УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

- СОДЕРЖАНИЕ

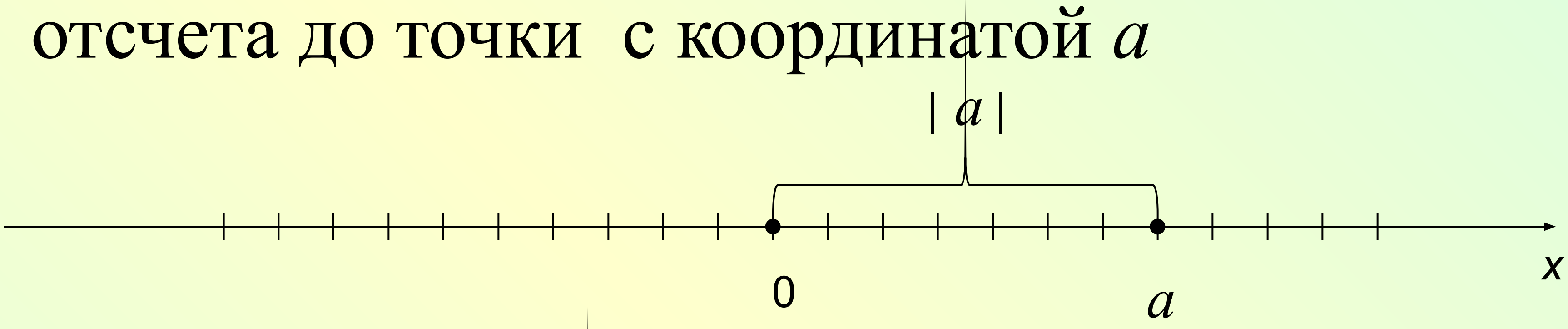
Понятие модуля

Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

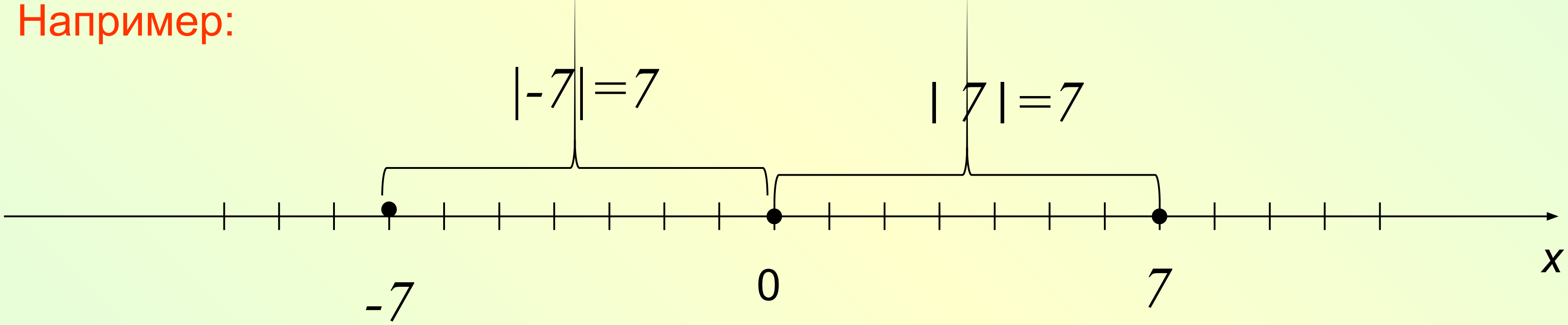
Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля

Понятие модуля

Модулем числа *a* называется расстояние от начала отсчета до точки с координатой *a*



Например:



Таким образом:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{если } a < 0 \end{cases}$$

оглавление

Уравнения.
содержащие переменную под знаком модуля

$| f(x) | = a$

$| f(x) | = g(x)$

$| f(x) | = |g(x) |$

$| f(x) | + | g(x) | = h(x)$

Уравнение вида $| f(x) | = a$

- Если $a < 0$, то уравнение решений не имеет
- Если $a = 0$, то $f(x) = 0$
- Если $a > 0$, то $f(x) = a$ или $f(x) = -a$
- Пример:

Решить уравнение: $| 2x - 5 | = 13$

Решение: $2x - 5 = 13$ *или* $2x - 5 = -13$

$2x = 13 + 5$ $\qquad$ $2x = -13 + 5$

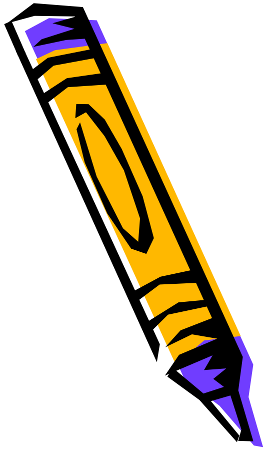
$2x = 18$ $\qquad$ $2x = -8$

$x = 9$ $\qquad$ $x = -4$

Ответ: $x = 9$, $x = -4$

Задачи для самостоятельного решения

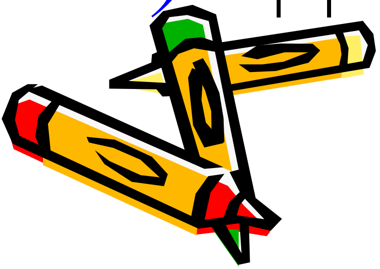
другой вид

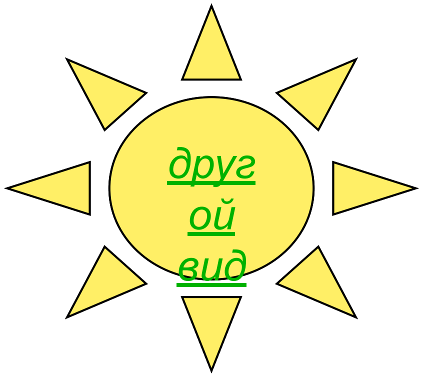


Уравнение вида $| f(x) | = a$

Решите уравнение

- **1)** $| 2x - 3| = 7$ Ответ
- 2) $|x^2 – x - 5| = 1$ Ответ
- 3) $| |x| - 2 |= 2$ Ответ





- Ответ: $x = 5$, $x = - 2$
- Показать решение

назад

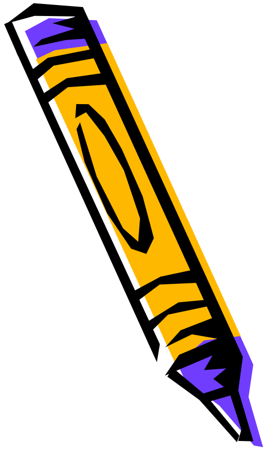
- Ответ: $x = -2$, $x = 3$
- Показать решение

