Решение дифференциальных уравнений в частных производных

Классификация дифференциальных уравнений

В зависимости от числа независимых переменных и, следовательно, типа входящих в них производных:

- **обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие одну независимую переменную и производные по ней;**
- **дифференциальные уравнения в частных производных, содержащие несколько независимых переменных и производные по ним.**

Численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных

- метод конечных разностей (МКР);
- метод крупных частиц (метод Давыдова);
- метод конечных элементов (МКЭ).

Классификация дифференциальных уравнений в частных производных

В зависимости от математической природы ДУ:

- **эллиптические;**
- **параболические;**
- **гиперболические.**

В зависимости от физического смысла решаемых с их помощью задач:

- **уравнение диффузии;**
- **уравнение теплопроводности;**
- **волновое уравнение.**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Классификация дифференциальных уравнений в частных производных

С математической точки зрения дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных с двумя независимыми переменными

$$A(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + E\left(x,y,f,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

классифицируются в зависимости от характера функций *A*, *B* и *C*.

- $B^2 - 4AC < 0$ **– эллиптическое уравнение;**
- $B^2 - 4AC = 0$ **– параболическое уравнение;**
- $B^2 - 4AC > 0$ **– гиперболическое уравнение.**

Примеры дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

уравнение Лапласа

эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

уравнение теплопроводности

параболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

одномерное волновое уравнение

гиперболическое уравнение

Примеры дифференциальных уравнений в частных производных

уравнение Гельмгольца (Блохинцева)

$$(1 - M^2)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - 2ikM\frac{\partial p}{\partial x} + k^2 p = 0 \qquad k = \frac{\omega}{a}$$

- $M < 1$ **– эллиптическое уравнение;**

Звуковые поля в среде, движущейся с дозвуковой скоростью.

- $M = 1$ **– параболическое уравнение;**
- $M > 1$ **– гиперболическое уравнение.**

Решения таких уравнений рассматриваются в газодинамике больших скоростей, когда в поле течения появляются скачки уплотнения и ударные волны, в частности, при исследовании распространения звукового удара от сверхзвукового самолета.

Дифференциальные уравнений в частных производных

Дополнительные условия для дифференциальных уравнений в частных производных:

- **граничные условия;**
- **начальные условия;**
- **комбинация граничных и начальных условий.**

Эллиптические уравнения описывают установившиеся (стационарные) процессы.
Задача ставится в замкнутой области, и в каждой точке границы этой области задаются граничные условия.
Параболическими и гиперболическими уравнениями описываются эволюционные процессы (процессы «распространения»).
В таких задачах на одной части границы ставятся начальные условия, на другой – граничные; возможны также открытые области, в которые «распространяется решение».

Задача 1. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток

Найти непрерывную функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую внутри прямоугольной области $\mathbf{D} = \{(x, y)\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$, уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Граничные условия

$$u(0, y) = f_1(y),\ \ u(a, y) = f_2(y), \quad y \in [0, b]$$

$$u(x, 0) = f_3(x),\ \ u(x, b) = f_4(x), \quad x \in [0, a]$$

Условие непрерывности функции $u(x, y)$ на границе области D

$$f_1(0) = f_3(0),\ \ f_1(b) = f_4(0),$$

$$f_2(0) = f_3(a),\ \ f_2(b) = f_4(a).$$

Задача 1. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток

Построение сетки

шаг сетки $\Delta x, \Delta y$

координаты узлов сетки

$$x_i = i\Delta x, i = 0,1, \dots, n, \quad y_i = i\Delta y, \ j = 0,1, \dots, m,$$

$$x_n = n\Delta x = a, y_m = m\Delta y = b.$$

значение функции

$$u_{i,j} = u(x_i, y_j)$$

Задача 1. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток

Аппроксимация частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2)$$

Конечно-разностное уравнение Лапласа

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

$$i = 1, \dots, n-1; \; j = 1, \dots, m-1.$$

Найти ошибку в записи к/р уравнения Лапласа

Задача 1. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток

Система линейных алгебраических уравнений $\Delta x = \Delta y$

$$u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{4}$$

$$u_{i,0} = f_3(x_i), \quad u_{i,m} = f_4(x_i),$$

$$u_{0,j} = f_1(y_i), \quad u_{n,j} = f_2(y_i)$$

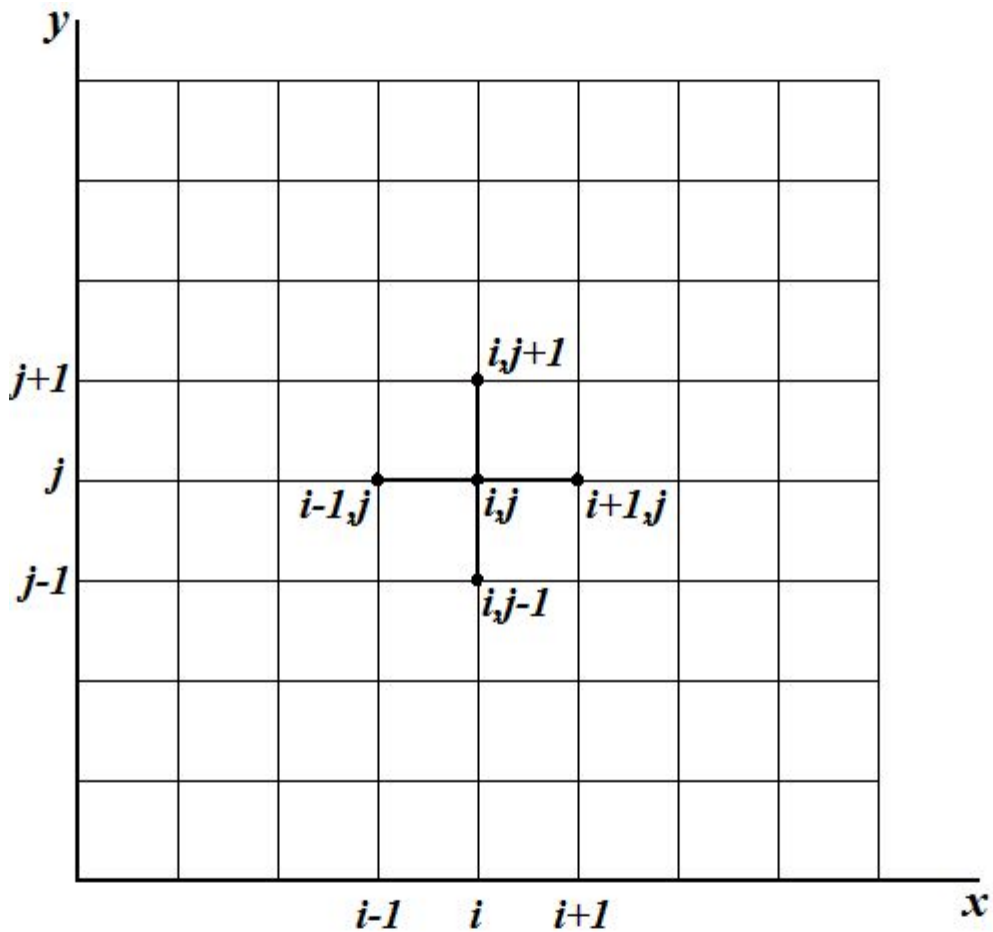
$$i = 1, \dots, n-1; \; j = 1, \dots, m-1.$$

