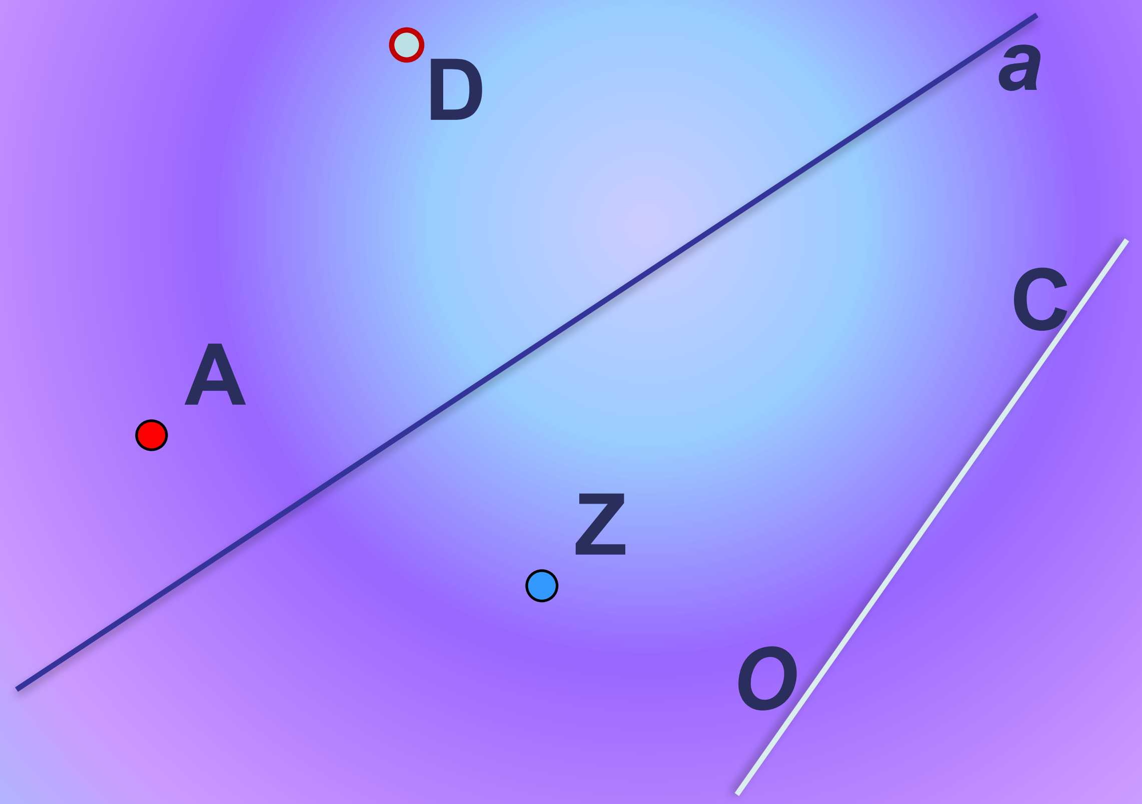
Систематизація та узагальнення фактів і методів планіметрії

Повторення курсу планіметрії

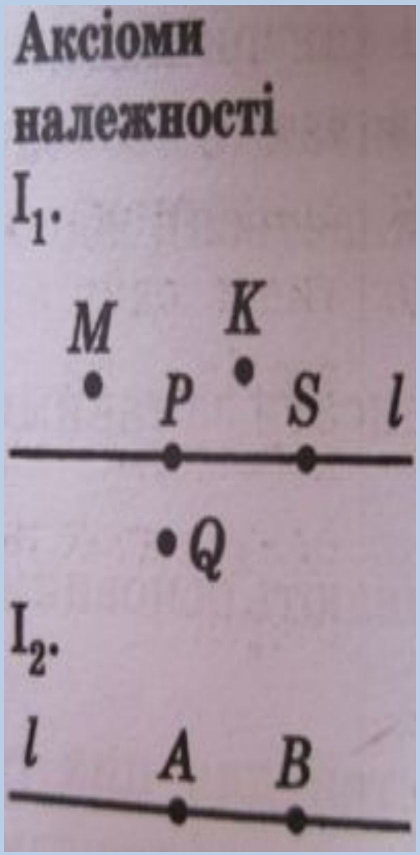
- Основні поняття планіметрії.
- Аксіоми планіметрії.
- Основні властивості геометричних фігур та їх ознаки.
- Методи розв’язування геометричних задач.

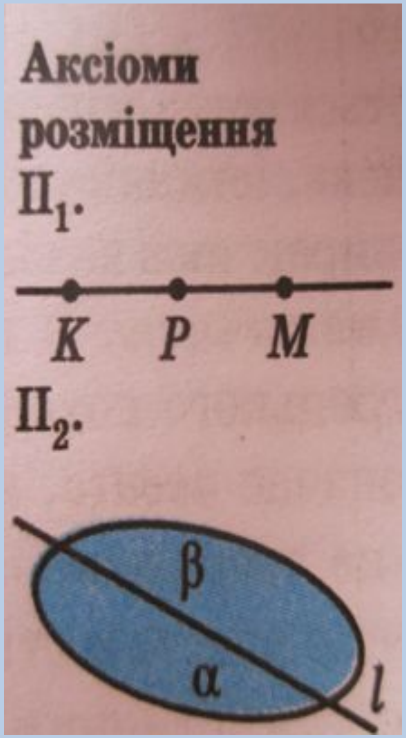
ОПОРНІ ФАКТИ ПЛАНІМЕТРІЇ

Основні геометричні фігури **(поняття) планіметрії –** ***точка, пряма.***

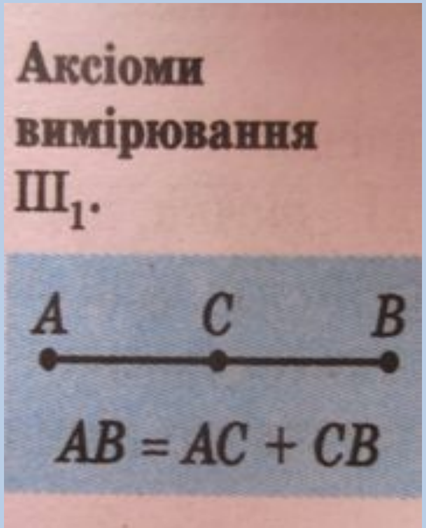
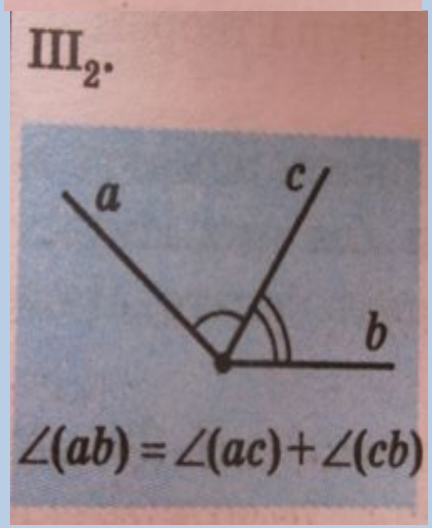


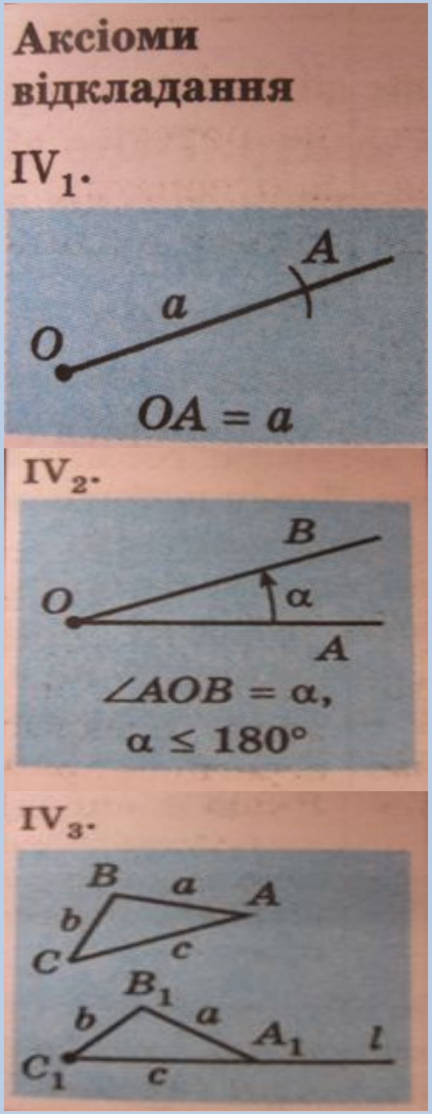
Аксіоми планіметрії

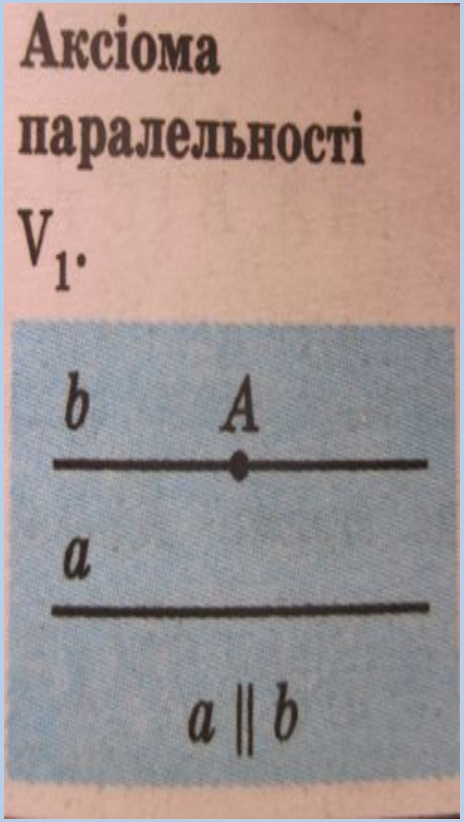
I		I_1 Яка б не була пряма,існують точки,що належать цій прямій,і точки, що не належать їй I_2 Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну .	Дві різні прямі або не перетинаються, або перетинаються тільки в одній точці

