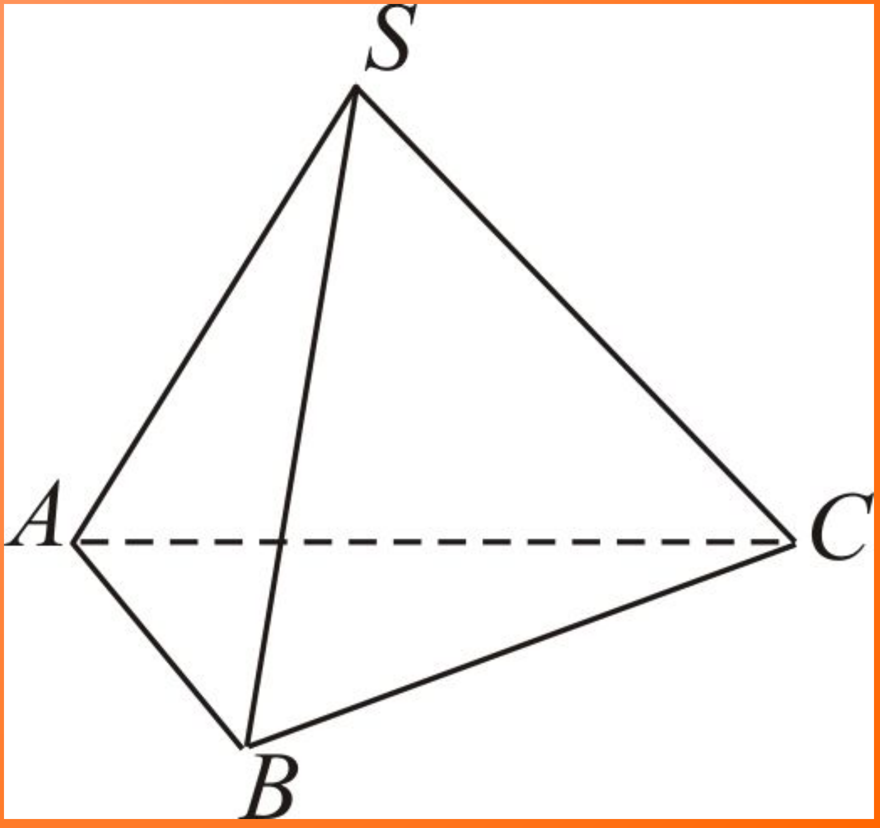
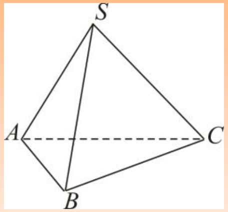
Перпендикулярность прямых и плоскостей



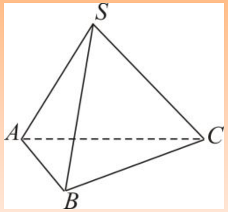
Автор
Календарева Н.Е.

План



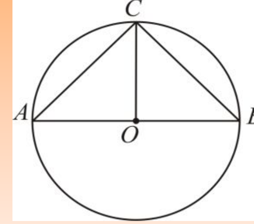
1. Перпендикулярность прямых
2. Перпендикулярность прямой и плоскости
3. Признак перпендикулярности прямой и плоскости
4. Перпендикуляр и наклонная
5. Расстояние от точки до плоскости
6. Теорема о трех перпендикулярах