Численное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольной области состоит в нахождении приближенных значений $u_{i,j}$ искомой функции $u(x,y)$ во внутренних узлах сетки.

Набор узлов, используемых для аппроксимации уравнения в точке, называется шаблоном.

Задача 1. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток

$$u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{4}$$



Шаблон типа «крест»

Задача 1. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток

Итерационный метод Гаусса-Зейделя

$$u_{i,j}^{(s+1)} = \frac{u_{i-1,j}^{(s+1)} + u_{i+1,j}^{(s)} + u_{i,j+1}^{(s)} + u_{i,j-1}^{(s+1)}}{4}$$

Условие окончания итерационного процесса

$$\max_{i,j} \left| u_{i,j}^{(s+1)} - u_{i,j}^{(s)} \right| \le \varepsilon,$$

$$1 \le i \le n-1, \quad 1 \le j \le m-1.$$

Итерационный процесс сходится медленно

Более надежный критерий

$$\max_{i,j} \left| u_{i,j}^{(s+1)} - u_{i,j}^{(s)} \right| \le \varepsilon(1-\alpha) \quad \alpha = \frac{\max\limits_{i,j} \left| u_{i,j}^{(s+1)} - u_{i,j}^{(s)} \right|}{\max\limits_{i,j} \left| u_{i,j}^{(s)} - u_{i,j}^{(s-1)} \right|}$$

Задача 1. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток

Погрешность приближенного решения:

- **погрешность аппроксимации дифференциального уравнения разностным уравнением;**
- **погрешность, возникающая в результате приближенного решения системы разностных уравнений.**

Свойство используемой разностной схемы:

- **свойство устойчивости;**
- **свойство сходимости.**

Устойчивость схемы означает, что малые изменения в начальных данных приводят к малым изменениям решения разностной задачи.

Сходимость схемы означает, что при стремлении шага сетки к нулю решение разностной задачи стремится к решению исходной задачи.

Задача 1. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток

Алгоритм решения задачи

1. Задание шага

2. Задание граничных условий

3. Задание начального приближения

$$u_{i,j}^{(0)} = 1 \qquad i = 1, \dots, n-1; \; j = 1, \dots, m-1.$$

4. Уточнение решения

$$u_{i,j}^{(s+1)} = \frac{u_{i-1,j}^{(s+1)} + u_{i+1,j}^{(s)} + u_{i,j+1}^{(s)} + u_{i,j-1}^{(s+1)}}{4} \qquad i = 1, \dots, n-1; \; j = 1, \dots, m-1.$$

5. Проверка условия окончания итерационного процесса

$$\max_{i,j} \left| u_{i,j}^{(s+1)} - u_{i,j}^{(s)} \right| \le \varepsilon (1 - \alpha) \qquad \alpha = \frac{\max_{i,j} \left| u_{i,j}^{(s+1)} - u_{i,j}^{(s)} \right|}{\max_{i,j} \left| u_{i,j}^{(s)} - u_{i,j}^{(s-1)} \right|}$$

Решение задачи Дирихле в Mathcad

$$
\mathrm{Lapl}(a,b,n,m,\varepsilon,f1,f2,f3,f4) :=
\begin{array}{|l}
hx \leftarrow \dfrac{a}{n} \\
hy \leftarrow \dfrac{b}{m} \\
\text{for } j \in 0..m \\
\quad \begin{array}{|l}
y \leftarrow hy \cdot j \\
u_{0,j} \leftarrow f1(y) \\
u_{n,j} \leftarrow f2(y)
\end{array} \\
\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\text{for } i \in 1..n-1 \\
\quad \text{for } j \in 1..m-1 \\
\quad\quad u_{i,j} \leftarrow 1
\end{array}
$$

Решение задачи Дирихле в Mathcad

$$
\begin{array}{l}
nu \leftarrow 0 \\
r2 \leftarrow 10 \\
\text{while } r2 > nu \\
\quad r1 \leftarrow r2 \\
\quad r2 \leftarrow 0 \\
\quad \text{for } i \in 1..n-1 \\
\quad\quad \text{for } j \in 1..m-1 \\
\quad\quad\quad x \leftarrow 0.25\cdot\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right) \\
\quad\quad\quad r \leftarrow \left|x - u_{i,j}\right| \\
\quad\quad\quad r2 \leftarrow r \ \text{ if } r > r2 \\
\quad\quad\quad u_{i,j} \leftarrow x \\
\quad nu \leftarrow \varepsilon\cdot\left(1 - \dfrac{r2}{r1}\right) \\
u
\end{array}
$$