<table>
<tr>
<td>II</td>
<td>
</td>
<td>II1 З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими

II2 Пряма розбиває площину на дві півплощини</td>
<td>Якщо кінці будь-якого відрізка належать одній півплощині, то відрізок не перетинає пряму. Якщо кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинає пряму</td>
</tr>
</table>

III	 	III_1 Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою. III_2 Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами	Якщо три точки A, B і C лежать на одній прямій, то точка C лежатиме між точками A і B у випадку, коли AB = AC + CB. Якщо від даної півпрямої відкласти в одну й ту саму півплощину два кути, то сторона меншого кута, відмінна від даної півпрямої, проходитиме між сторонами більшого кута

IV	 	IV_1 На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини і до того ж тільки один. IV_2 Від будь-якої півпрямої в задану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою 180°, і до того ж тільки один. IV_3 Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорів-нює йому, у заданому розміщенні відносно даної півпрямої	Якщо пряма, яка не проходить через жодну з вершин трикутника, пере-тинає одну з його сторін, то вона перетинає тільки одну з двох інших сторін

V		V_1 Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більше як одну пряму, паралельну даній	Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу

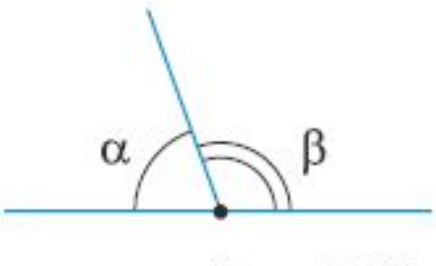
КУТИ

Два кути називаються *суміжними, якщо в них одна* сторона спільна, а дві інші сторони є доповняльними променями (мал. 1).

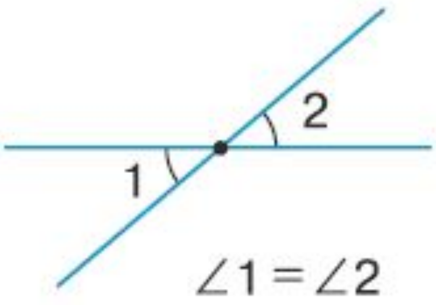
Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Два кути називаються *вертикальними, якщо сторони* одного кута є доповняльними променями сторін другого (мал. 2).

Вертикальні кути рівні.



Мал. 1



Мал. 2

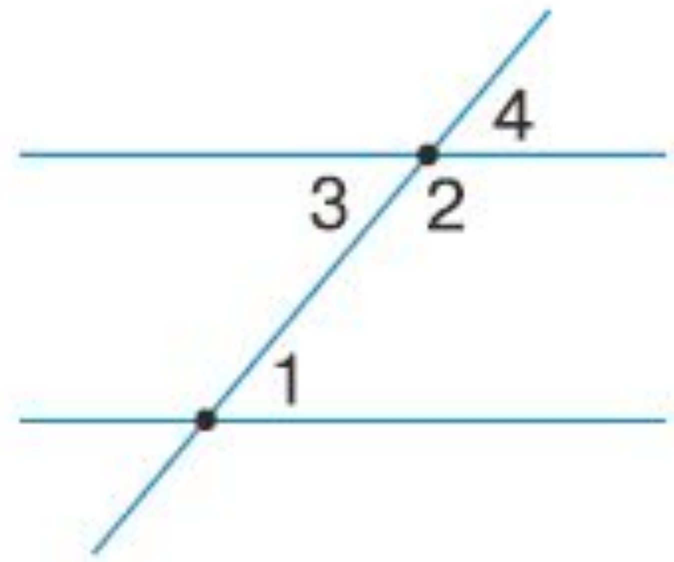
Властивості паралельних прямих

Якщо дві паралельні прямі перетинає третя (мал. 3), то:

1) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°: <1 + <2 = 180°;

2) внутрішні різносторонні кути рівні: <1 = <3;

3) відповідні кути рівні: <1 = <4

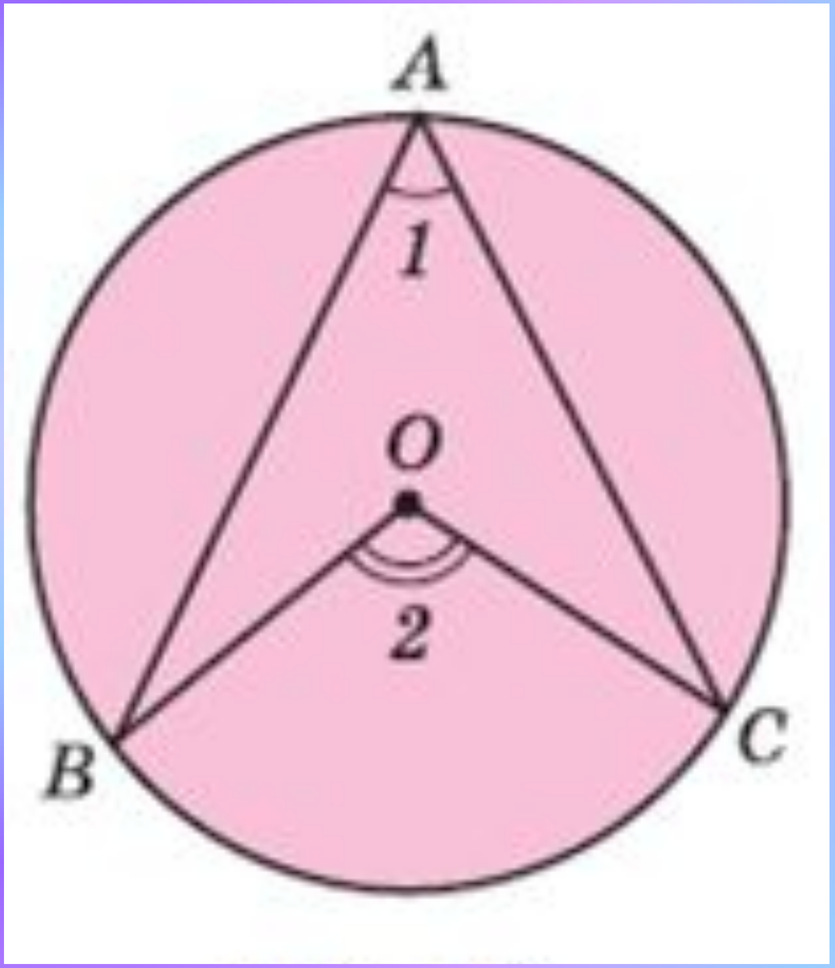


Мал. 3

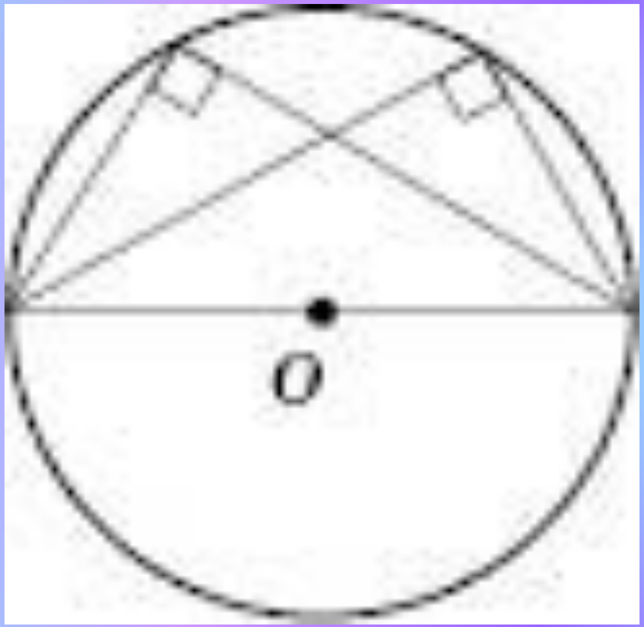
Кути в колі

Якщо в колі побудувати плоский кут так, що його вершиною буде центр кола, то матимемо кут, який називається **центральним кутом(<BOC).**

Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають дане коло, називається ***вписаним кутом (<BAC)***