Продолжение плана

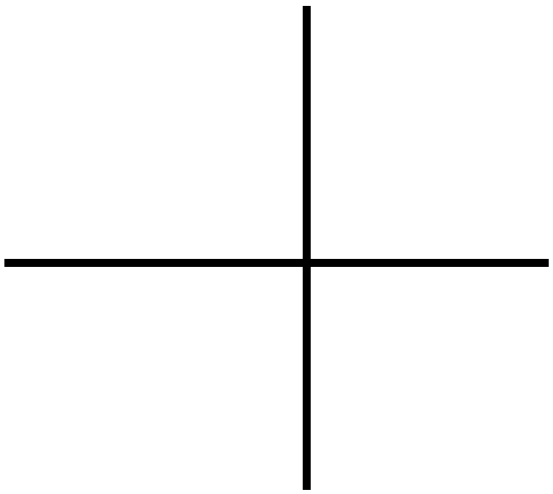


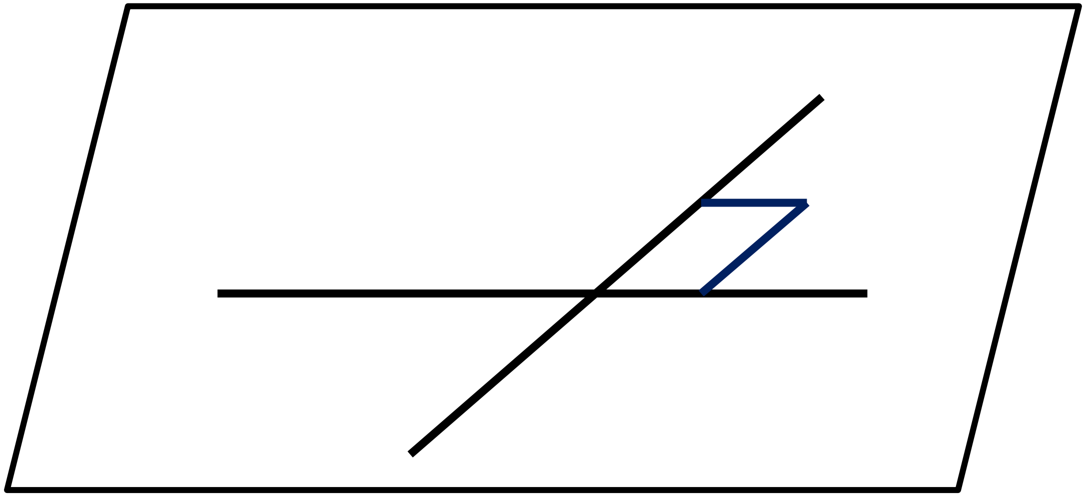
7. Куб, его перпендикулярные прямые
8. Треугольная пирамида, прямая призма и проектирование точек на плоскость
9. Перпендикулярность плоскостей
10. Признак перпендикулярности плоскостей

Перпендикулярность прямых в пространстве

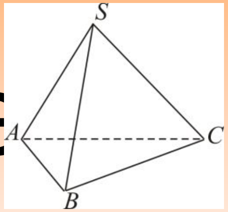


Две пересекающиеся прямые в пространстве называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом в содержащей их плоскости.