Решение задачи Дирихле в Mathcad

$a := 1 \qquad b := 1$

$n := 10 \qquad m := 10 \qquad \varepsilon := 10^{-4}$

$f1(y) := 0 \qquad f2(y) := y$

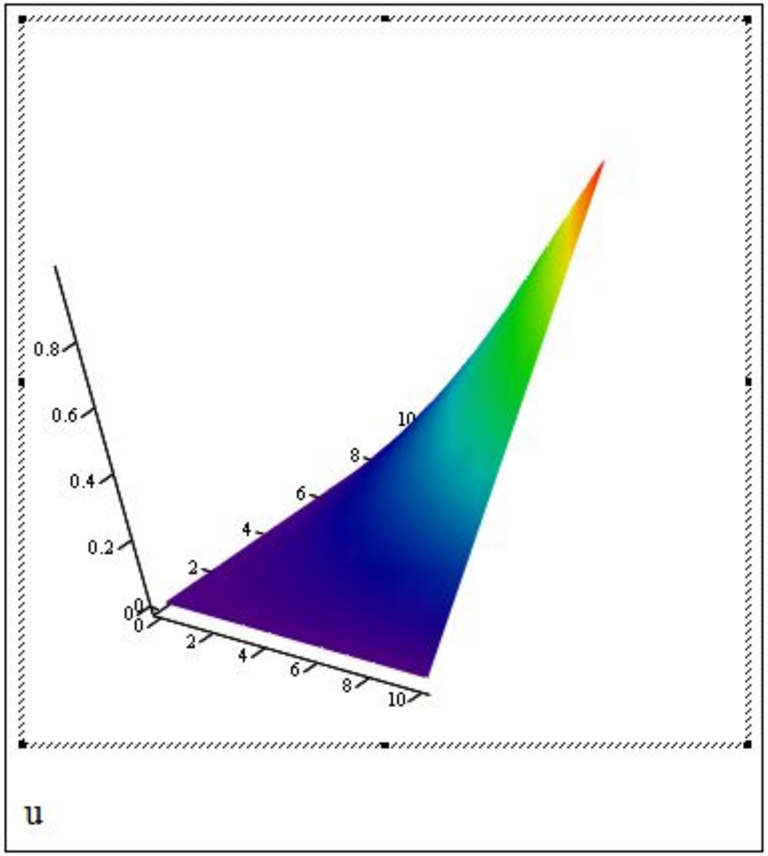
$f3(x) := 0 \qquad f4(x) := x$

$u := Lapl(a, b, n, m, \varepsilon, f1, f2, f3, f4)$

u =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
2	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18	0.2
3	0	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18	0.21	0.24	0.27	0.3
4	0	0.04	0.08	0.12	0.16	0.2	0.24	0.28	0.32	0.36	0.4
5	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
6	0	0.06	0.12	0.18	0.24	0.3	0.36	0.42	0.48	0.54	0.6
7	0	0.07	0.14	0.21	0.28	0.35	0.42	0.49	0.56	0.63	0.7
8	0	0.08	0.16	0.24	0.32	0.4	0.48	0.56	0.64	0.72	0.8
9	0	0.09	0.18	0.27	0.36	0.45	0.54	0.63	0.72	0.81	0.9
10	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1

Решение задачи Дирихле в Mathcad



Задача 2. Решение уравнения гиперболического типа методом сеток

Найти непрерывную функцию $u(x,t)$**,**
удовлетворяющую внутри прямоугольной области
$\mathbf{D} = \{(x,t)\ 0 \le x \le a,\ 0 \le t \le \mathrm{T}\}$**, уравнению**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

начальные условия

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \qquad 0 \le x \le a$$

граничные условия

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(a,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le \mathrm{t} \le \mathrm{T}.$$

Замена переменной $\quad t \to t/c \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Задача 2. Решение уравнения гиперболического типа методом сеток

Построение сетки

h **– шаг сетки в направлении** ***x*****;**

τ **– шаг сетки в направлении** ***t*****.**

координаты узлов сетки

$$x_i = ih, i = 0,1,\dots,n, h = a/n;$$

$$t_j = j\tau, j = 0,1,\dots,m, \tau = T/m.$$

$$x_n = nh = a; \; t_m = m\tau = T$$

значение функции

$$u_{i,j} = u(x_i, t_j)$$

Задача 2. Решение уравнения гиперболического типа методом сеток

Конечно-разностный вид уравнения

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2};$$

$$\lambda = \tau / h;$$

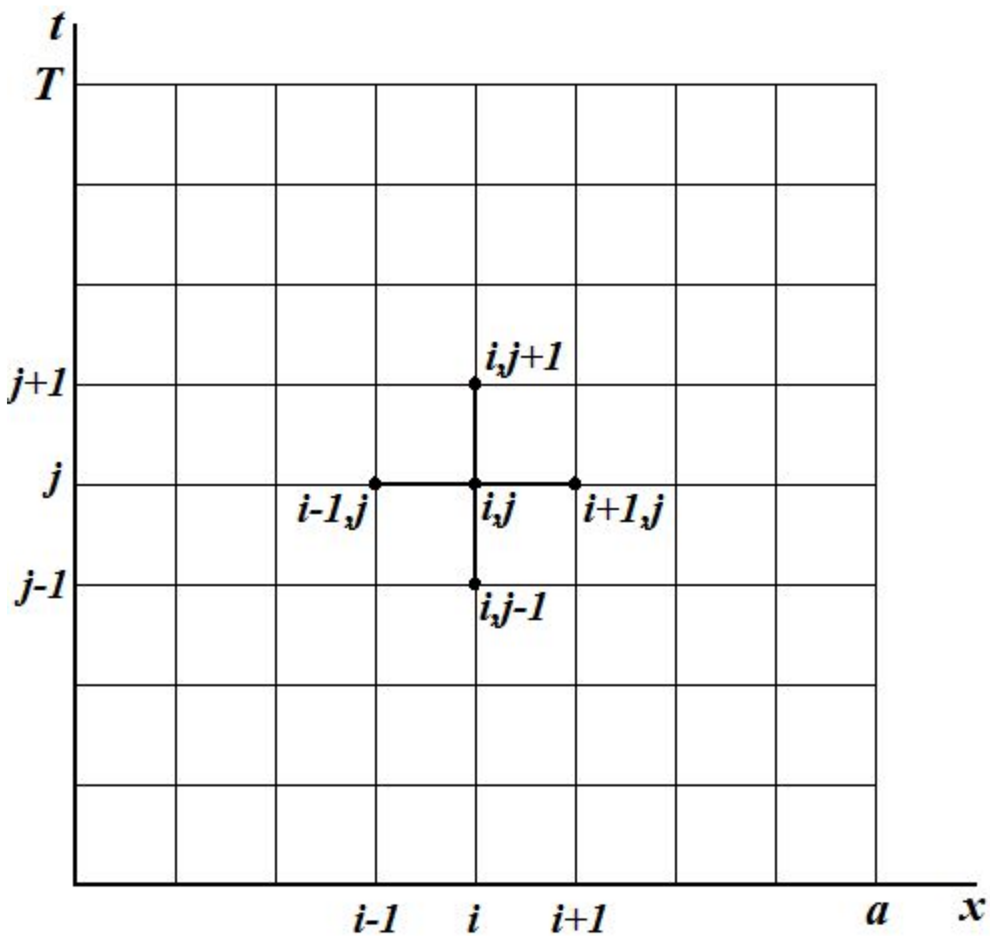
$$u_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2\left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right) - u_{i,j-1};$$

