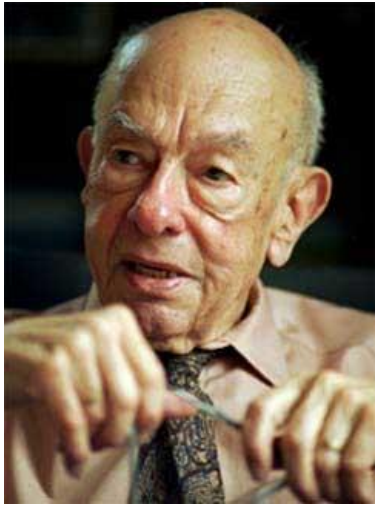


**У. Куайн
(1908 – 2000)**



Адвокат: В самом деле, если казнь будет назначена на воскресенье, то ты узнаешь об этом уже накануне вечером. Поэтому тебя не могут казнить в воскресенье. В субботу тебя тоже не могут казнить, потому что вечером в пятницу ты будешь рассуждать так.

ПАРАДОКС НЕОЖИДАННОЙ КАЗНИ

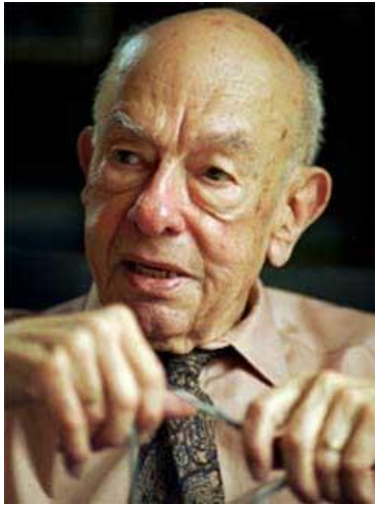


**У. Куайн
(1908 – 2000)**



Адвокат: «В воскресенье, по доказанному ранее, казни быть не может. Значит, она должна быть завтра, в субботу. Но это значит, что я знаю об этом уже сегодня, что противоречит условию прокурора. Поэтому и суббота отпадает». А дальше пользуемся методом математической индукции.

ПАРАДОКС НЕОЖИДАННОЙ КАЗНИ

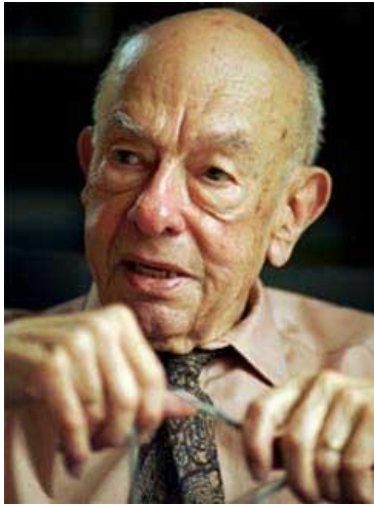


**У. Куайн
(1908 – 2000)**



Адвокат: В четверг вечером ты, отбросив воскресенье и субботу (в силу предыдущего доказательства), придешь к выводу, что казнь будет в пятницу. Значит, ее в пятницу не может быть. Так ты отбросишь и четверг, и среду, и вторник, и завтрашний понедельник. Казнь вообще неосуществима на таких условиях!

ПАРАДОКС НЕОЖИДАННОЙ КАЗНИ



**У. Куайн
(1908 – 2000)**



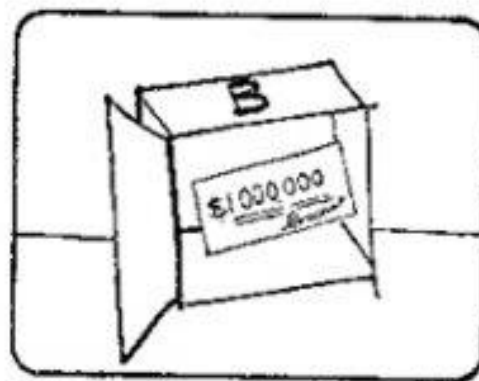
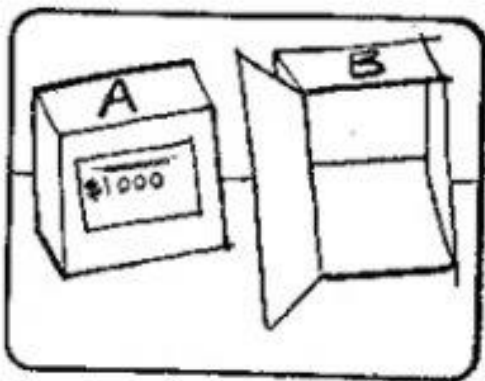
Джонс: Что ж, убедительно. Теперь можно и расслабиться...

Палач (заходя в камеру Джонса в четверг в 11 часов утра): Собирайся, парень. Вещи можно оставить...

Где ошибка в рассуждениях адвоката, стоившая жизни Джонсу? Или он в любом случае был бы казнен, даже если бы «не расслабился»?

Парадокс Ньюкома

Из глубин космического пространства на Землю высадился инопланетянин Омега. У Омеги было с собой самое совершенное оборудование для изучения деятельности головного мозга людей, позволявшее ему с точностью определять, какую из двух альтернатив выберет каждый из испытуемых.



Перед вами два ящика. В ящике А, прозрачном, лежит чек на 1000 долларов. В ящике В, непрозрачном, либо нет ничего, либо лежит чек на 1 000 000 долларов.

1) Вы можете выбрать оба ящика и взять себе те деньги, которые в них находятся. Но если бы Омега знал, что вы поступите именно так, то оставил бы ящик В пустым. В этом случае вы получите только 1000 долларов.

2) Во-вторых, вы можете выбрать только ящик В. Если бы Омега знал, что вы поступите именно так, то положил бы в ящик В 1 000 000 долларов, и он целиком достался бы вам.

Что вы выберете?

Парадокс сатанинской бутылки

В рассказе **Р.Л. Стивенсона "Сатанинская бутылка"** описывается следующая ситуация:

Герой покупает бутылку, в которую заключен черт. Бывший хозяин бутылки объясняет ему, что черт выполняет любые желания, но за это хозяин бутылки должен будет после смерти гореть в аду. Кроме того, исполнение любого желания приносит несчастья близким хозяина бутылки.

Ясно, что покупка ее за 1 цент делает невозможной ее последующую продажу с убытком для себя. Точно также ее невозможно продать за 1 цент, если вы купили ее за 2 цента, но при продаже раскрываете покупателю все последствия сделки.



Выбросить бутылку ее хозяин не может, он может только ее продать, **причем за меньшую цену, чем купил.**

Какова самая низкая цена, за которую бутылка может быть продана?