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

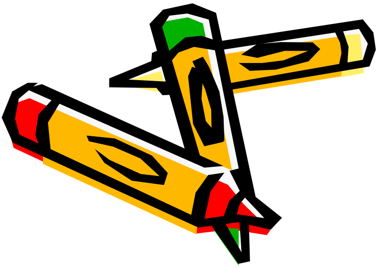
назад

- Ответ: $x= 4$, $x= -4$, $x = 0$
- Показать решение

назад

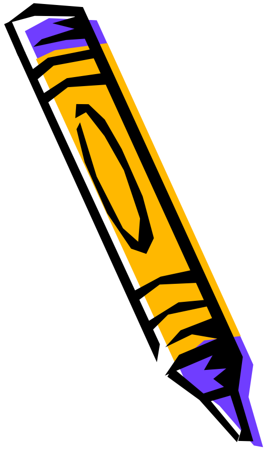


- РЕШЕНИЕ:
- $|\ 2x - 3\ | = 7$
- $2x - 3 = 7$ или $2x - 3 = -7$
- $2x = 7 + 3$ или $2x = -7 + 3$
- $2x = 10$ или $2x = -4$
- $x = 5$ или $x = -2$

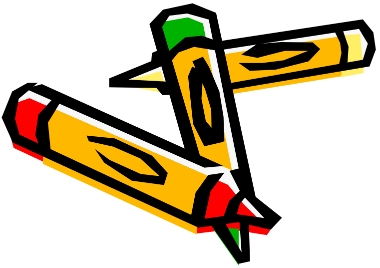


назад

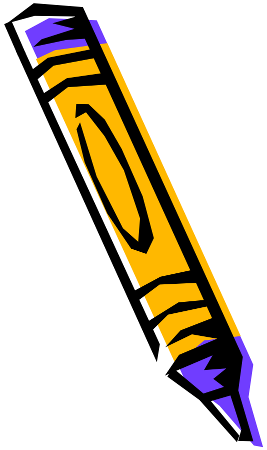
назад



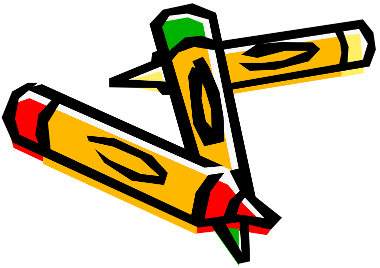
- РЕШЕНИЕ:
- $| x^2 – x - 5 | = 1$
- $x^2 – x - 5 = 1$ или $x^2 – x - 5 = -1$
- $x^2 – x - 6 = 0$ $x^2 – x - 4 = 0$
- $D = 25$ $D = 17$
- $x_1 = - 2, x_2 = 3$ $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$



назад



- РЕШЕНИЕ:
- $| \; |x| -2 \; | = 2$
- $|x| -2 = 2$ или $|x| -2 = -2$
- $|x| = 2+2$ $\qquad$ $|x| = -2 +2$
- $|x| = 4$ $\qquad$ $|x| = 0$
- $x = 4$ или $x = -4$ $\qquad$ $x = 0$



назад

Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$

- **1)** определить условие, при котором уравнение имеет решение: $g(x) \geq 0$
- 2) $f(x) = g(x)$ или $f(x) = -g(x)$
- 3) Решить уравнения и выбрать корни, удовлетворяющие условию$g(x) \geq 0$
- Пример: Решить уравнение:$|x + 2| = 2(3 - x)$
- *Определим при каких значениях x уравнение имеет решение*

  $2(3 - x) \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$
- *Распишем данное уравнение на два:*

  $x + 2 = 2(3 - x)$ *или* $x + 2 = -2(3 - x)$

  $x = 4/3$ $x = 8$ *не удовлетворяет условию* $x \leq 3$
- *Ответ:* $x = 4/3$

Задачи для самостоятельного решения

другой вид

другой вид

- Уравнение вида $| f(x) | = g(x)$

Решите уравнения

- 1) $|5x + 2| = 3 – 3x$ Ответ:
- 2) $|x^2 - 2x| = 3 - 2x$ Ответ

другой вид

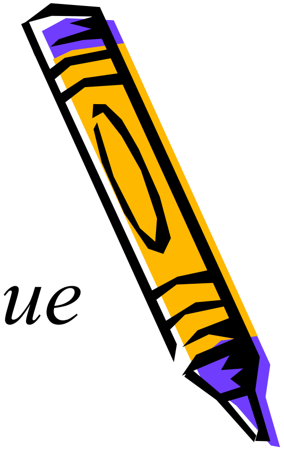
- Ответ: $x = 1/8$, $x = - 2{,}5$
- Показать решение

назад

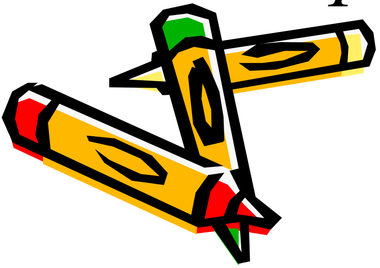
- Ответ: $x = -\sqrt{3}$, $x = 1$
- Показать решение

назад

РЕШЕНИЕ:

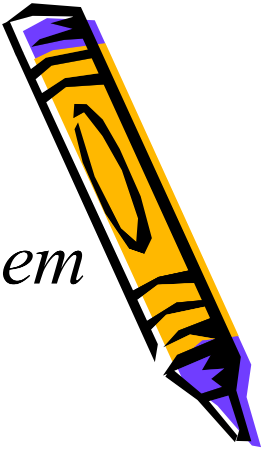


- $|5x + 2| = 3 - 3x$
- *Определим при каких значениях x уравнение имеет решение:* $3 - 3x \geq 0$ => $x \leq 1$
- *Распишем данное уравнение на два:*
- $5x + 2 = 3 - 3x$ *или* $5x + 2 = - (3 - 3x)$
- $5x + 3x = 3 - 2$ $5x - 3x = - 3 - 2$
- $8x = 1$ $2x = - 5$
- $x = 1/8$ $x = - 2,5$
- *Оба корня удовлетворяют условию* $x \leq 1$



назад

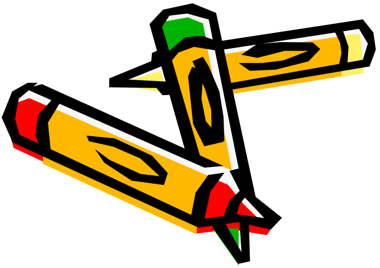
РЕШЕНИЕ:



- $|x^2 - 2x| = 3 - 2x$
- Определим при каких значениях x уравнение имеет решение: $3 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1,5$
- Распишем данное уравнение на два:
- $x^2 - 2x = 3 - 2x$ или $x^2 - 2x = -(3 - 2x)$
- $x^2 = 3$ $x^2 - 4x + 3 = 0$
- $x = \pm\sqrt{3}$ $x_1 = 1$ $x_2 = 3$

Корни $\sqrt{3}$ и 3 не удовлетворяют условию $x \leq 1,5$

Ответ: $x = -\sqrt{3}$ $x = 1$



назад

Уравнение вида $| f(x) | = | g(x)|$

- 1способ: $f(x) = g(x)$ или $f(x) = - g(x)$
- 2способ: *возвести обе части уравнения в квадрат*
- Пример Решить уравнение: $|x + 2| = |2x - 6|$
- 1 способ: $x + 2 = 2x – 6$ *или* $x + 2 = - (2x – 6)$
- $x = 8$ $3x = 4$
- $x = 4/3$
- *2 способ:* $(|x + 2|)^2 = (|2x - 6|)^2$ *Воспользуемся свойством* $|a|^2=a^2$
- $(x + 2)^2 = (2x - 6)^2$
- $3x^2 – 28x + 32 = 0 => x = 8, x = 4/3$