$$i = 1, \dots, n-1; \;\; j = 1, \dots, m-1.$$

Схема называется трехслойной потому, что связывает между собой значения u_{ij} функции $u(x,t)$ в трех временных слоях с номерами $j-1, j, j+1$.

Схема явная, т.е. позволяет в явном виде выразить u_{ij} через значения u предыдущих двух слоев.

Задача 2. Решение уравнения гиперболического типа методом сеток



Шаблон типа «крест»

Задача 2. Решение уравнения гиперболического типа методом сеток

Алгоритм решения основан на том, что решение на каждом следующем слое ($j = 2, 3,4, \dots, m$) можно получить пересчетом решений с двух предыдущих слоев ($j = 0,1,2, \dots, m-1$)

На нулевом временном слое ($j = 0$) решение известно из начального условия $u_{i0} = f(x_i)$.

Вычисление решения на первом слое ($j = 1$)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \approx \frac{u(x,\tau) - u(x,0)}{\tau},$$

$$u_{i1} = u_{i0} + \tau g(x_i), i = 1,2, \dots, n.$$

Задача 2. Решение уравнения гиперболического типа методом сеток

Условие устойчивости схемы – $\tau < h$
(условие Куранта).

Условие Куранта означает, что малые погрешности, возникающие, например, при вычислении решения на первом слое, не будут неограниченно возрастать при переходе к каждому новому временному слою.

При выполнении условия Куранта схема обладает равномерной сходимостью, т.е. при $h \to 0$ решение разностной задачи равномерно стремится к решению исходной задачи.

Задача 2. Решение уравнения гиперболического типа методом сеток

Алгоритм решения задачи

1. Задание шага сетки $h, \tau\ (\tau < h)$

2. Вычисление решения на нулевом временном слое

$$u_{i0} = f(x_i); \quad i = 0, \dots, n.$$

3. Вычисление решения на первом временном слое

$$u_{i1} = u_{i0} + \tau g(x_i); \ i = 1,2, \dots, n-1.$$

$u_{0,1}$; $u_{n,1}$ **вычисляются из граничных условий.**

4. Вычисление решения на каждом следующем слое

$$u_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2\left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right) - u_{i,j-1};$$
$$i = 1, \dots, n-1; \ j = 1, \dots, m-1.$$

$u_{0,j+1}$; $u_{n,j+1}$ **вычисляются из граничных условий.**

Решение уравнения гиперболического типа в Mathcad

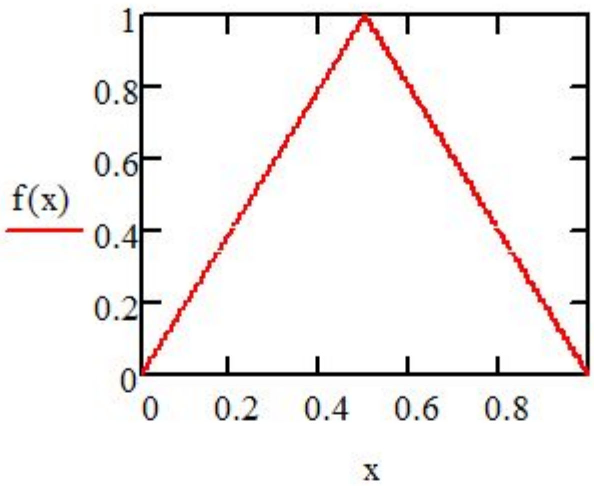
$$
\mathrm{Gip3}(L,T,n,m,f,g) := \left|
\begin{array}{l}
h \leftarrow \dfrac{L}{n} \\
\tau \leftarrow \dfrac{T}{m} \\
\lambda \leftarrow \left(\dfrac{\tau}{h}\right)^2 \\
\alpha \leftarrow 2\cdot(1-\lambda) \\
\text{for } i \in 0..n \\
\quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow i\cdot h \\ u_{0,i} \leftarrow f(x) \\ u_{1,i} \leftarrow u_{0,i} + \tau\cdot g(x) \end{array} \right. \\
\text{for } j \in 0..m \\
\quad \left| \begin{array}{l} u_{j,0} \leftarrow 0 \\ u_{j,n} \leftarrow 0 \end{array} \right.
\end{array}
\right.
$$

Решение уравнения гиперболического типа в Mathcad

$$
\begin{array}{|l}
\text{for } j \in 1..m-1 \\
\quad \text{for } i \in 1..n-1 \\
\quad\quad u_{j+1,i} \leftarrow \left[\alpha \cdot u_{j,i} + \lambda \cdot \left(u_{j,i+1} + u_{j,i-1}\right)\right] - u_{j-1,i} \\
u
\end{array}
$$

$$
f(x) := \begin{array}{|l} (2\cdot x) \quad \text{if } (x \ge 0)\cdot(x \le 0.5) \\ (2 - 2\cdot x) \quad \text{otherwise} \end{array}
$$