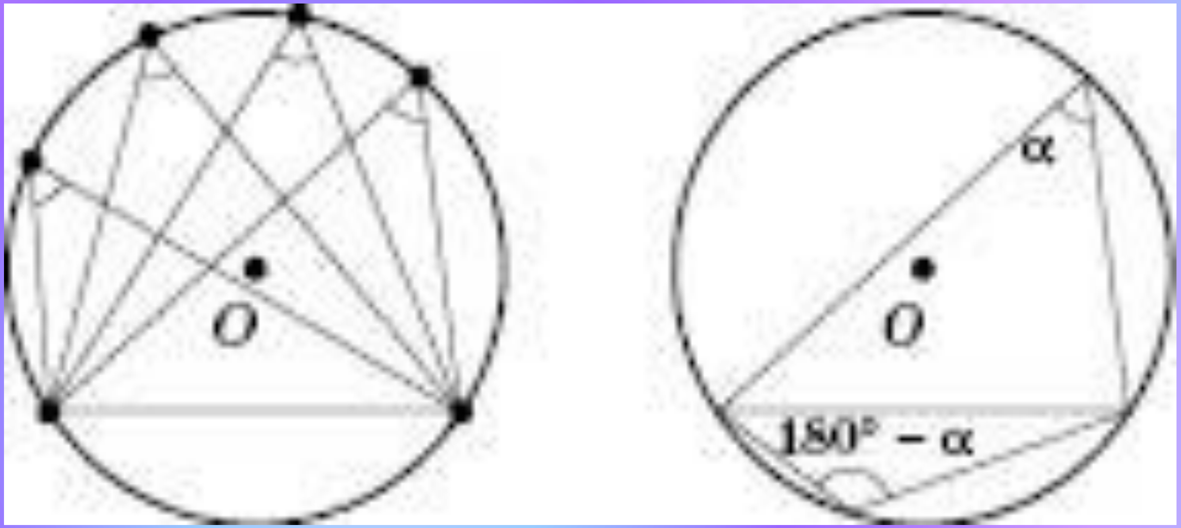


Кути, вписані в коло



Вписані кути, які спираються на діаметр, – прямі.

Властивості вписаних кутів

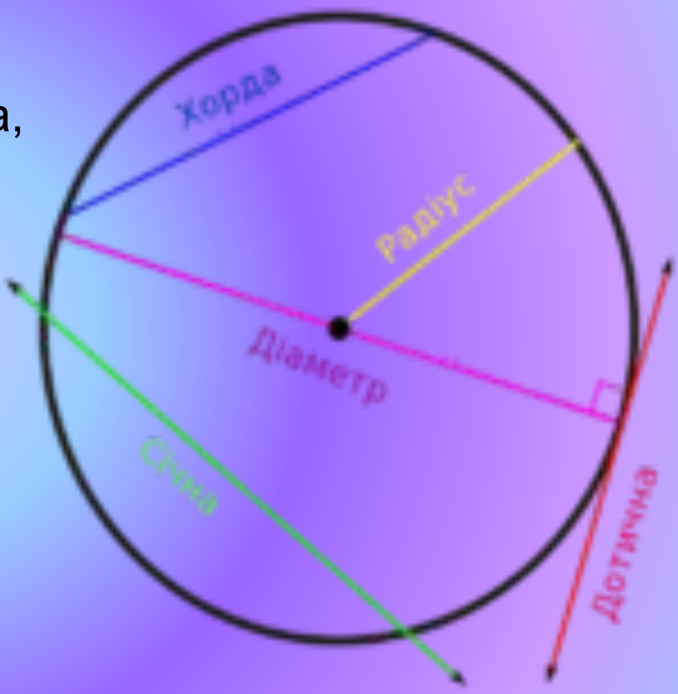


Усі вписані кути деякого кола, що спираються на одну й ту саму хорду і лежать з одного боку від неї, мають однакові градусні міри, тобто вони рівні.

Якщо два вписані кути деякого кола спираються на одну й ту саму хорду і лежать із різних боків від неї, то їхня сума дорівнює 180°.

Коло і його елементи

Колом називають геометричну фігуру, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. Цю точку називають **центром кола**, а відрізок, що сполучає центр кола з будь-якою точкою кола, називають **радіусом**.

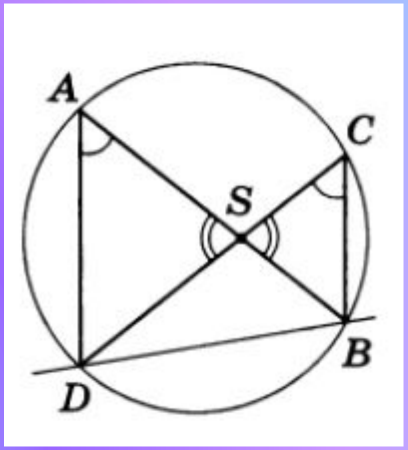


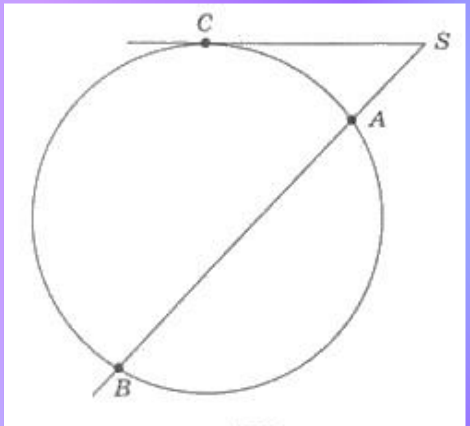
Відрізок, що сполучає дві точки кола, називають **хордою**.

Хорду, що проходить через центр кола, називають **діаметром**.

Властивості хорд і дотичних

$AS \cdot SB = CS \cdot SD$

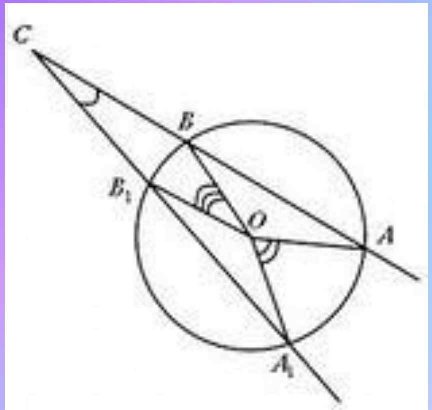




мал. 188

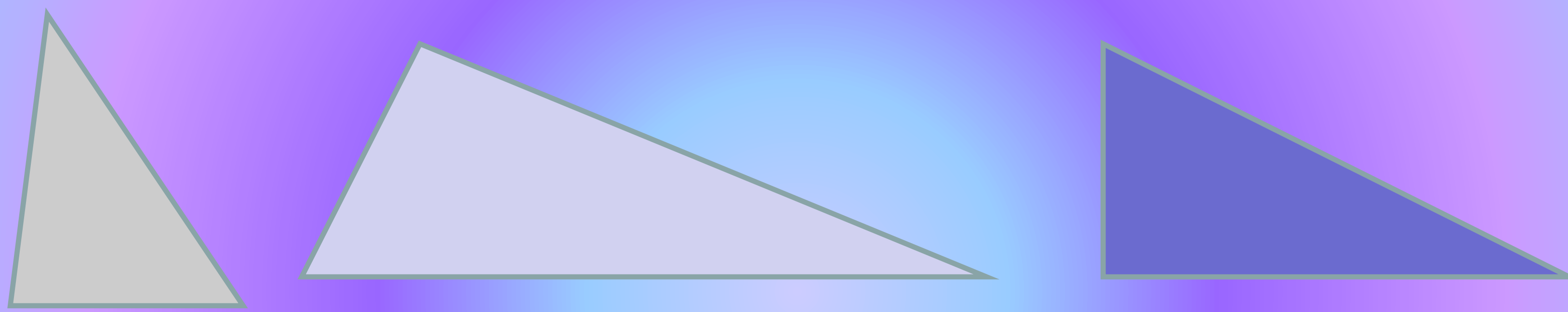
$SC^2 = SA \cdot SB$

$CB \cdot CA = CB_1 \cdot CA_1$



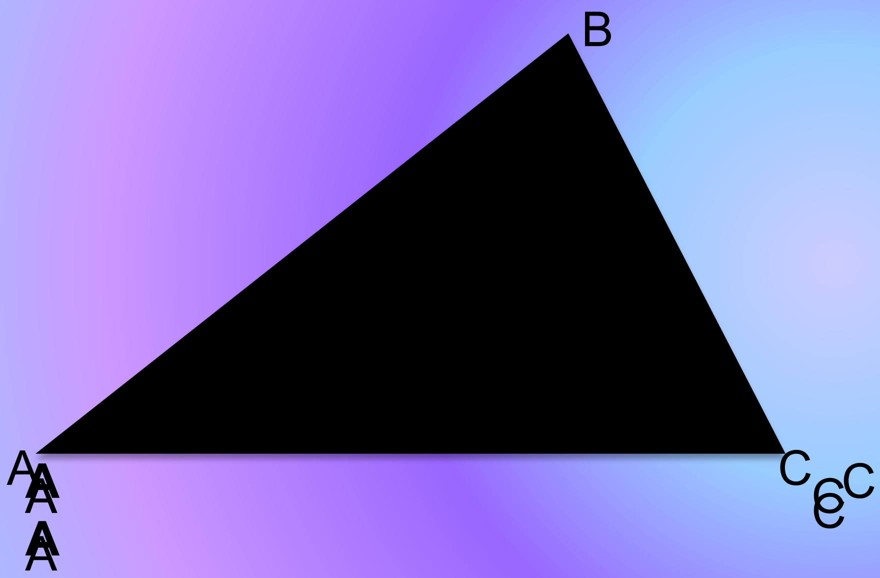
Трикутники

Залежно від міри кутів, трикутники поділяють на гострокутні, тупокутні й прямокутні.