Задачи для самостоятельного решения

другой вид

другой вид

- Уравнение вида $| f(x) | = |g(x)|$
- Решите уравнения
- 1) $|x^2 + x - 2| = |x + 2|$ Ответ:
- 2) $|3 + x | = |x|$ Ответ

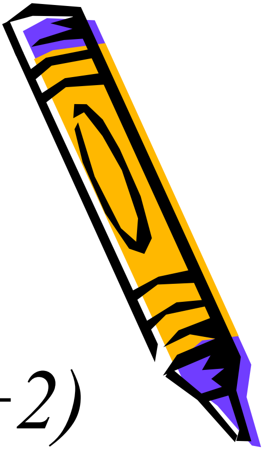
другой вид

- *Ответ:* $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$
- *Показать решение*

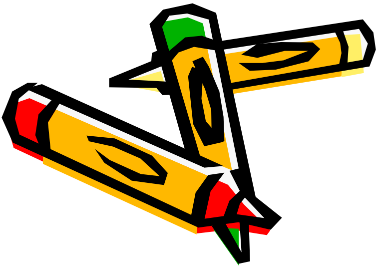
назад

- *Ответ: x = -1,5*
- *Показать решение*

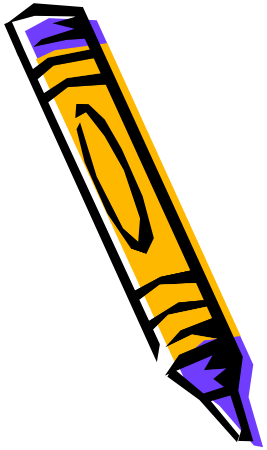
назад



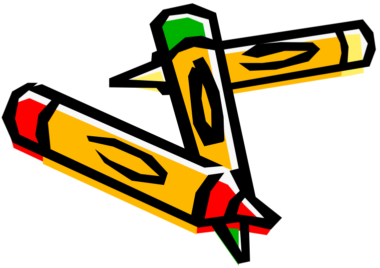
- РЕШЕНИЕ
- $|x^2 + x - 2| = |x + 2|$
- $x^2 + x - 2 = x + 2$ *или* $x^2 + x - 2 = -(x + 2)$
- $x^2 = 4$ $x^2 + 2x = 0$
- $x = 2, \; x = -2$ $x(x + 2) = 0$
- $x = 0 \quad x = -2$
- *Ответ:* $x = -2, x = 0, x = 2$



назад



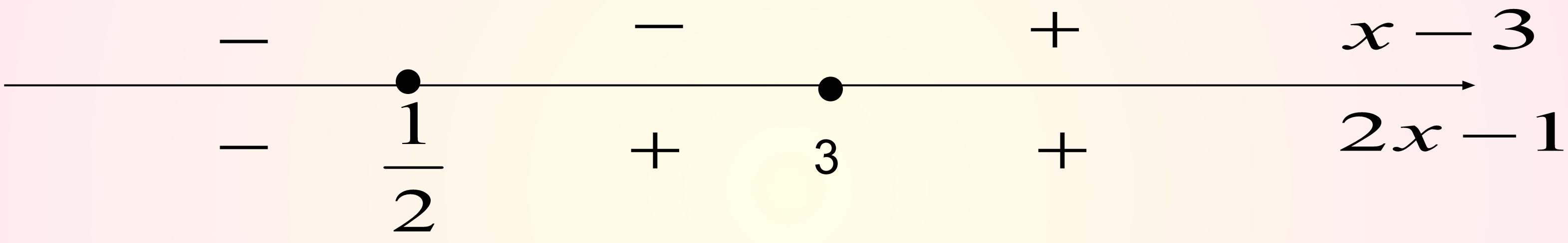
- РЕШЕНИЕ
- $|3 + x| = |x|$
- $3 + x = x$ *или* $3 + x = - x$
- $3 = 0$ $2x = -3$
- *решений нет* $x = -1,5$
-
- *Ответ:* $x = -1,5$



назад

Уравнение вида $|f(x)| + |g(x)| = h(x)$

- При решении уравнений данного вида используется правило раскрытия модуля.
- Пример: Решить уравнение: $|x-3| + |2x-1| = 8$
- Найдем нули функций, стоящих под знаком модуля: $x = 3$, $x = \frac{1}{2}$
- Отметим эти точки на числовой прямой и определим знаки функций на получившихся промежутках



Рассмотрим решение уравнения на каждом промежутке

$x < \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} \le x \le 3$ $\qquad$ $x > 3$

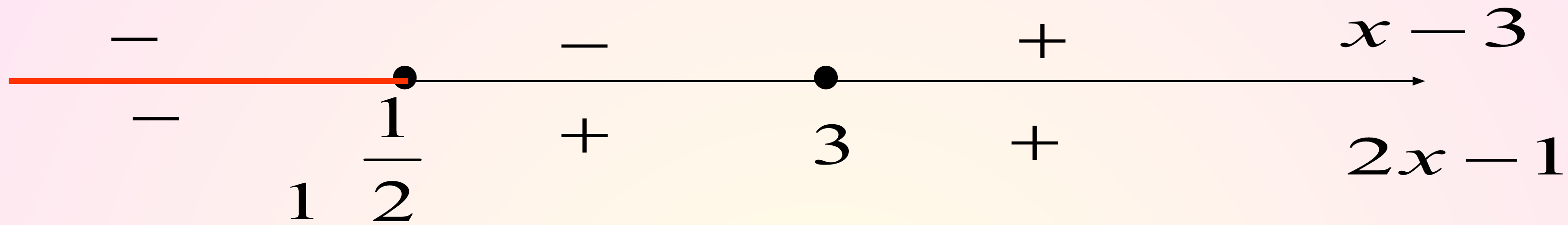
Задачи для самостоятельного решения

Ответ:

оглавление

Уравнение вида | $f(x)$ | + | $g(x)$| = $h(x)$

- **Пример:** Решить уравнение: $|x-3| + |2x-1| = 8$
-



$x < \frac{1}{2}$

Раскроем модули с учетом знака функций на этом промежутке

$-(x-3) - (2x-1) = 8$

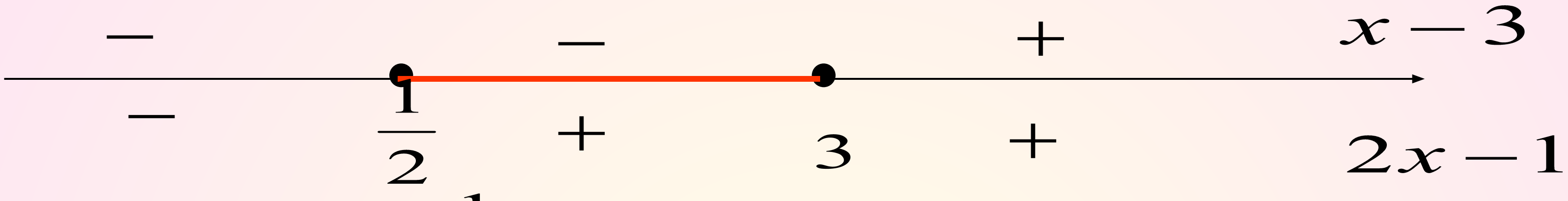
$-3x + 4 = 8$

$x = -\frac{4}{3}$ удовлетворяет условию $x < \frac{1}{2}$

назад

Уравнение вида $|f(x)| + |g(x)| = h(x)$

Пример: Решить уравнение: $|x-3| + |2x-1| = 8$

- 

$$\frac{1}{2} \le x \le 3$$

Раскроим модули с учетом знака функций на этом промежутке

$$-(x-3) + (2x-1) = 8$$

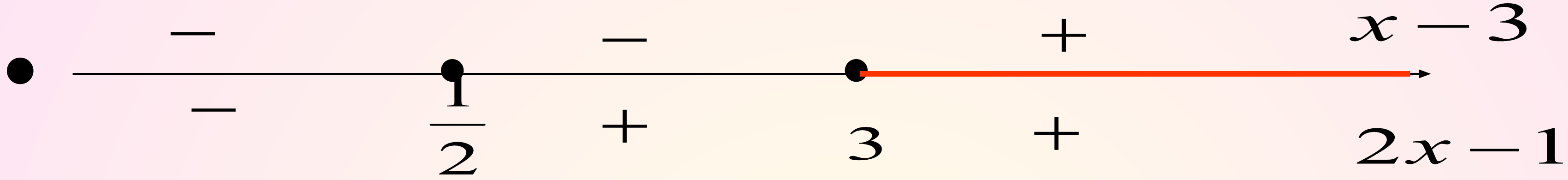
$$x + 2 = 8$$

$x=6$ не удовлетворяет условию $\frac{1}{2} \le x \le 3$

назад

Уравнение вида $| f(x) | + | g(x)| = h(x)$

Пример: Решить уравнение: $|x-3| + |2x-1| = 8$



$$x > 3$$

- Раскроем модули с учетом знака функций на этом промежутке

$(x-3) + (2x-1) = 8$

$3x - 4 = 8$

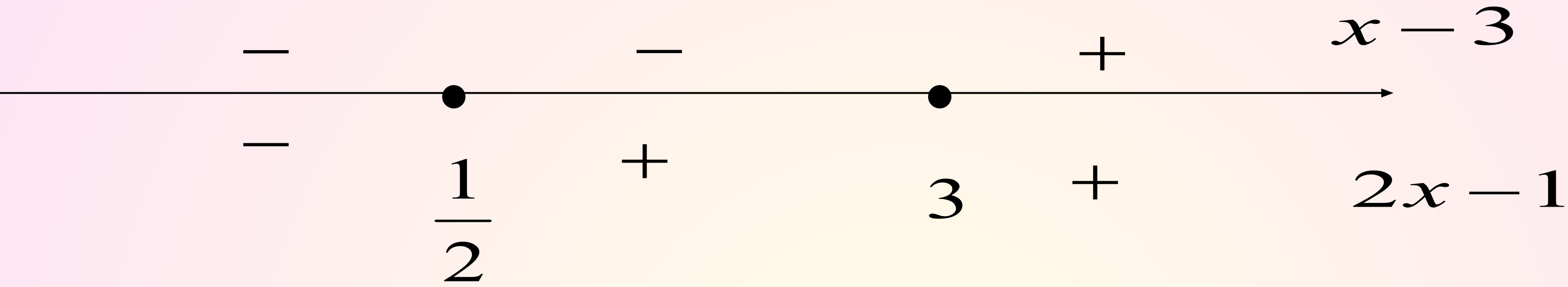
$x=4$ удовлетворяет условию $x > 3$

назад

Уравнение вида | *f(x)* | + | *g(x)*| = *h(x)*

Объединим все ответы

-



$x<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\le x\le 3$	$x>3$
$x=-\frac{4}{3}$	*решений нет*	$x=4$

Ответ: $x=-\frac{4}{3}$ $\quad x=4$

Задачи для самостоятельного решения

назад

Раскрытие модуля

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \ge 0, \\ -a, \text{если } a < 0 \end{cases}$$

- *Решить уравнение:* $|\,2x - 4| = x + 6$

Раскроем модуль.

Если $2x - 4 \ge 0$, *т. е.* $x \ge 2$,

то $2x - 4 = x + 6$

$x = 10$ – *удовлетворяет условию* $x \ge 2$

Если $2x - 4 < 0$, *т. е.* $x < 2$,

то $-(2x - 4) = x + 6$

$x = -2/3$ – *удовлетворяет условию* $x < 2$

Ответ: $x = -2/3$, $x = 10$

Второй способ оформления

Раскрытие модуля $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{если } a < 0 \end{cases}$

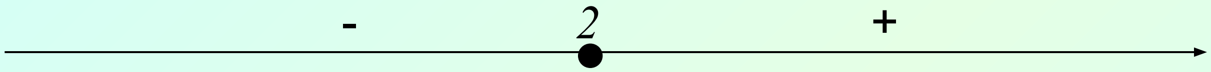
- *Решить уравнение:* $| 2x - 4| = x +6$

Раскроем модуль.

Найдем нули функции, стоящей внутри знака модуля

$$2x – 4 = 0 => x = 2$$

Отметим точку с координатой 2 на прямой.



Определим знаки функции на получившихся промежутках

Рассмотрим неравенство отдельно на каждом промежутке:

Если $x < 2$, *то* $2x – 4 < 0 => -(2x – 4) = x +6$

$x = - 2/3$ – *удовлетворяет условию* $x < 2$

Если $x \geq 2$, *то* $2x – 4 \geq 0 => 2x – 4 = x +6$

$x = 10$ – *удовлетворяет условию* $x \geq 2$

Ответ: $x = -2/3, x = 10$

назад

Уравнение вида $|f(x)| + |g(x)| = h(x)$

- *Решите уравнения*

$2|x-3|+|x+1|=2x-1$ Ответ:

$|3-x|-3|x+5|=2x$ Ответ:

$|x-2|+|x|=2-2x$ Ответ:

оглавление

- *Ответ:* $x = 2\frac{2}{3}$ $x = 4$

- *Показать решение*

назад

- *Ответ:* $x = -2$

- *Показать решение*

назад

- *Ответ:* $x \in (-\infty;0]$

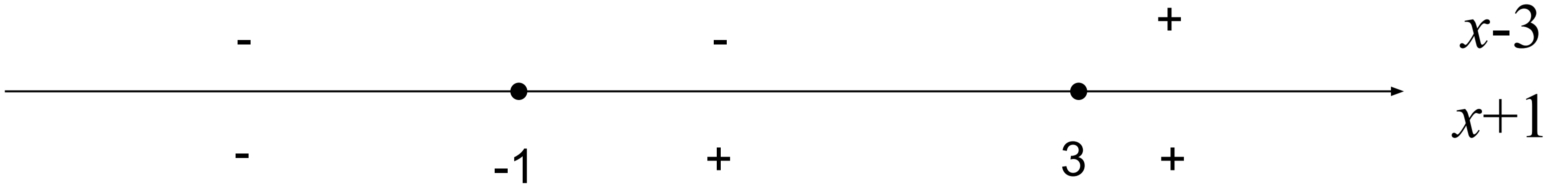
- *Показать решение*

назад

Уравнение вида $|\,f(x)\,| + |\,g(x)\,| = h(x)$

- Задача 1. Решить уравнение $2|x-3|+|x+1|=2x-1$

Найдем нули функций (x-3) и (x+1) , отметим эти точки на числовой прямой и определим знаки этих функций на получившихся промежутках