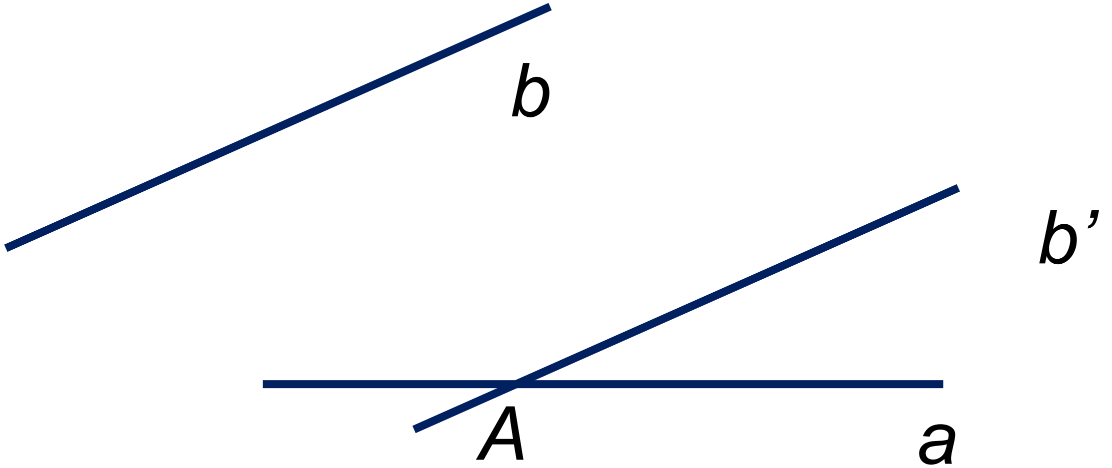




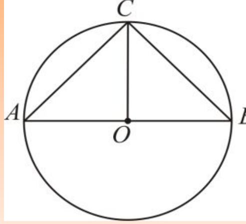
Перпендикулярные прямые

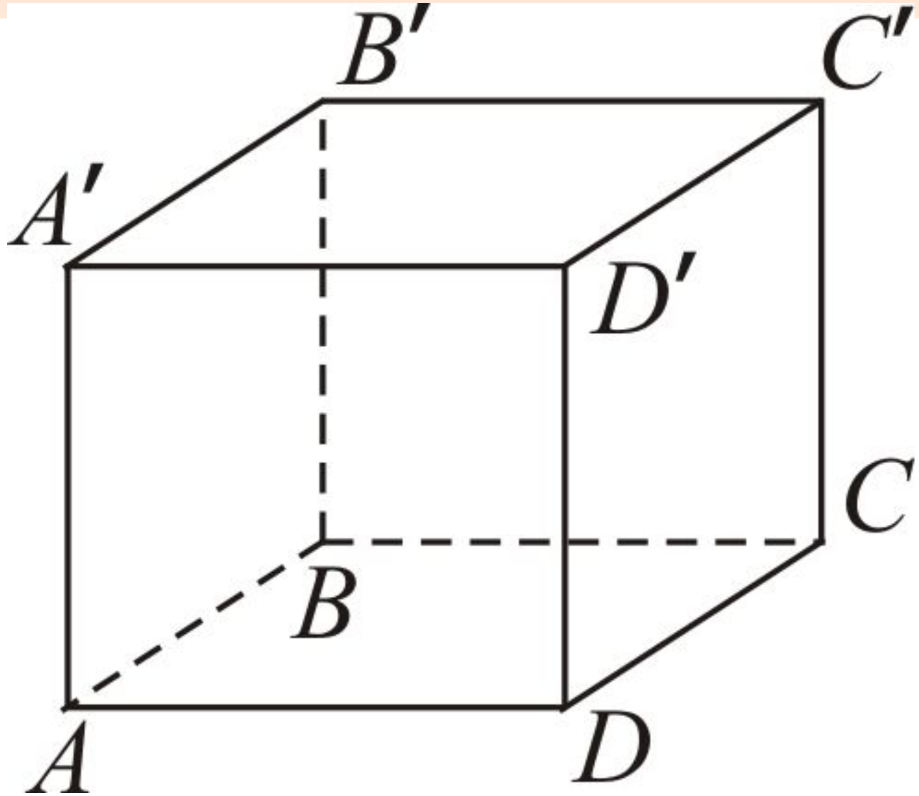


Две скрещивающиеся прямые называются *перпендикулярными*, если параллельные им пересекающиеся прямые перпендикулярны.