Залежно від довжин сторін трикутники поділяють на різносторонні, рівнобедрені й рівносторонні.

Означення трикутника: ***Трикутник – це фігура, яка складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, що попарно з'єднують ці точки.***



Елементи трикутника:

Точки A,B,C – вершини .

Відрізки AB, BC, AC – сторони.

< A, < B, <C – кути трикутника.

<A – протилежний до сторони BC.

<A- прилеглий до сторони AB (і BC).

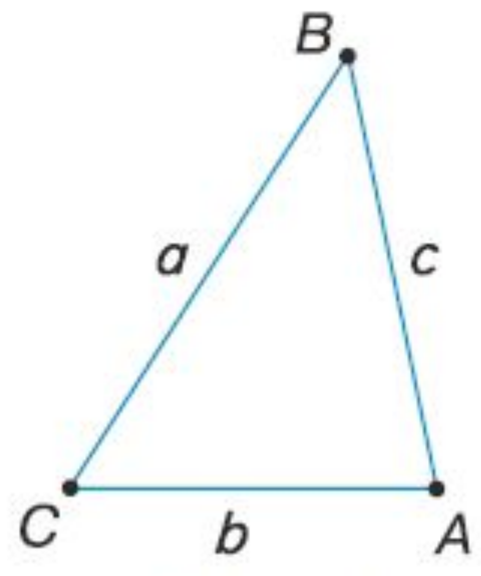
Трикутники

У будь-якому трикутнику ABC (мал. 4):

1) $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (теорема про суму кутів трикутника);

2) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ (теорема косинусів);

3) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ (теорема синусів), де R – радіус описаного кола.



Мал. 4

Співвідношення сторін і кутів у прямокутному трикутнику

$$\cos\alpha = \frac{прилеглий\_катет}{гіпотенуза}$$

$$\sin\alpha = \frac{протилежний\_катет}{гіпотенуза}$$

$$tg\alpha = \frac{протилежний\_катет}{прилеглий\_катет}$$

$$ctg\alpha = \frac{прилеглий\_катет}{протилежний\_катет}$$

Запам'ятай!

Катет

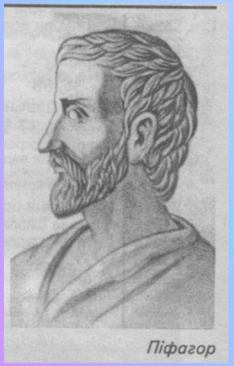
Проти- лежний куту α	=	гіпотенуза · sin α
	=	другий катет · tg α
Прилеглий до кута α	=	гіпотенуза · cos α
	=	другий катет · ctg α

Запам'ятай!

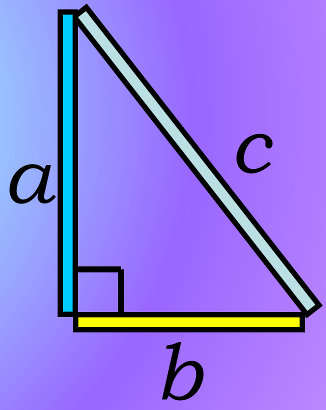
Гіпотенуза $= \dfrac{катет, протилежний\_куту \alpha}{\sin\alpha}$

$= \dfrac{катет, прилеглий\_до\_кута \alpha}{\cos\alpha}$

Теорема Піфагора



У *прямокутному трикутнику* сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи



$$a^2+b^2=c^2$$

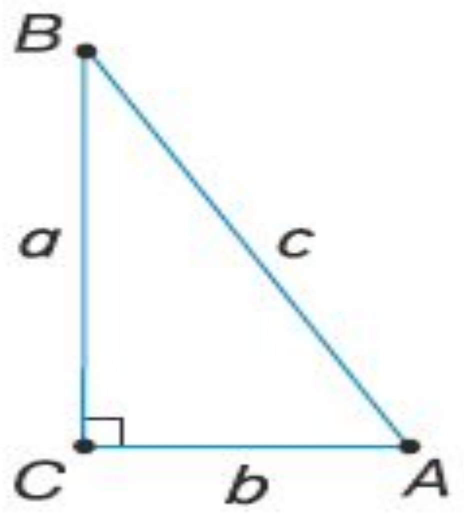
Трикутники

У прямокутному трикутнику ABC (мал. 5):

1) $\angle A + \angle B = 90^\circ$;

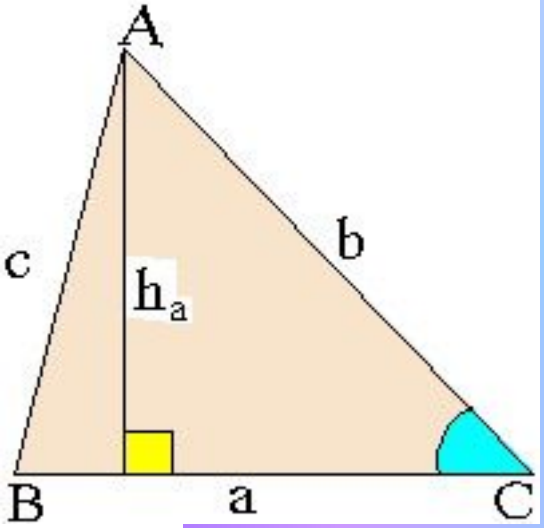
2) $c^2 = a^2 + b^2$ (теорема Піфагора);

3) $a = c \sin A = c \cos B = b \operatorname{tg} A$.



Мал. 5

Трикутник



Периметр трикутника дорівнює сумі довжин його сторін.

Площу трикутника можна обчислити за формулами:

1) $S = \frac{1}{2} a h_a$, де h_a – висота, проведена до сторони a;

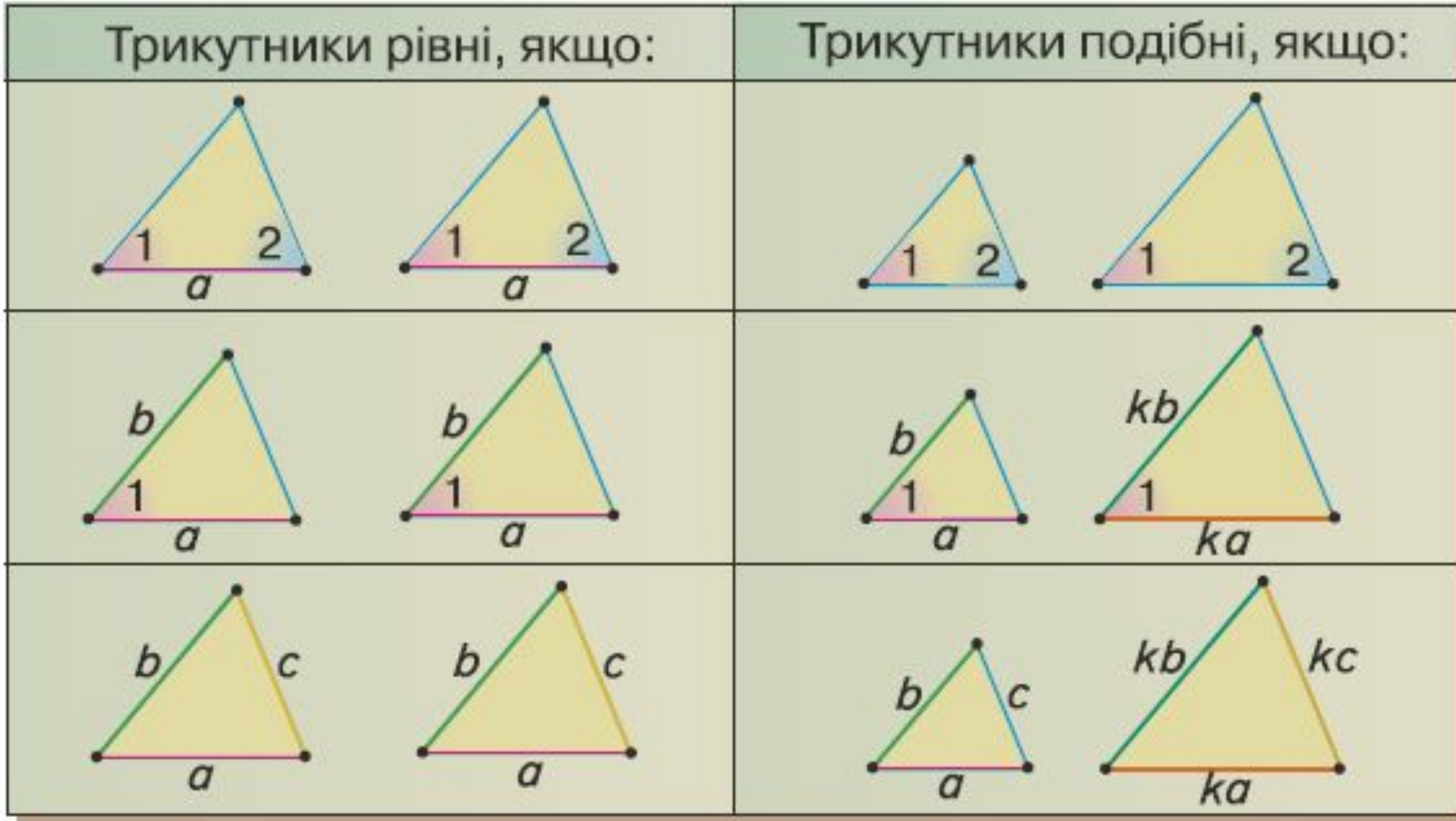
2) $S = \frac{1}{2} bc \sin A$;

3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де p – півпериметр (формула Герона);

4) $S = pr$, де p – півпериметр, r – радіус вписаного кола;

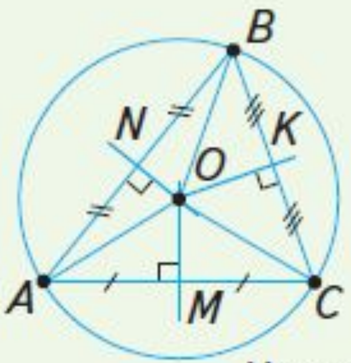
5) $S = \frac{abc}{4R}$, де R – радіус описаного кола.