$x<-1$

$-2(x-3)-(x+1)=2x-1$

$-2x+6-x-1=2x-1$

$-5x=-6$

$x=\dfrac{6}{5}$

не удовлетворяет условию

$x<-1$

$-1\le x\le 3$

$-2(x-3)+(x+1)=2x-1$

$-2x+6+x+1=2x-1$

$-3x=-8$

$x=2\dfrac{2}{3}$

удовлетворяет условию

$-1\le x\le 3$

$x\ge 3$

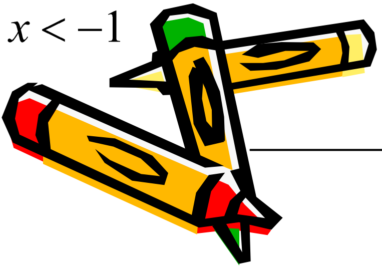
$2(x-3)+(x+1)=2x-1$

$2x-6+x+1=2x-1$

$x=4$

удовлетворяет условию

$x>3$



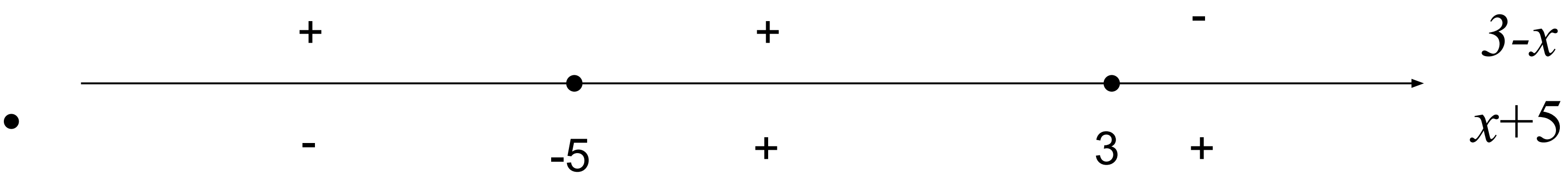
Ответ: $x=2\dfrac{2}{3}$ $x=4$

назад

Уравнение вида $|f(x)| + |g(x)| = h(x)$

- Задача 1. Решить уравнение $|3-x|-3|x+5|=2x$

Найдем нули функций (3-*x*) и (*x*+5) , отметим эти точки на числовой прямой и определим знаки этих функций на получившихся промежутках



$x<-5$

$(3-x)+3(x+5)=2x$

$3-x+3x+15=2x$

$18=0$

решений нет

$-5\le x\le 3$

$(3-x)-3(x+5)=2x$

$3-x-3x-11=2x$

$-6x=12$

$x=-2$

удовлетворяет условию

$-5\le x\le 3$

$x>3$

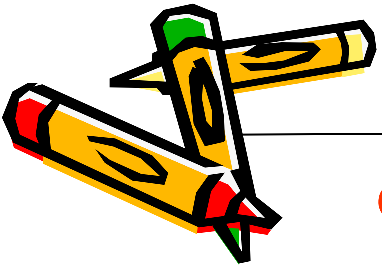
$-(3-x)-3(x+5)=2x$

$-3+x-3x-15=2x$

$x=-9,5$

не удовлетворяет условию

$x>3$



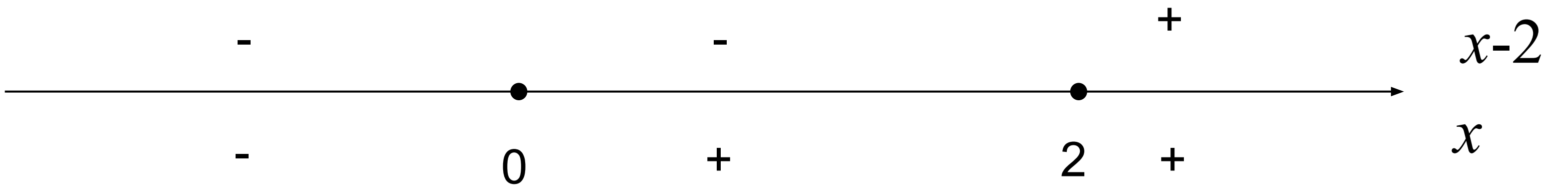
Ответ: $x=-2$

назад

Уравнение вида $|f(x)|+|g(x)|=h(x)$

- Задача 1. Решить уравнение $|x-2|+|x|=2-2x$

Найдем нули функций (x-3) и (x+1) , отметим эти точки на числовой прямой и определим знаки этих функций на получившихся промежутках