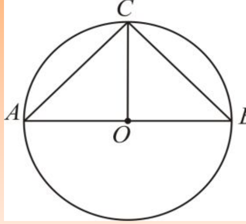
Пример



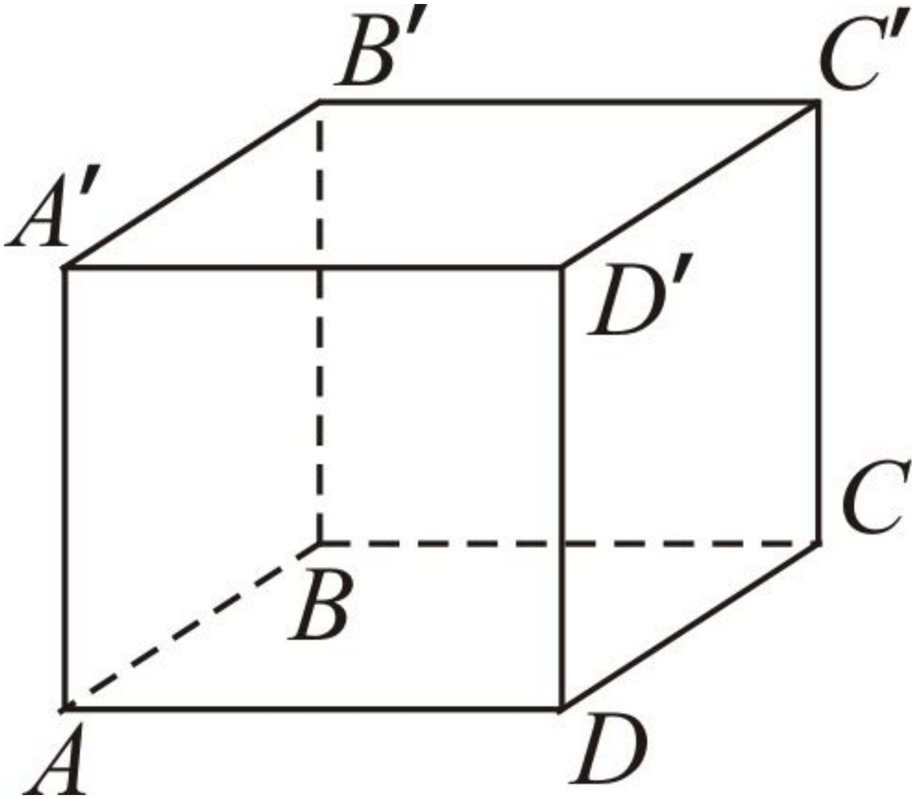


Назовите все прямые, перпендикулярные AD.

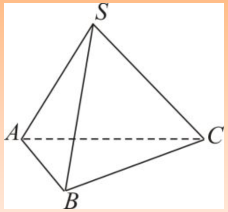
Вопрос



Как показать, что прямые АС и В’D’ перпендикулярны?



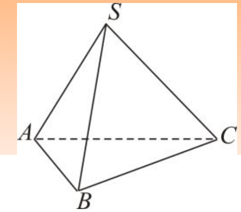
Теорема



Если две пересекающиеся прямые соответственно параллельны двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.

Доказательство в Погорелове в параграфе «Перпендикулярность прямых и плоскостей», теорема 17.1