Ознаки рівності й ознаки подібності трикутників



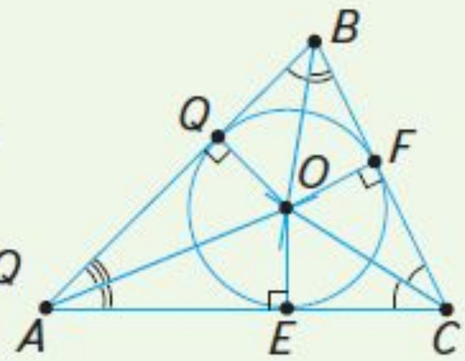
Означення вписаних і описаних трикутників та їх властивості

КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА	КОЛО, ВПИСАНЕ У ТРИКУТНИК



Центр O кола – точка перетину

серединних перпендикулярів	*бісектрис кутів*
$R = OA = OB = OC$	$r = OE = OF = OQ$



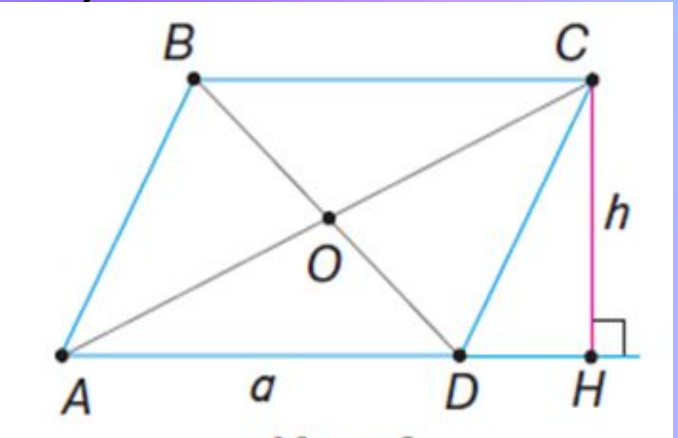
$\dfrac{\text{Навколо будь-якого трикутника}}{\text{У будь-який трикутник}}$ можна $\dfrac{\text{описати}}{\text{вписати}}$ коло і до того ж тільки одне

Довжину кола і площу круга можна обчислити за формулами:

$C = 2\pi R = \pi D$, $S = \pi R^2 = \dfrac{\pi D^2}{4}$, де R – радіус кола, D – його діаметр.

Паралелограм

Паралелограм *ABCD* (*мал. 6*):



Мал. 6

1) $AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$;
2) $AD = BC$, $AB = DC$;
3) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$;
4) $AO = OC$, $BO = OD$;
5) $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle A + \angle D = 180°$.

Площа паралелограма: $S = ah$.

Прямокутник

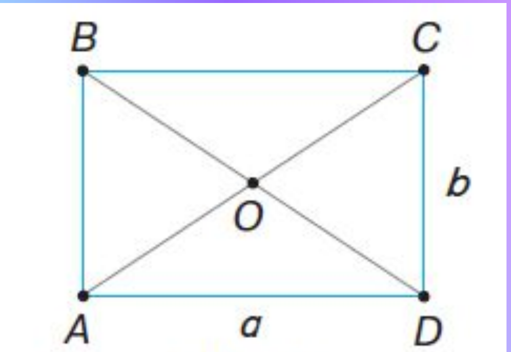
Прямокутник *ABCD (мал. 7):*

1) усі властивості паралелограма;

2) $<A = <B = <C = <D = 90^\circ$;

3) $AC = BD$.

Площа прямокутника: $S = ab$.



Мал. 7

Ромб

Ромб $ABCD$ (мал. 8):

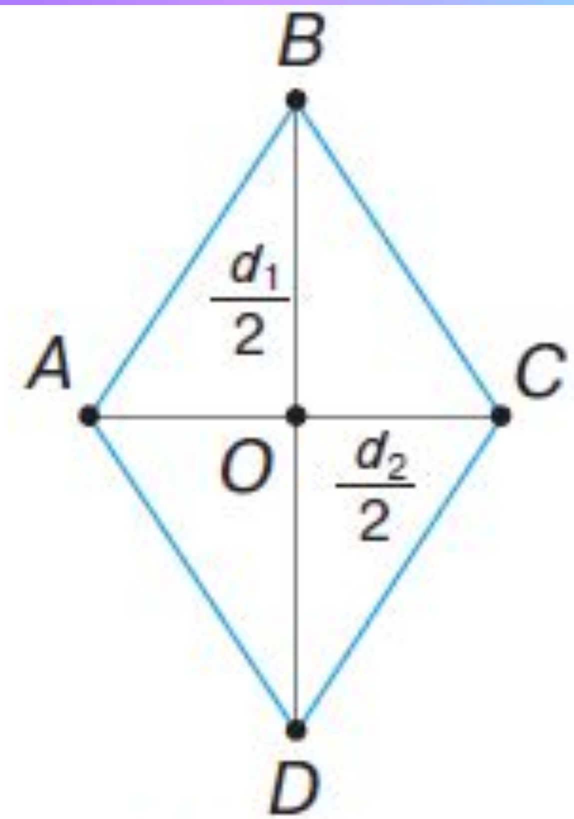
1) усі властивості паралелограма;

2) $AB = BC = CD = DA$;

3) $AC \perp BD$;

4) $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle BAC = \angle DAC$.

Площа ромба: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

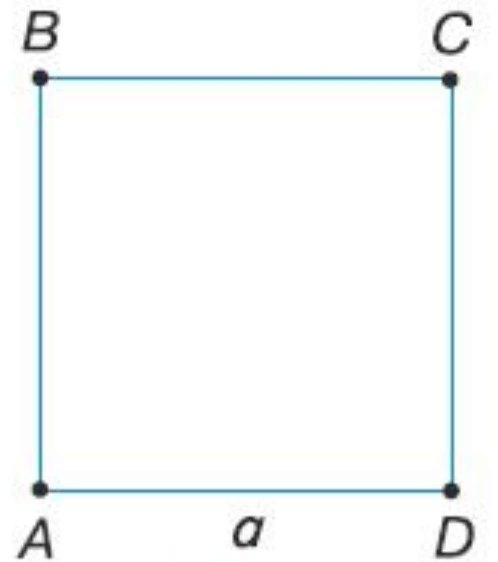


Мал. 8

Квадрат

Квадрат *ABCD (мал. 9): усі властивості* паралелограма, прямокутника, ромба.

Площа квадрата: $S = a^2$.



Мал. 9

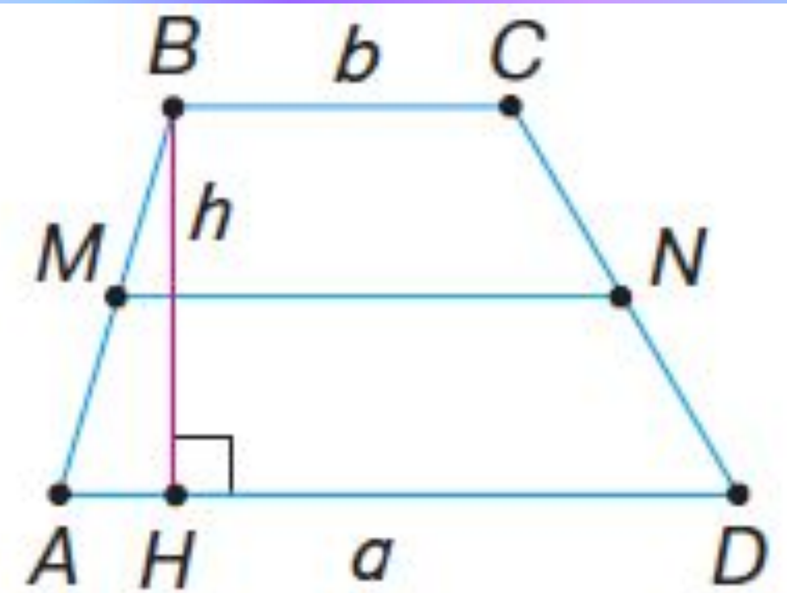
Трапеція

Трапеція $ABCD$ (мал. 10):

1) $AD \parallel BC$;

2) $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \dfrac{AD + BC}{2}$,
де MN – середня лінія.

Площа трапеції: $S = \dfrac{(a + b)h}{2}$.