$$x<0$$
$$-(x-2)-x=2-2x$$
$$-x+2-x=2-2x$$
$$2=2$$

верно при всех x
с учетом условия

$x<0 \quad x\in(-\infty;0)$

$$0\le x\le 2$$
$$-(x-2)+x=2-2x$$
$$-x+2+x=2-2x$$
$$2x=0$$
$$x=0$$

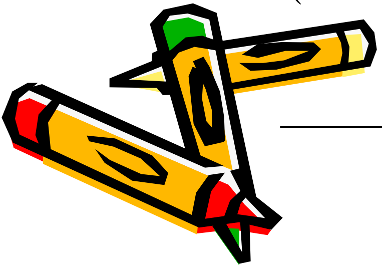
удовлетворяет условию

$0\le x\le 2$

$$x>2$$
$$(x-2)+x=2-2x$$
$$x-2+x=2-2x$$
$$x=1$$

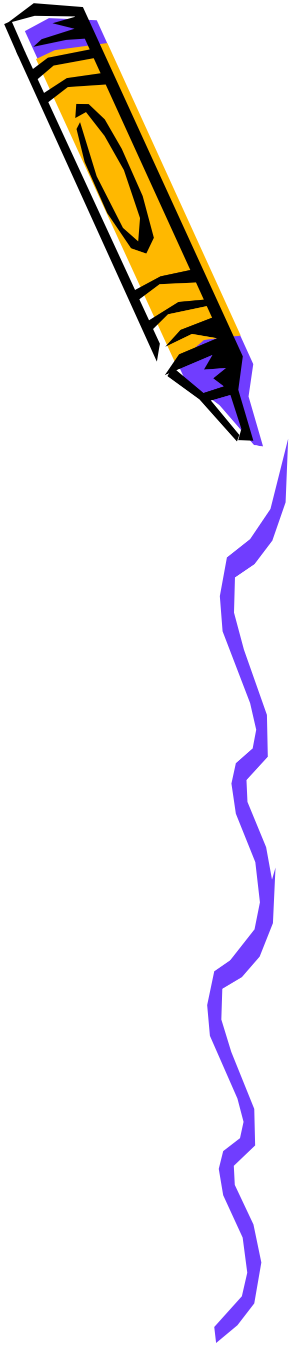
не удовлетворяет условию

$x>2$

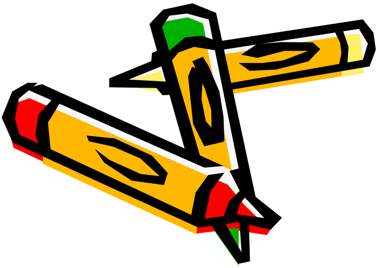


Ответ: $x\in(-\infty;0]$

назад



Самостоятельная работа



Неравенства

содержащие переменную под знаком модуля

$|x| < a$

$|x| > a$

$|f(x)| < a$

$|f(x)| > a$

$|f(x)| < |g(x)|$

$|f(x)| > |g(x)|$

$|f(x)| + |g(x)| < h(x)$

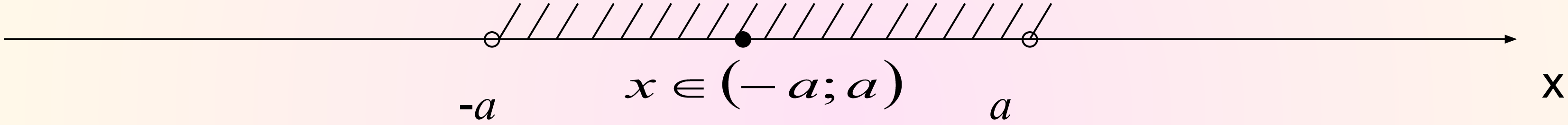
$|f(x)| + |g(x)| > h(x)$

Неравенства вида $|x| < a$

- Опираясь на понятие модуля:

$|x| < a$ - это значит: расстояние от начала координат до точек, удовлетворяющих данному условию должно быть меньше a.

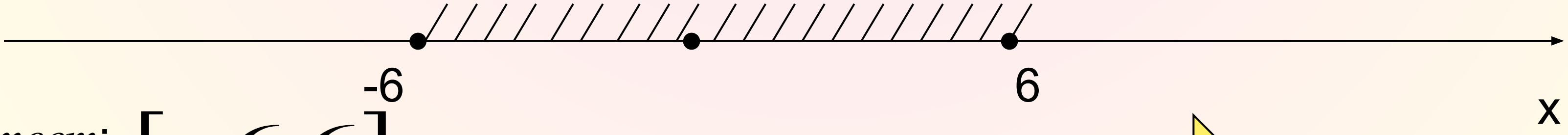
На координатной прямой эти точки будут находиться правее нуля до точки с координатой (a) и левее нуля до точки с координатой ($-a$)



Пример: Решите неравенство $|x| \leq 6$

Решение: Отметим на координатной прямой точки с координатами -6 и 6.

Решением будет множество точек, находящихся на отрезке $[-6;6]$



Ответ: $[-6;6]$

Другой вид

Неравенства вида $|x| > a$

Опираясь на понятие модуля:

$|x| > a$ - это значит: расстояние от начала координат до точек, удовлетворяющих данному условию должно быть больше a.

На координатной прямой эти точки будут находиться правее с координатой (a) и левее точки с координатой ($-a$)

$$x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$$

Пример: Решите неравенство: $|x| > 9$

Решение: Отметим на координатной прямой точки с координатами -9 и 9. Решением неравенства будет являться множество точек, координаты которых меньше – 9 или больше 9

$$Ответ: x \in (-\infty; -9) \cup (9; +\infty)$$

Задачи для самостоятельного решения

Решите неравенства

$|x| \le 8$ $\quad$ $Ответ: -8 \le x \le 8$

$|x| - 3 \le 8$ $\quad$ $Ответ: -11 \le x \le 11$

$|x| + 2 \ge 16$ $\quad$ $Ответ: x \le -14 \, или \, x \ge 14$

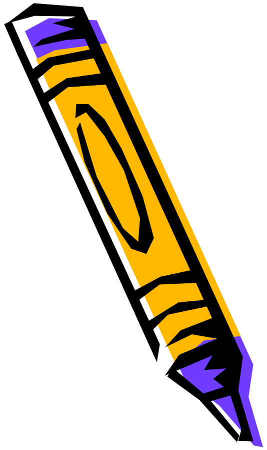
$13 - 2|x| \le 5$ $\quad$ $Ответ: x \le -4 \, или \, x \ge 4$

$x^2 - 16 < 0$ $\quad$ $Ответ: -4 < x < 4$ $\quad$ Показать решение

$75 - 3x^2 \le 0$ $\quad$ $Ответ: x \le -5 \, или \, x \ge 5$ $\quad$ Показать решение

ДРУГОЙ ВИД

Решение неравенства

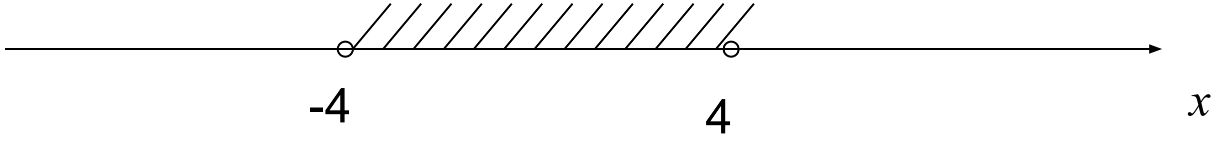


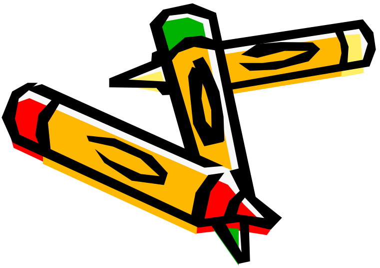
$$x^2 - 16 < 0$$

$$x^2 < 16$$

Извлекаем корень из обеих частей уравнения, не забывая свойства : $\sqrt{x^2} = |x|$

$$|x| < 4$$

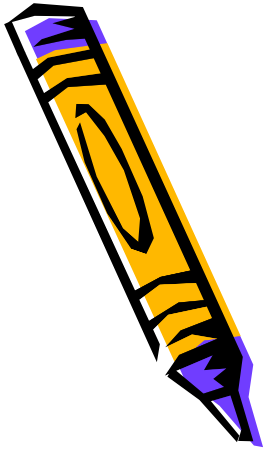




Ответ : $-4 < x < 4$

НАЗАД

Решение неравенства



$$75-3x^2\le 0$$

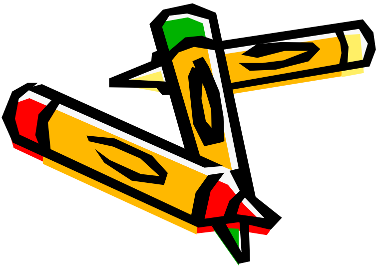
$$-3x^2\le -75$$

$$x^2\ge 25$$

Извлекаем корень из обеих частей уравнения,

не забывая свойства : $\sqrt{x^2}=|x|$

$$|x|\ge 5$$



Ответ : $x\le -5$ *или* $x\ge 5$

Другой вид

Неравенства вида $|f(x)| < a$

- Аналогично неравенству вида $|x| < a$, решением данного неравенства будет являться множество точек, удовлетворяющих условию $-a < f(x) < a$

Пример 1: Решите неравенство: $|2x - 3| \le 11$

Решение: Это неравенство равносильно двойному неравенству

$$-11 \le 2x - 3 \le 11$$

$$-11 + 3 \le 2x \le 11 + 3$$

$$-8 \le 2x \le 14$$

$$-4 \le x \le 7$$

$$Ответ: x \in [-4; 7]$$

Другой вид

Неравенства вида $|f(x)| > a$

- Аналогично неравенству вида $|x| > a$, решением данного неравенства будет являться множество точек, удовлетворяющих условиям $f(x) < -a$ *или* $f(x) > a$