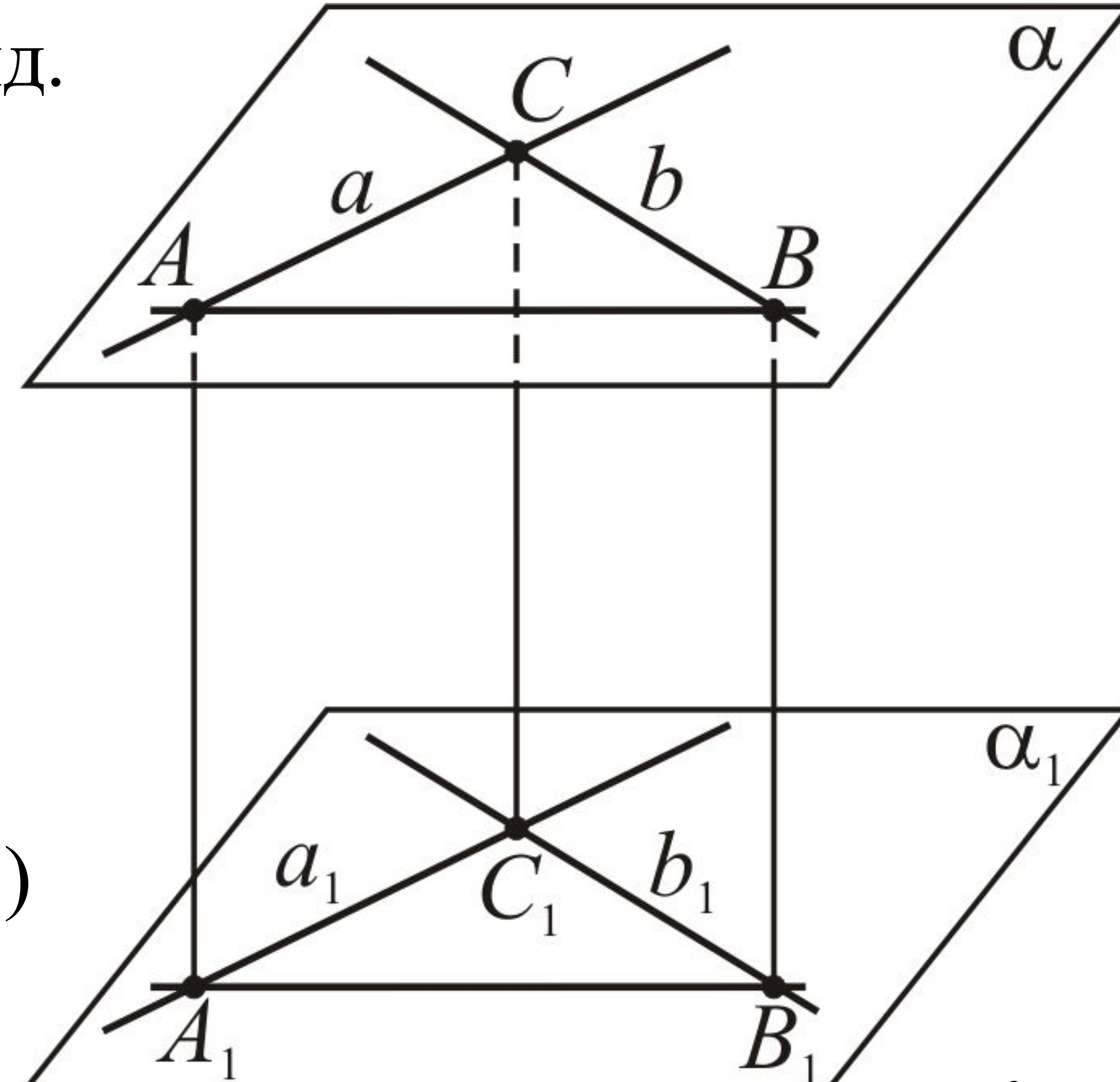
Доказательство



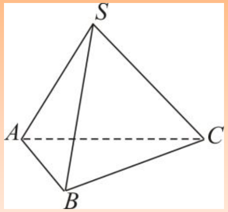
Дано: a и b – перпенд. прямые, a_1 и b_1 – параллельные им пересек. прямые.

Док-ть: a_1 и b_1 перпендикулярны.

(Через равенство тр-ков ACB и $A_1C_1B_1$)