Мал. 10

Правильні многокутники

1) $AB = BC = ... = AF$ і $\angle A = \angle B = ... = \angle F$;

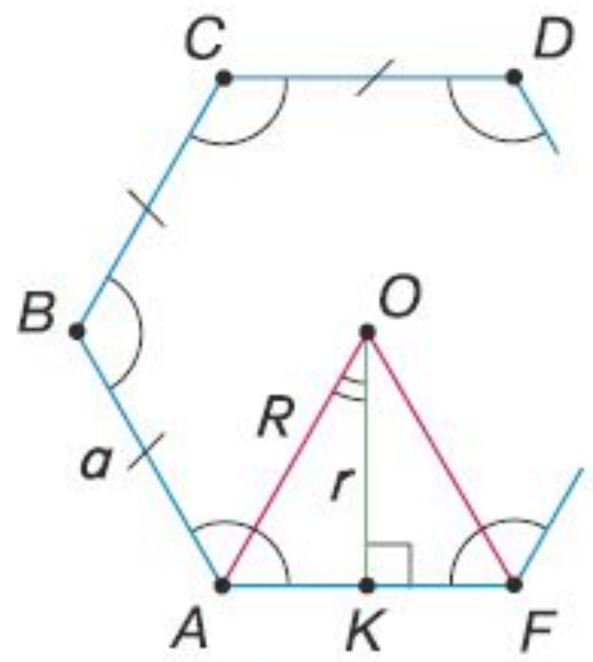
2) точка O є центром описаного кола і вписаного кола;

3) $\angle AOF = \dfrac{360^\circ}{n}$;

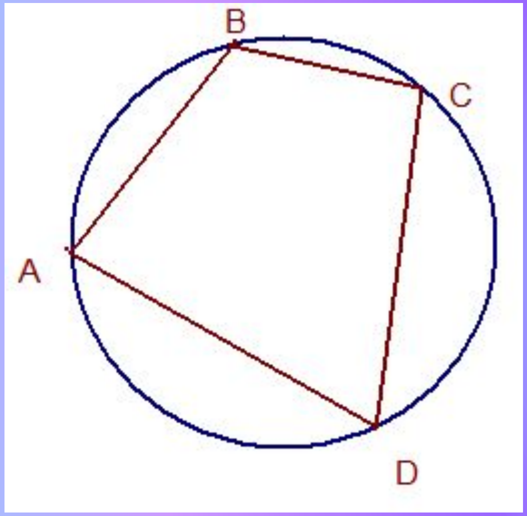
4) $\angle A + \angle B + ... + \angle F = 180^\circ (n - 2)$;

5) $r = \dfrac{AK}{\mathrm{tg}\angle AOK} = \dfrac{a}{2\mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$;

6) $R = \dfrac{AK}{\sin\angle AOK} = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$.



Мал. 12

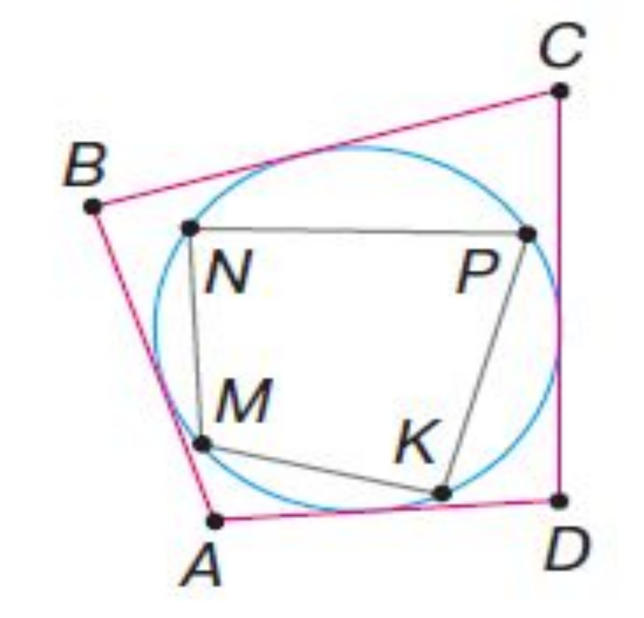


Чотирикутник, **всі вершини якого лежать на колі, називається *вписаним* у це коло, а *коло описаним* навколо даного чотирикутника.**

Властивості вписаних і описаних чотирикутників

1) у вписаному чотирикутнику *MNKP* (мал. 11): < *M* + < *P* = *180°*, < *N* + < *K* = *180°;*

2) в описаному чотирикутнику *ABCD* (мал. 11): *AB* + *CD* = *AD* + *BC.*

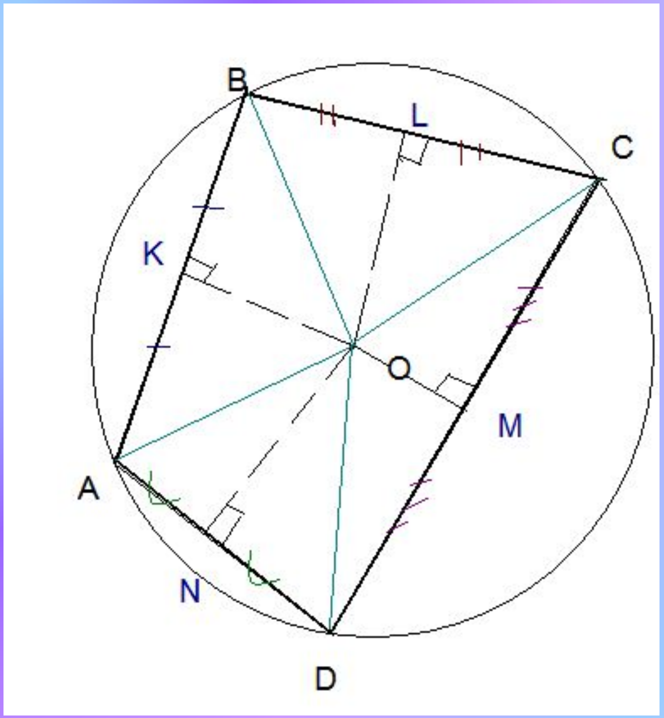


Мал. 11

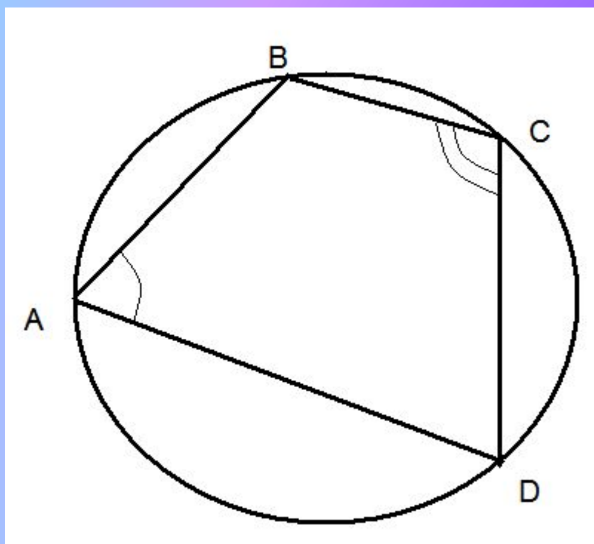
Де знаходиться центр кола, описаного навколо чотирикутника?

Центр описаного кола – це точка , рівновіддалена від вершин чотирикутника.

Тому вона є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін, якщо ця точка існує .



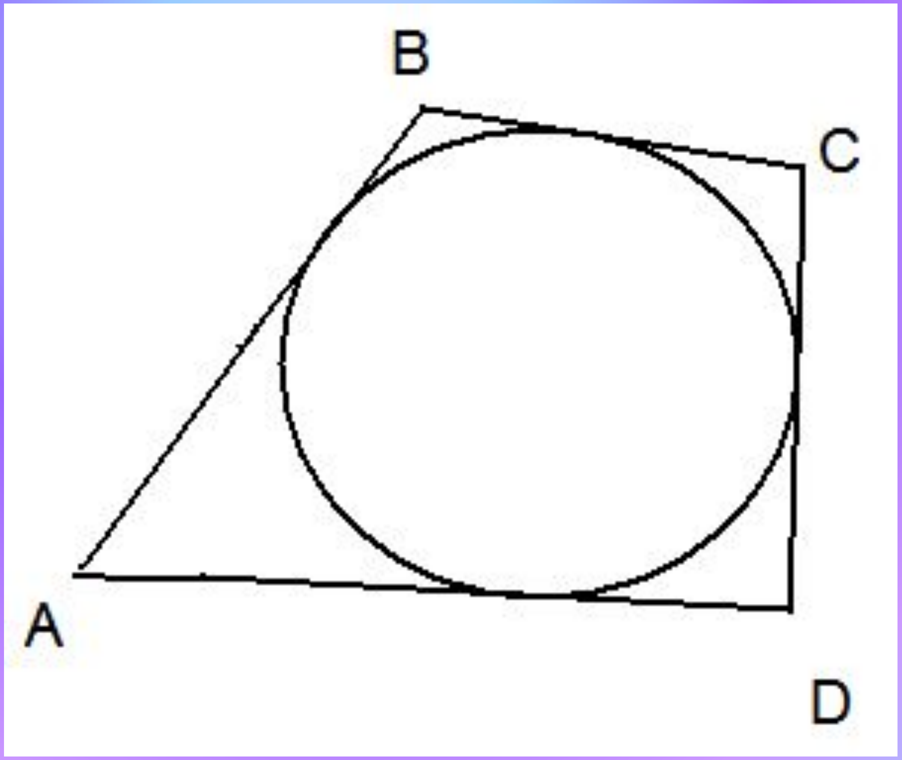
Теорема: **навколо чотирикутника можна описати коло , якщо суми протилежних кутів цього чотирикутника рівні 180^0.**



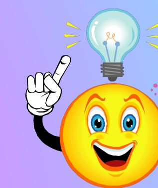
Кути <A і <B вписані і спираються на дуги, що доповнюють одна одну до повного кола. За теоремою про вписані кути

$$\angle \grave{A} + \angle C = \frac{1}{2}(\cup \hat{A}\grave{A}D + \cup BCD) = \frac{360^0}{2} = 180^0$$

Чотирикутник, всі сторони якого дотикаються до кола, називається **описаним** навколо цього кола, а коло називається вписаним в чотирикутник.