Пример 1: Решите неравенство: $|x + 6| \geq 4$

Решение: Это неравенство равносильно неравенствам:

$$x + 6 \leq -4 \quad \text{или} \quad x + 6 \geq 4$$

$$x \leq -4 - 6 \qquad x \geq 4 - 6$$

$$x \leq -10 \qquad x \geq -2$$

$$\text{Ответ}: x \in (-\infty; -10] \cup [-2; +\infty)$$

Задачи для самостоятельного решения

Решите неравенства

$|2-x| \le 3$ Ответ:

$|x+3|-1 \le 5$ Ответ:

$|2x-4|+2 \ge 12$ Ответ:

$13-2|4-3x| \le 5$ Ответ:

ДРУГОЙ ВИД

Ответ

$|2 - x| \leq 3$

$Ответ: -1 \leq x \leq 5$

Показать решение

назад

Ответ

$$|x+3|-1\le 5$$

$$Ответ:-9\le x\le 3$$

Показать решение

назад

Ответ

$|2x-4|+2 \geq 12$

$Ответ: x \leq -3\ или\ x \geq 7$

Показать решение

назад

Ответ

$13-2|4-3x|\leq 5$

$\textit{Ответ}: x\leq 0 \textit{ или } x\geq \frac{8}{3}$

Показать решение

назад

Решение неравенства

$$|2-x|\le 3$$

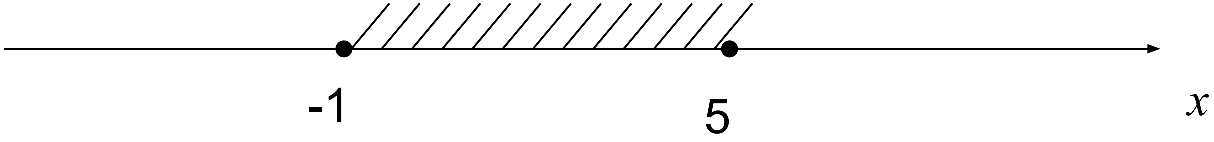
$$-3\le 2-x\le 3$$

$$-3-2\le -x\le 3-2$$

$$-5\le -x\le 1$$

$$5\ge x\ge -1$$

$$-1\le x\le 5$$



$$Ответ:-1\le x\le 5$$

НАЗАД

Решение неравенства

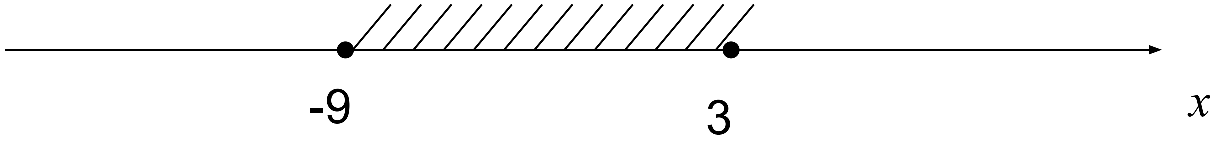
$$|x+3|-1\leq 5$$

$$|x+3|\leq 6$$

$$-6\leq x+3\leq 6$$

$$-6-3\leq x\leq 6-3$$

$$-9\leq x\leq 3$$



$$Ответ:-9\leq x\leq 3$$

НАЗАД

Решение неравенства

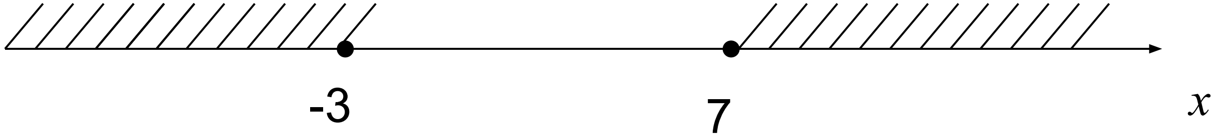
$$|2x-4|+2\geq 12$$

$$|2x-4|\geq 10$$

$$2x-4\leq -10 \text{ или } 2x-4\geq 10$$

$$2x\leq -6 \text{ или } 2x\geq 14$$

$$x\leq -3 \text{ или } x\geq 7$$



$$Ответ: x\leq -3 \text{ или } x\geq 7$$

НАЗАД

Решение неравенства

$$13-2|4-3x|\le 5$$

$$-2|4-3x|\le 5-13$$

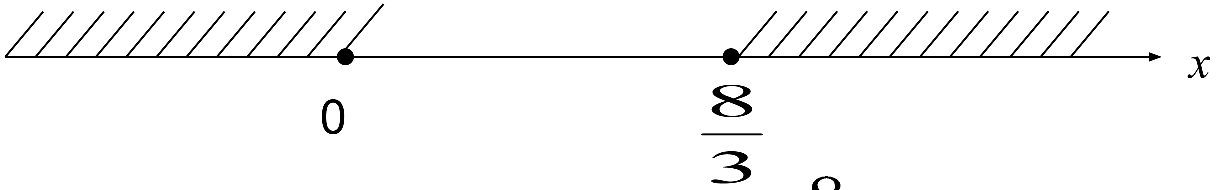
$$-2|4-3x|\le -8$$

$$|4-3x|\ge 4$$

$$4-3x\le -4 \text{ или } 4-3x\ge 4$$

$$-3x\le -8 \text{ или } -3x\ge 0$$

$$x\ge \frac{8}{3} \text{ или } x\le 0$$



$$\text{Ответ}: x\le 0 \text{ или } x\ge \frac{8}{3}$$

НАЗАД

Неравенства вида $|f(x)| < |g(x)|$

- Неравенства вида $|f(x)| < |g(x)|$ или $|f(x)| > |g(x)|$

можно решать двумя способами:

1. возведением обеих частей в квадрат
2. раскрывая модули по определению

Пример: Решить неравенство: $|3x-2| < |x+1|$

1 способ: Т. к. обе части неравенства неотрицательны, то их можно возвести в квадрат $|3x-2|^2 < |x+1|^2$

Используя известное свойство, получим: $(3x-2)^2 < (x+1)^2$

Перенесем все слагаемы в левую часть и разложим на множители по формуле разность квадратов:

$$\big((3x-2)-(x+1)\big)\big((3x-2)+(x+1)\big) < 0$$

$$(2x-3)(4x-1) < 0$$

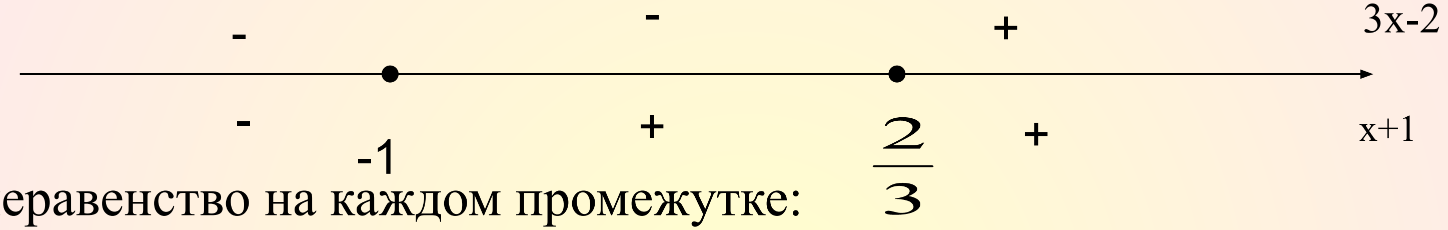
Решая методом интервалов, получим: $x \in \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right)$