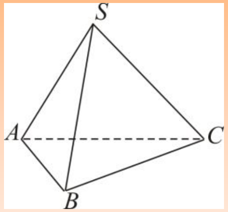
1. Задача на построение

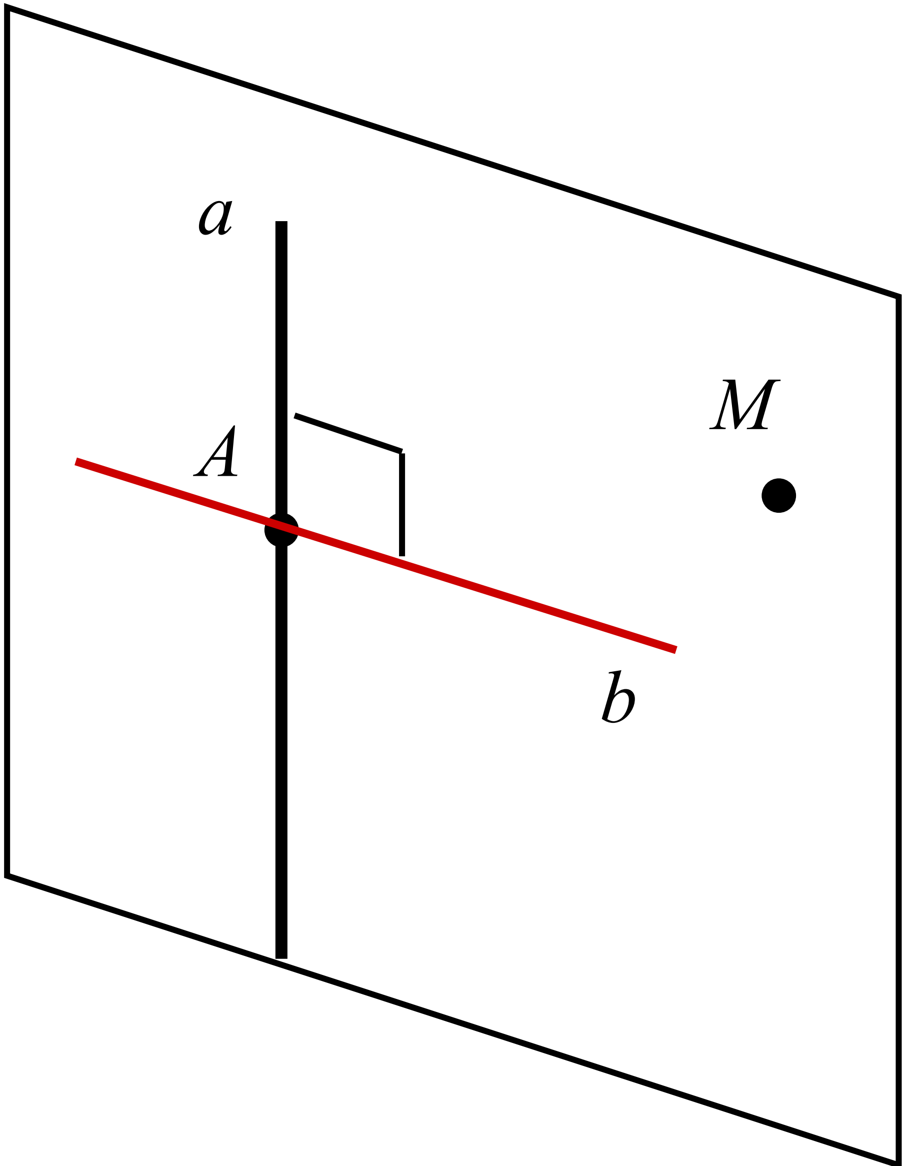


Можно ли через любую точку прямой в пространстве провести перпендикулярную ей прямую?

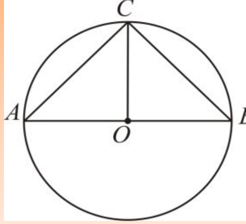
Если да, то сколько?