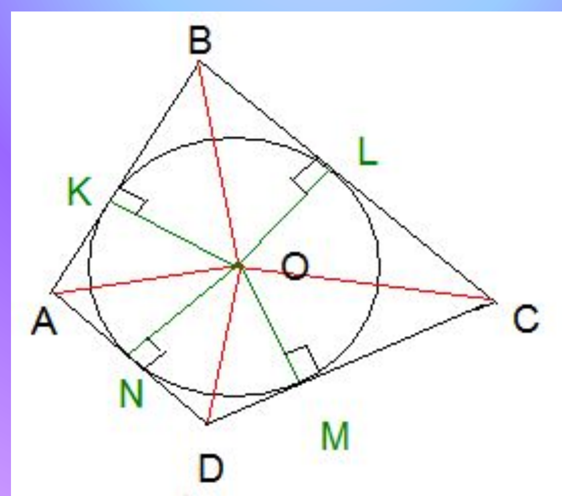


Де знаходиться центр кола, вписаного в чотирикутник?

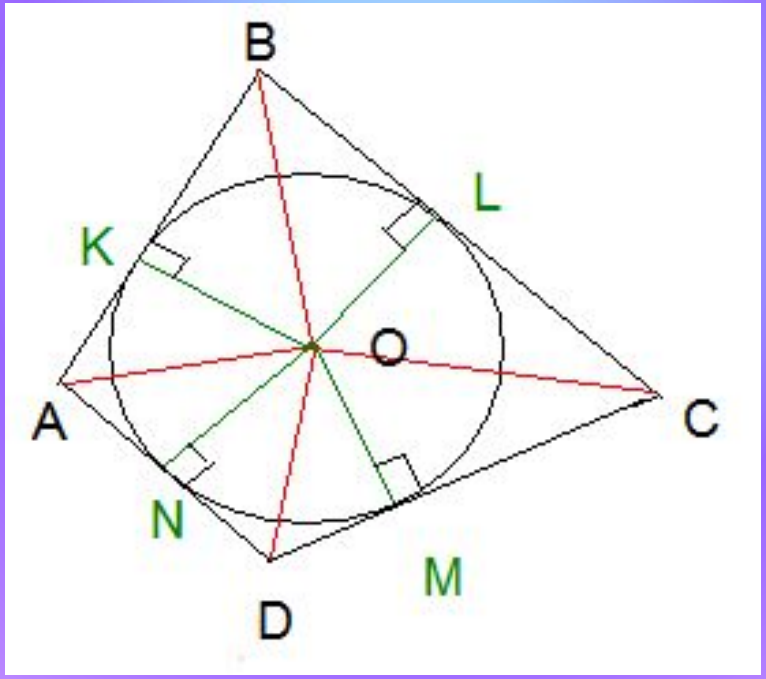


Центр кола , вписаного в чотирикутник , це точка рівновіддалена від сторін чотирикутника.

Тому вона є точкою перетину бісектрис внутрішніх кутів чотирикутника (якщо для многокутника ця точка існує).



Теорема: В чотирикутник можна вписати коло, якщо суми протилежних сторін рівні. AB+CD=AD+BC.

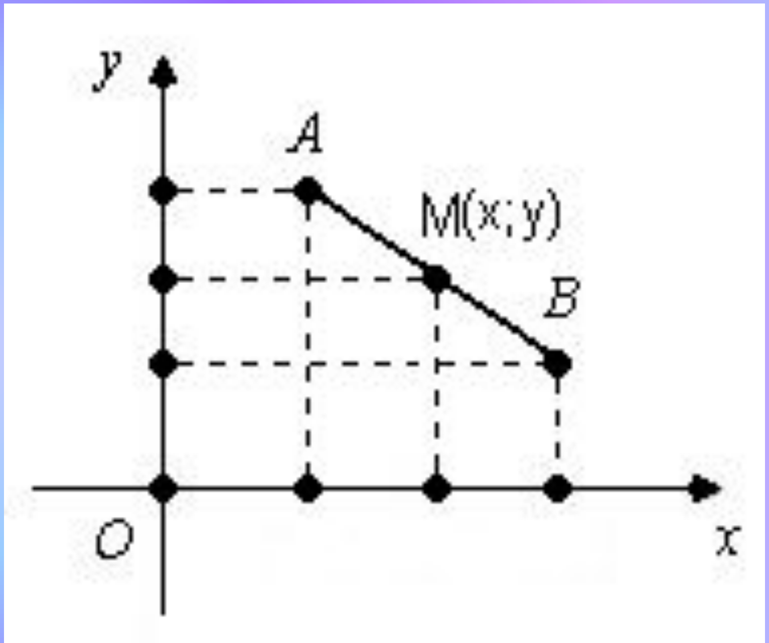


Відрізок на координатній площині

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

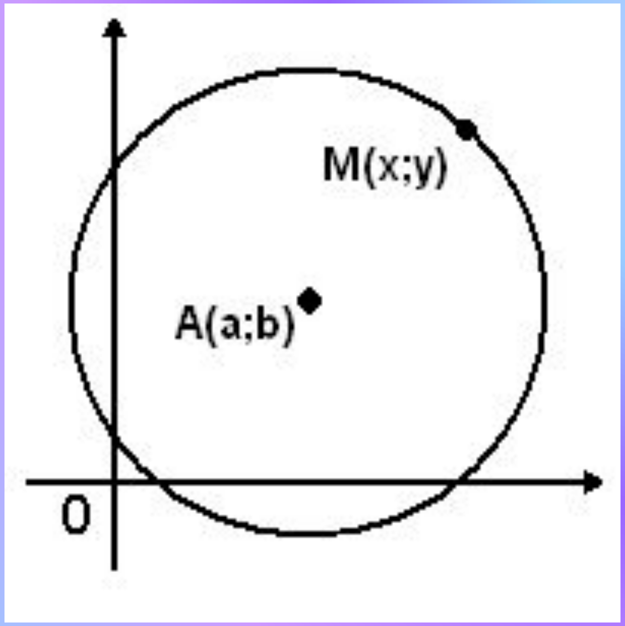


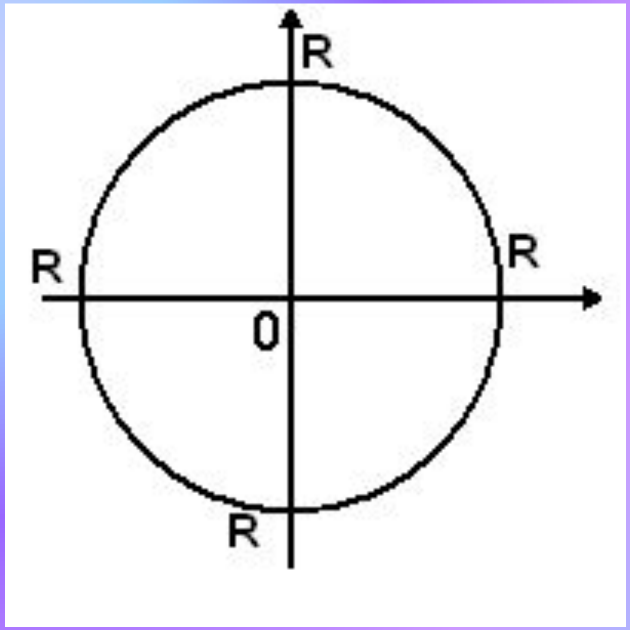
M(x ; y)

M– середина **AB**

Рівняння кола

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, де $R > 0$, є рівнянням кола з центром в точці **A (a ; b)** и радіусом **R = MA**

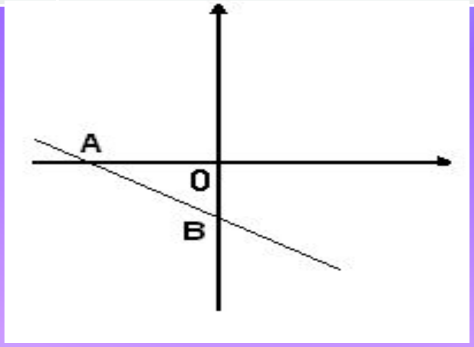




Рівняння прямої

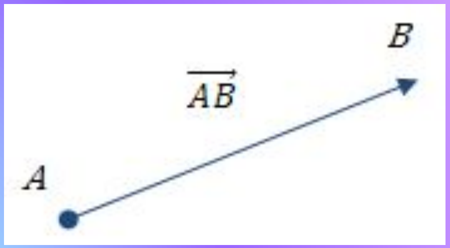
ax + by = c, де **a** **b** і **c** - деякі числа (**a** і **b** не дорівнюють нулю одночасно)