$$g(x) := 0$$



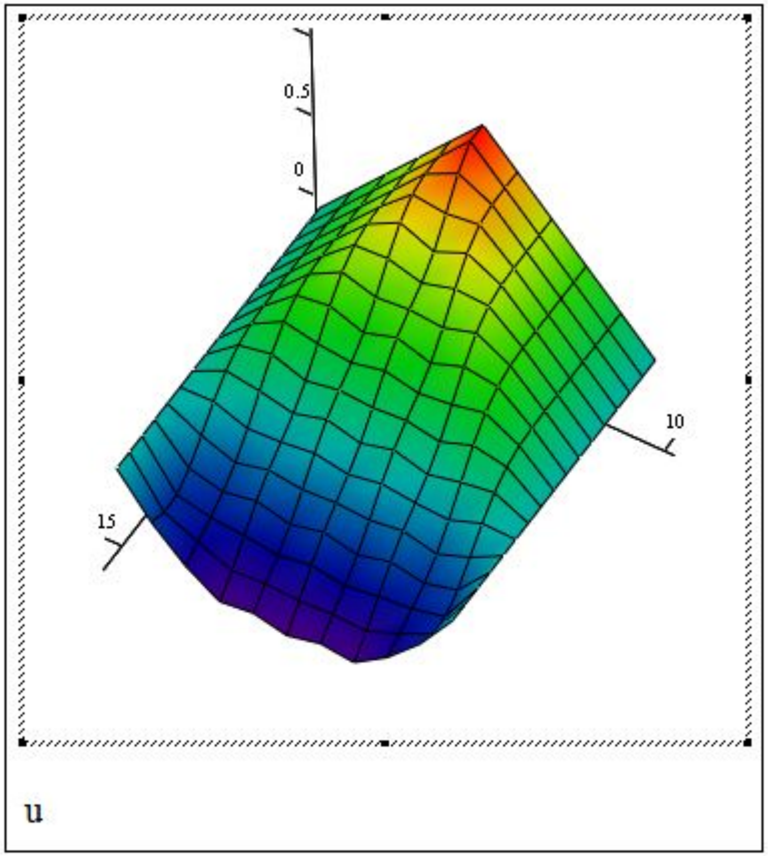
Решение уравнения гиперболического типа в Mathcad

$u := \mathrm{Gip3}(1, 0.8, 10, 16, f, g)$

u =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0
1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0
2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.8	0.6	0.4	0.2	0
3	0	0.2	0.4	0.6	0.775	0.75	0.775	0.6	0.4	0.2	0
4	0	0.2	0.4	0.594	0.7	0.612	0.7	0.594	0.4	0.2	0
5	0	0.2	0.398	0.566	0.577	0.519	0.577	0.566	0.398	0.2	0
6	0	0.2	0.389	0.498	0.436	0.454	0.436	0.498	0.389	0.2	0
7	0	0.197	0.36	0.388	0.315	0.38	0.315	0.388	0.36	0.197	0
8	0	0.185	0.297	0.253	0.229	0.274	0.229	0.253	0.297	0.185	0
9	0	0.155	0.195	0.122	0.16	0.145	0.16	0.122	0.195	0.155	0
10	0	0.097	0.065	0.02	0.078	0.024	0.078	0.02	0.065	0.097	0
11	0	$5.71\cdot10^{-3}$	-0.068	-0.057	-0.032	-0.07	-0.032	-0.057	-0.068	$5.71\cdot10^{-3}$	0
12	0	-0.105	-0.18	-0.131	-0.158	-0.145	-0.158	-0.131	-0.18	-0.105	0
13	0	-0.208	-0.261	-0.223	-0.274	-0.227	-0.274	-0.223	-0.261	-0.208	0
14	0	-0.273	-0.319	-0.338	-0.365	-0.333	-0.365	-0.338	-0.319	-0.273	0
15	0	-0.281	-0.371	-0.455	-0.442	-0.454	-0.442	-0.455	-0.371	-0.281	0
16	0	-0.241	-0.42	-0.548	-0.525	-0.57	-0.525	-0.548	-0.42	-0.241	0

Решение уравнения гиперболического типа в Mathcad



Задача 3. Решение уравнения параболического типа методом сеток

Найти непрерывную функцию $u(x,t)$**,
удовлетворяющую внутри прямоугольной области**
$\mathbf{D} = \{(x,t)\ 0 \le x \le a,\ 0 \le t \le \mathrm{T}\}$**, уравнению**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (k = const > 0)$$

начальные условия

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le a$$

граничные условия

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(a,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le \mathrm{t} \le \mathrm{T}.$$

Замена переменной $t \to t/k \ \ => \ \ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Задача 3. Решение уравнения параболического типа методом сеток

Построение сетки

h – шаг сетки в направлении x;

τ – шаг сетки в направлении t.