Второй способ

Неравенства вида $|f(x)|<|g(x)|$

Пример: Решить неравенство: $|3x-2|<|x+1|$

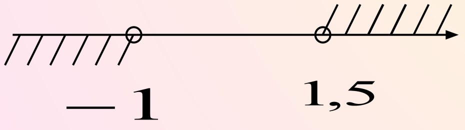
2 способ: Найдем нули функции, стоящей внутри знака модуля, отметим эти числа на числовой прямой и определим знаки этих функций на получившихся промежутках:



Решим неравенство на каждом промежутке:

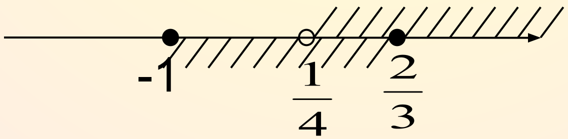
$$x<-1$$
$$-(3x-2)<-(x+1)$$
$$-2x<-3$$
$$x>1,5$$

с учетом данного условия:



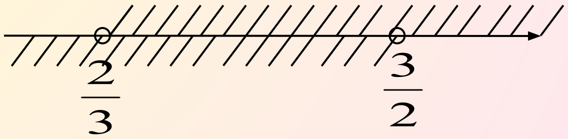
Решений нет

$$-1\le x\le\frac{2}{3}$$
$$-(3x-2)<(x+1)$$
$$-4x<-1$$
$$x>\frac{1}{4}$$



$$x\in\left(\frac{1}{4};\frac{2}{3}\right]$$

$$x>\frac{2}{3}$$
$$(3x-2)<(x+1)$$
$$2x<3$$
$$x<1,5$$



$$x\in\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$$

Объединяем второе и третье решение $x\in\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right)$

Решите неравенство

$$\left|2-x\right| \le \left|2x+1\right|$$

Ответ:

ДРУГОЙ ВИД

Ответ

$$|2-x|\le|2x+1|$$

$$\text{Ответ}: x\in(-\infty;-3]\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$$

Показать решение

другой вид

Решение неравенства

$$|2-x| \le |2x+1|$$

Возведем обе части в квадрат

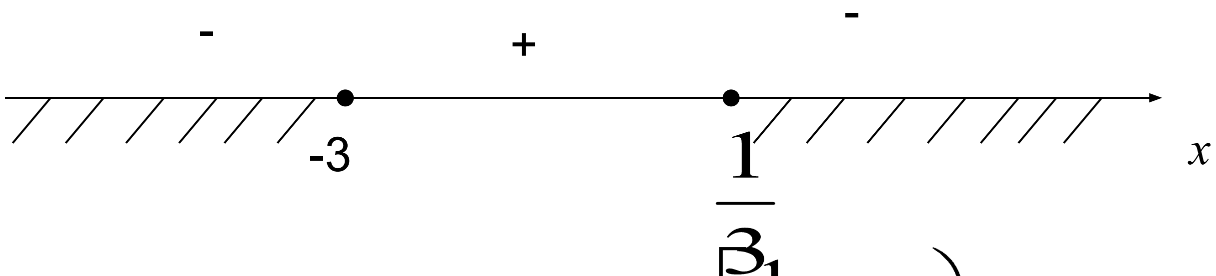
$$(2-x)^2 \le (2x+1)^2$$

Перенесем все в левую часть
и разложим по формуле разность квадратов

$$(2-x-2x-1)(2-x+2x+1) \le 0$$

$$(-3x+1)(x+3) \le 0$$

Решаем неравенство методом интервалов



$$Ответ: x \in (-\infty;-3] \cup \left[\frac{1}{3};+\infty\right)$$

НАЗАД

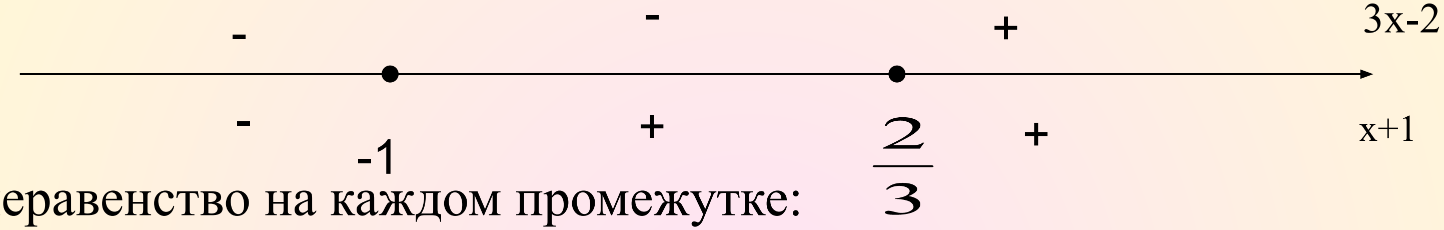
Неравенства вида $|f(x)|+|g(x)|<h(x)$

- Неравенства данного вида решаются методом раскрытия модулей, как и уравнения такого типа .
- Рассмотрим решение данного вида неравенств на примере:

Неравенства вида $|f(x)|+|g(x)|<h(x)$

Пример: Решить неравенство: $|3x-2|-|x+1|<2x$

2 способ: Найдем нули функции, стоящей внутри знака модуля, отметим эти числа на числовой прямой и определим знаки этих функций на получившихся промежутках:



Решим неравенство на каждом промежутке:

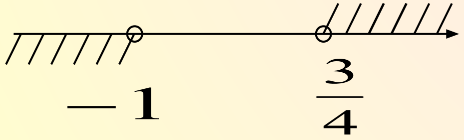
$$x<-1$$

$$-(3x-2)+(x+1)<2x$$

$$-4x<-3$$

$$x>\frac{3}{4}$$

с учетом данного условия:



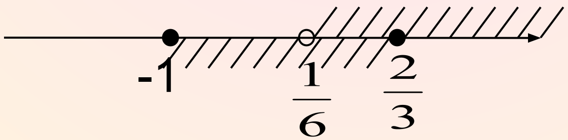
Решений нет

$$-1\le x\le\frac{2}{3}$$

$$-(3x-2)-(x+1)<2x$$

$$-6x<-1$$

$$x>\frac{1}{6}$$



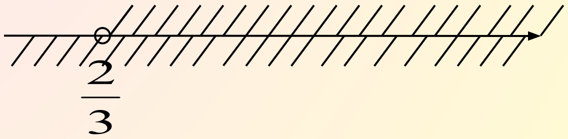
$$x\in\left(\frac{1}{6};\frac{2}{3}\right]$$

$$x>\frac{2}{3}$$

$$(3x-2)-(x+1)<2x$$

$$0x<3$$

Неравенство верно при всех х



$$x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$$

Объединяем второе и третье решение $x\in\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$