Рівняння	Значення a,b,c	Графік
ax + by = c	b≠0, a і c будь-які	Невертикальна пряма
ax + by = c	b=0, a≠0, c-будь-яке	Вертикальна пряма
ax + by = c	b = a = c = 0	Вся координатна площина
ax + by = c	a = b = 0, c ≠ 0	—

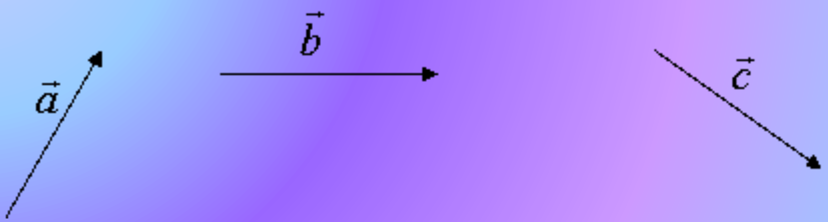


ВЕКТОР. ПОЗНАЧЕННЯ ВЕКТОРА

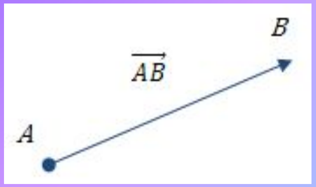
- **Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, в якому виділено початок і кінець**



- **Вектори позначають так: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$**



- **Або за початком і кінцем: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$.**



Щоб знайти координати вектора

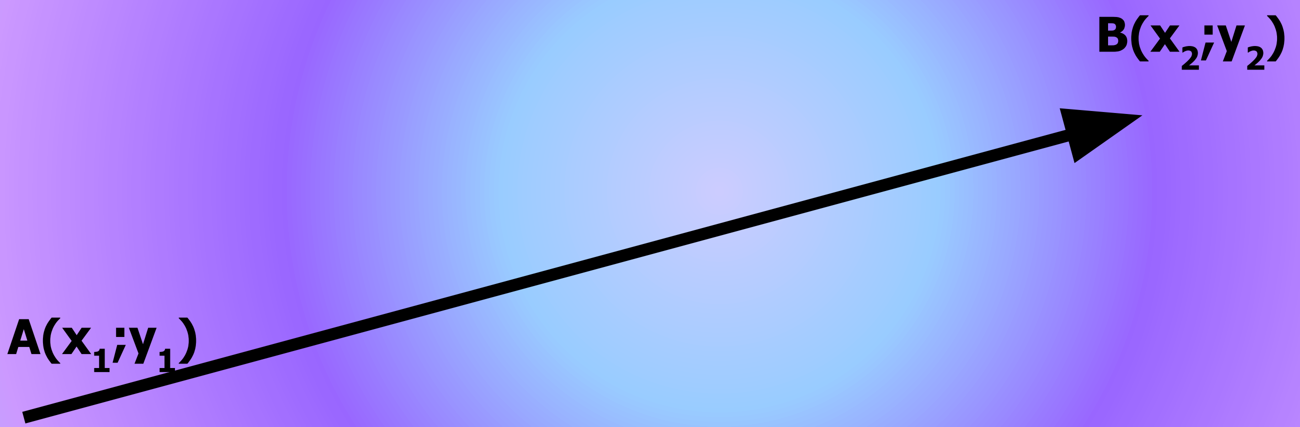
потрібно від координат кінця вектора
відняти координати початку

$\bar{a}(a_1;a_2)$

$a_1=x_2-x_1$

$a_2=y_2-y_1$

Абсолютна величина вектора обчислюється за формулою



$$|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

ДІЇ З ВЕКТОРАМИ

- Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ з координатами a_1, a_2 і b_1, b_2 називається вектор $\vec{c}$ з координатами $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, тобто

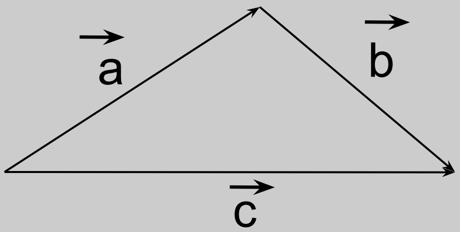
$$\vec{a}(a_1, a_2) + \vec{b}(b_1, b_2) =$$
$$= \vec{c}(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)$$

- Закони додавання

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$



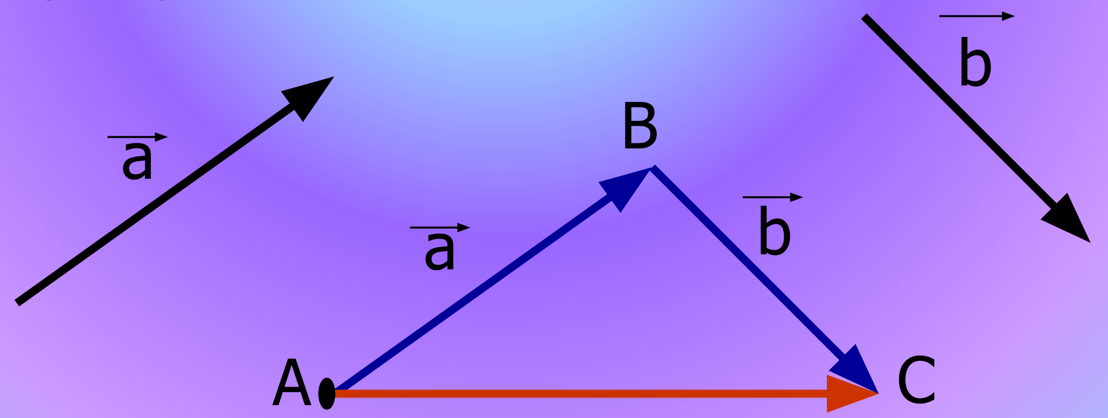
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Сума двох векторів

Правило трикутника

Нехай $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ – два вектори. Позначимо довільну точку А і відкладемо від неї $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, потім від точки В відкладемо вектор $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$



Закони додавання векторів

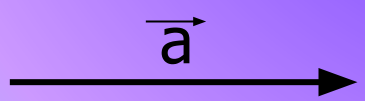
1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переставний закон)

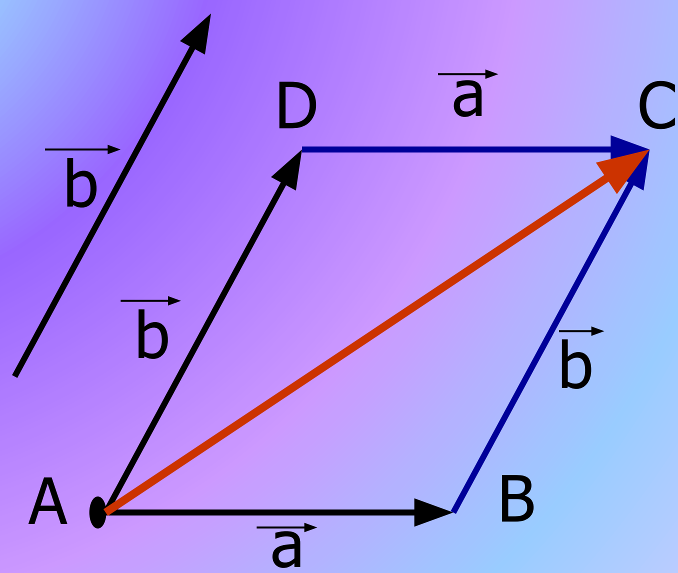
Правило паралелограма

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – два вектори. Позначимо довільну точку A і відкладемо від неї $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, потім вектор $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. На цих векторах побудуємо паралелограм ABCD.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b}+\vec{a}$





2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
(сполучний закон)

МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО.

Добутком вектора $\vec{(a_1;a_2)}$ на число λ називається вектор $(\lambda a_1; \lambda a_2)$, тобто

$$\overrightarrow{(a_1;a_2)}\,\lambda = \overrightarrow{(\lambda a_1; \lambda a_2)}$$

Закони множення вектора на число

Для будь – якого вектора $\vec{a}$ та чисел λ, μ

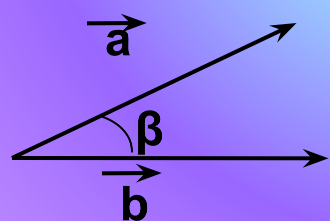
$$(\lambda + \mu)\,\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$

Для будь – яких двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та числа λ

$$\lambda\,(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\,\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Скалярним добутком векторів $\overrightarrow{a(a_1;a_2)}$ і $\overrightarrow{b(b_1;b_2)}$ називається число $a_1b_1+a_2b_2$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$\perp$

Список використаних джерел

ЛІТЕРАТУРА

- Апостолова Г.В. Геометрія: 9: дворівн. підруч. для загальноосвіт. навч.закл. – К.: Генеза, 2009.
- Апостолова Г.В. Геометрія 7 кл. : підруч. для загальноосвітніх навч.закл. – К.: Генеза, 2008.
- Апостолова Г.В. Геометрія 8 кл. : підруч. для загальноосвіт навч.закл. – К.: Генеза, 2008.
- Роєва Т.Г., Синельник Л.Я., Кононенко С.А. Геометрія у таблицях 7-9 класи: Навч. посібник. – 2-ге вид., випр. і допов. –Х.: Видавнича група "Академія", 2001. – 128 с.

ІНТЕРНЕТ-РЕСУРСИ

http://www.dgeometry.ru/links.html

http://pcmath.ru/?parent=16&page=16