координаты узлов сетки

$$x_i = ih, i = 0,1,\dots,n, h = a/n;$$

$$t_j = j\tau, j = 0,1,\dots,m, \tau = T/m.$$

$$x_n = nh = a; \; t_m = m\tau = T$$

значение функции $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$

Задача 3. Решение уравнения параболического типа методом сеток

Конечно-разностный вид уравнения

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2};$$

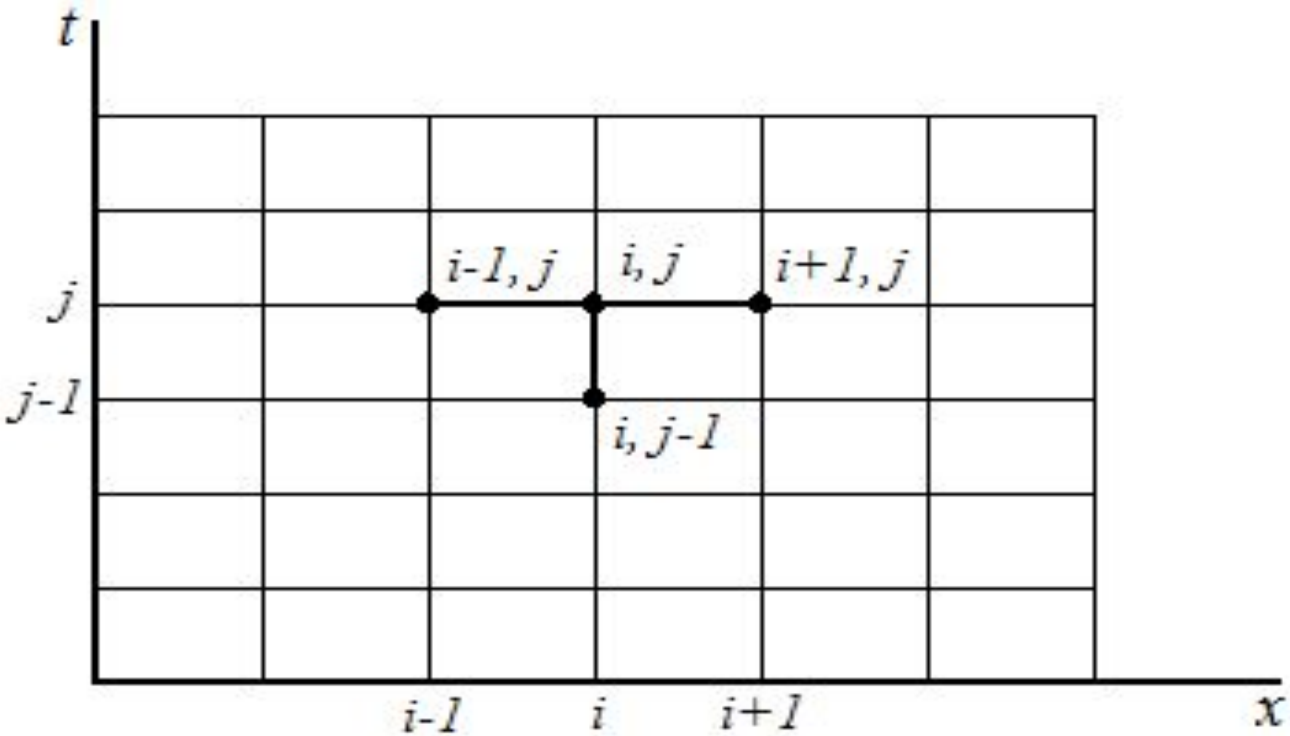
$$\lambda = \tau/h^2;$$

$$\lambda u_{i-1,j} - (1 + 2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i+1,j} = -u_{i,j-1};$$

$$i = 1, \dots, n-1; \quad j = 1, \dots, m$$

погрешность аппроксимации $O(\tau + h^2)$

Задача 3. Решение уравнения параболического типа методом сеток



Свойства разностной схемы:

- **двухслойная;**
- **неявная;**
- **устойчивая при любых значениях параметра** . λ

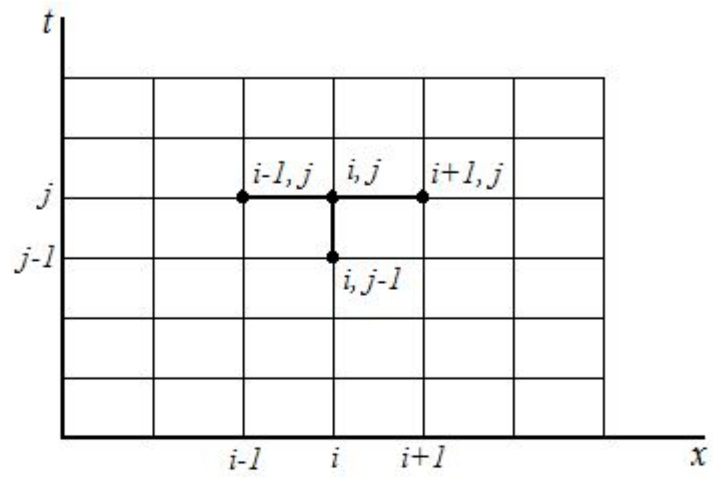
Задача 3. Решение уравнения параболического типа методом сеток

Система уравнений

$$\lambda u_{i-1,j} - (1+2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i+1,j} = -u_{i,j-1}$$

$$i = 1, \dots, n-1;$$

$$u_{0j} = \mu_1(t_j), \quad u_{nj} = \mu_2(t_j).$$



Задача 3. Решение уравнения параболического типа методом сеток

Алгоритм решения задачи

1. Задание шага h, τ

2. Вычисление решения на нулевом временном слое

$$u_{i0} = f(x_i)$$

3. Вычисление решения на каждом следующем слое (решение трехдиагональной системы уравнений)

$$\lambda u_{i-1,j} - (1 + 2\lambda)u_{ij} + \lambda u_{i+1,j} = -u_{i,j-1}$$

$$i = 1, \dots, n-1;$$

$$u_{0j} = \mu_1(t_j), \quad u_{nj} = \mu_2(t_j).$$

Решение уравнения параболического в Mathcad

$$
\mathrm{prog}(a,b,c,d,n) := \left|
\begin{array}{l}
\text{for } i \in 1..n-1 \\
\quad \left| \begin{array}{l}
b_i \leftarrow b_i - \dfrac{a_i \cdot c_{i-1}}{b_{i-1}} \\
d_i \leftarrow d_i - \dfrac{a_i \cdot d_{i-1}}{b_{i-1}}
\end{array} \right. \\
x_{n-1} \leftarrow \dfrac{d_{n-1}}{b_{n-1}} \\
\text{for } i \in n-2..0 \\
\quad x_i \leftarrow \dfrac{d_i - c_i \cdot x_{i+1}}{b_i} \\
x
\end{array}
\right.
$$

Решение уравнения параболического в Mathcad

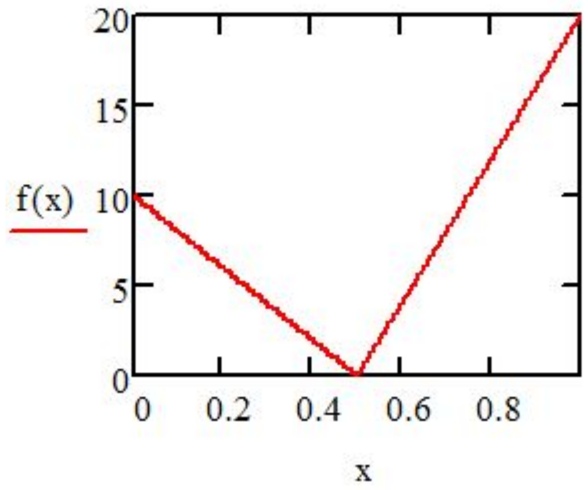
$$\mathrm{parb1}(a,T,n,m,f,f1,f2) := \left|\begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{a}{n} \\ \tau \leftarrow \dfrac{T}{m} \\ \lambda \leftarrow \dfrac{\tau}{h^2} \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad u_{i,0} \leftarrow f(i\cdot h) \\ \text{for } j \in 1..m \\ \quad \left|\begin{array}{l} t \leftarrow j\cdot\tau \\ a_0 \leftarrow 0 \\ b_0 \leftarrow 1 \\ c_0 \leftarrow 0 \\ d_0 \leftarrow f1(t) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Решение уравнения параболического в Mathcad

$$
\begin{array}{l}
\text{for } i \in 1..n-1 \\
\quad \left| \begin{array}{l} a_i \leftarrow \lambda \\ b_i \leftarrow -(1+2\lambda) \\ c_i \leftarrow \lambda \\ d_i \leftarrow -u_{i,j-1} \end{array} \right. \\
a_n \leftarrow 0 \\
b_n \leftarrow 1 \\
c_n \leftarrow 0 \\
d_n \leftarrow f2(t) \\
u^{\langle j \rangle} \leftarrow prog(a,b,c,d,n+1) \\
u
\end{array}
$$

Решение уравнения параболического в Mathcad

$$f(x) := \begin{array}{|l} 10 - 20x \ \text{ if } \ x \le 0.5 \\ 40x - 20 \ \text{ otherwise} \end{array}$$



$f1(t) := 10$ $\qquad$ $f2(t) := 20$

Решение уравнения параболического в Mathcad

u := parb1(1, 1.28, 10, 128, f, f1, f2)

$u^T =$

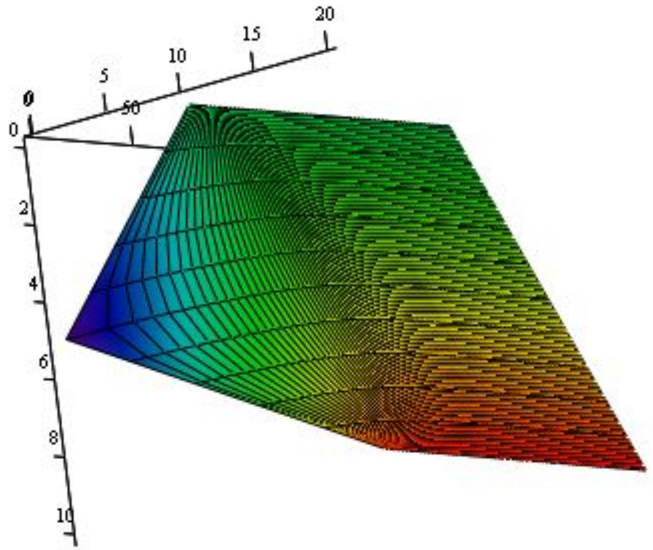
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	10	8	6	4	2	0	4	8	12	16	20
1	10	8.049	6.146	4.39	3.024	2.683	5.024	8.39	12.146	16.049	20
2	10	8.158	6.425	4.97	4.095	4.291	6.095	8.97	12.425	16.158	20
3	10	8.312	6.78	5.601	5.054	5.467	7.054	9.601	12.78	16.312	20
4	10	8.492	7.165	6.222	5.899	6.422	7.899	10.222	13.165	16.492	20
5	10	8.681	7.551	6.807	6.649	7.24	8.649	10.807	13.551	16.681	20
6	10	8.868	7.923	7.35	7.319	7.959	9.319	11.35	13.923	16.868	20
7	10	9.047	8.273	7.849	7.923	8.602	9.923	11.849	14.273	17.047	20
8	10	9.215	8.598	8.305	8.47	9.18	10.47	12.305	14.598	17.215	20
9	10	9.371	8.897	8.723	8.965	9.704	10.965	12.723	14.897	17.371	20
10	10	9.514	9.171	9.103	9.416	10.178	11.416	13.103	15.171	17.514	20
11	10	9.645	9.422	9.45	9.825	10.609	11.825	13.45	15.422	17.645	20
12	10	9.766	9.651	9.766	10.198	11.002	12.198	13.766	15.651	17.766	20
13	10	9.875	9.86	10.055	10.537	11.359	12.537	14.055	15.86	17.875	20
14	10	9.975	10.051	10.317	10.846	11.683	12.846	14.317	16.051	17.975	20
15	10	10.067	10.225	10.556	11.127	11.979	13.127	14.556	16.225	18.067	...

Решение уравнения параболического в Mathcad

$u^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
105	10	11	12	12.999	13.999	14.999	15.999	16.999	18	19	20
106	10	11	12	13	13.999	14.999	15.999	17	18	19	20
107	10	11	12	13	13.999	14.999	15.999	17	18	19	20
108	10	11	12	13	14	14.999	16	17	18	19	20
109	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
110	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
111	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
112	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
113	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
114	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
115	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
116	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
117	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
118	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
119	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
120	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
121	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
122	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
123	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
124	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
125	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
126	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
127	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
128	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...

Решение уравнения параболического в Mathcad



u

Решение уравнения параболического в Mathcad

u := parb1(1,1.28,10,25,f,f1,f2)

$u^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	10	8	6	4	2	0	4	8	12	16	20
1	10	8.662	7.453	6.528	6.096	6.465	8.096	10.528	13.453	16.662	20
2	10	9.358	8.852	8.62	8.796	9.5	10.796	12.62	14.852	17.358	20
3	10	9.888	9.88	10.072	10.548	11.366	12.548	14.072	15.88	17.888	20
4	10	10.256	10.583	11.048	11.703	12.584	13.703	15.048	16.583	18.256	20
5	10	10.503	11.055	11.699	12.47	13.392	14.47	15.699	17.055	18.503	20
6	10	10.669	11.37	12.133	12.981	13.929	14.981	16.133	17.37	18.669	20
7	10	10.78	11.581	12.423	13.321	14.286	15.321	16.423	17.581	18.78	20
8	10	10.853	11.721	12.615	13.548	14.525	15.548	16.615	17.721	18.853	20
9	10	10.902	11.814	12.744	13.699	14.683	15.699	16.744	17.814	18.902	20
10	10	10.935	11.876	12.829	13.799	14.789	15.799	16.829	17.876	18.935	20
11	10	10.957	11.917	12.886	13.866	14.859	15.866	16.886	17.917	18.957	20
12	10	10.971	11.945	12.924	13.911	14.906	15.911	16.924	17.945	18.971	20
13	10	10.981	11.963	12.95	13.941	14.938	15.941	16.95	17.963	18.981	20
14	10	10.987	11.976	12.966	13.96	14.958	15.96	16.966	17.976	18.987	20
15	10	10.991	11.984	12.978	13.974	14.972	15.974	16.978	17.984	18.991	20
16	10	10.994	11.989	12.985	13.982	14.982	15.982	16.985	17.989	18.994	20
17	10	10.996	11.993	12.99	13.988	14.988	15.988	16.99	17.993	18.996	20
18	10	10.997	11.995	12.993	13.992	14.992	15.992	16.993	17.995	18.997	20
19	10	10.998	11.997	12.996	13.995	14.995	15.995	16.996	17.997	18.998	20
20	10	10.999	11.998	12.997	13.997	14.996	15.997	16.997	17.998	18.999	20
21	10	10.999	11.999	12.998	13.998	14.998	15.998	16.998	17.999	18.999	20
22	10	11	11.999	12.999	13.998	14.998	15.998	16.999	17.999	19	20
23	10	11	11.999	12.999	13.999	14.999	15.999	16.999	17.999	19	20
24	10	11	12	12.999	13.999	14.999	15.999	16.999	18	19	20
25	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Задача 3. Решение уравнения параболического типа методом сеток

Конечно-разностный вид уравнения (явная схема)

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2};$$

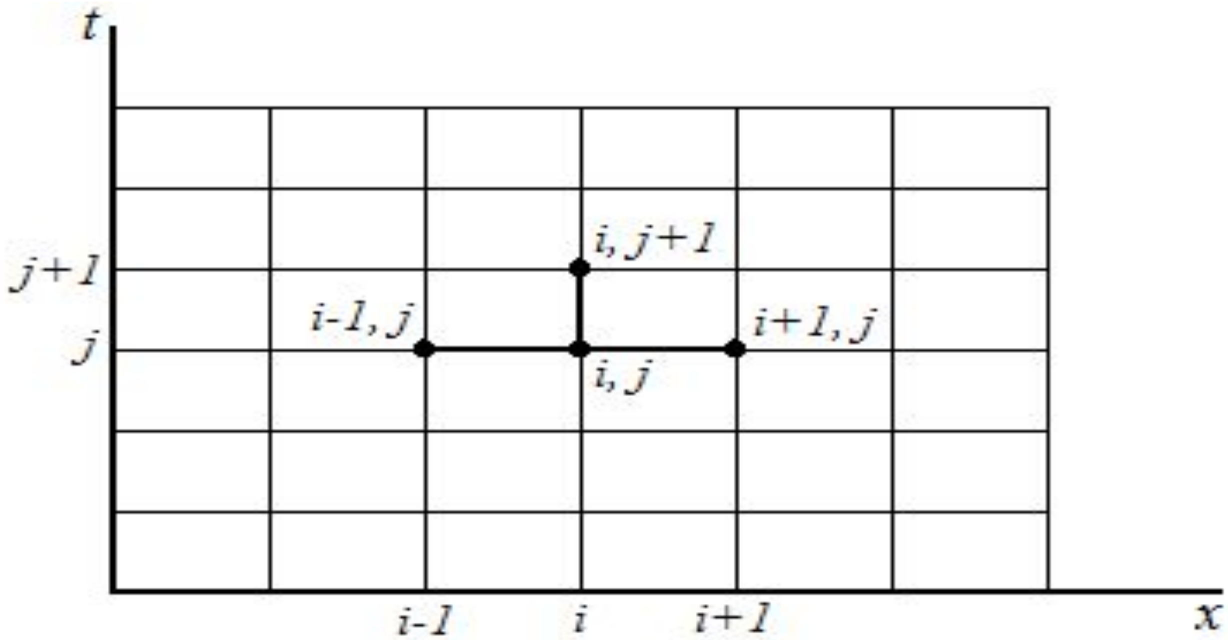
$$\lambda = \tau/h^2;$$

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i+1,j};$$

$$i = 1, \dots, n-1; \quad j = 1, \dots, m$$

погрешность аппроксимации $O(\tau + h^2)$

Задача 3. Решение уравнения параболического типа методом сеток



Свойства разностной схемы:

- **двухслойная;**
- **явная;**
- **устойчивая при значениях параметра**

$$\lambda \leq 1/2 \; (\tau \leq h^2/2).$$

Задание

1. **Написать программу решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток (Mathcad).**
2. **Написать программу решения уравнения гиперболического типа методом сеток (Mathcad).**
3. **Написать программу решения уравнения параболического типа методом сеток с использованием неявной схемы (Mathcad).**
4. **Написать программу решения уравнения параболического типа методом сеток с использованием явной схемы (Mathcad).**

Варианты заданий
Плис А.И., Сливина. Лабораторный практикум по высшей математике (лабораторные работы №42–44).

Вопросы

1. **Перечислите численные методы, используемые при решении дифференциальных уравнений в частных производных.**
2. **Классификация дифференциальных уравнений в частных производных в зависимости от математической природы.**
3. **Классификация дифференциальных уравнений в частных производных в зависимости от физического смысла решаемых с их помощью задач.**
4. **Какие процессы описывают эллиптические уравнения?**
5. **Какие процессы описываются параболическими и гиперболическими уравнениями?**
6. **Запишите уравнение Лапласа в конечно-разностной форме.**
7. **Запишите волновое уравнение в конечно-разностной форме.**

Вопросы

8. Запишите уравнение теплопроводности в конечно-разностной форме (явная схема).
9. Запишите уравнение теплопроводности в конечно-разностной форме (неявная схема).
10. Основные свойства разностных схем.
11. Преимущества и недостатки явной схемы.
12. Преимущества и недостатки неявной схемы.

Благодарю
за внимание!