Ответ

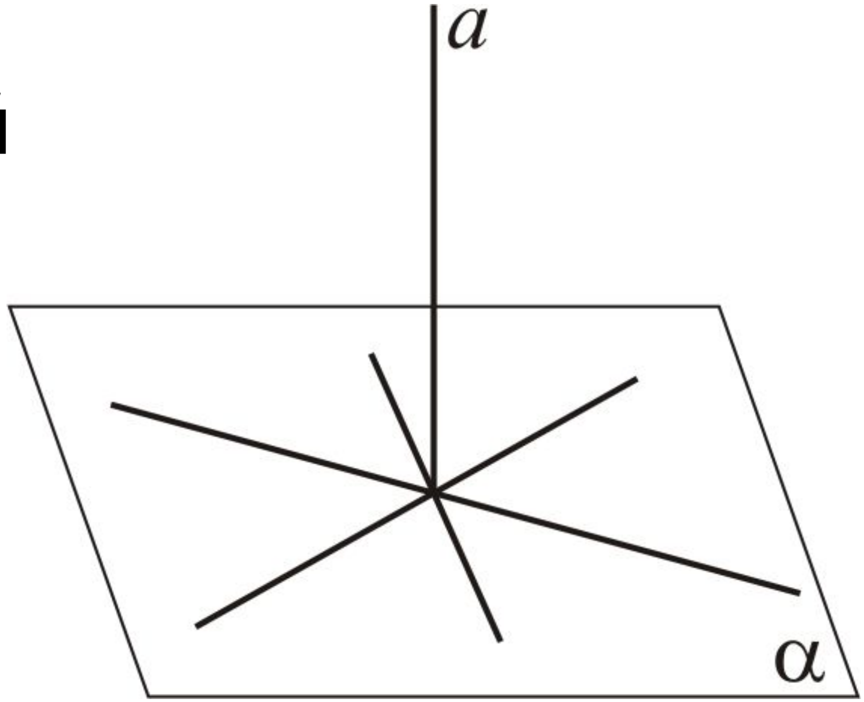




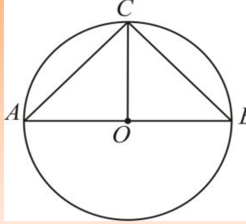
Перпендикулярность прямой и плоскости



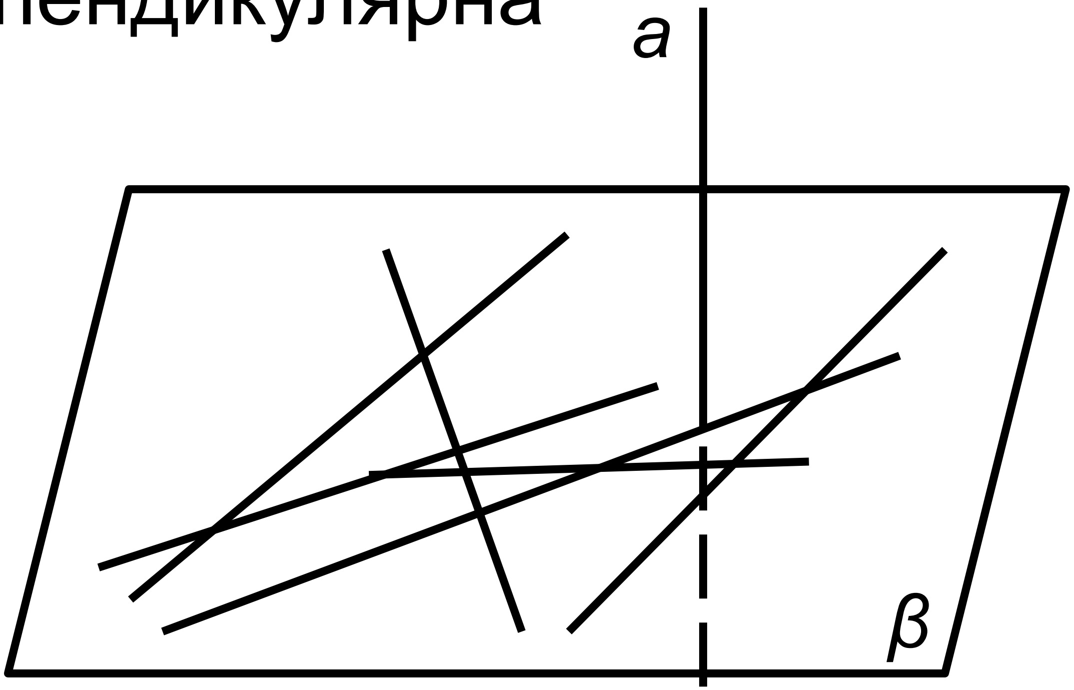
Прямая *a*, пересекающая плоскость *α*, называется *перпендикулярной* этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в данной плоскости и проходящей через точку пересечения.



Перпендикулярность прямой и плоскости

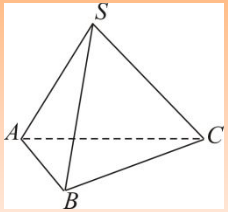


Прямая *a* и плоскость *β* в пространстве называются *перпендикулярными*, если прямая *a* перпендикулярна любой прямой в плоскости *β*.



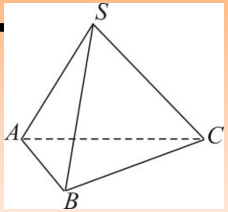
Обозначения:

$a \perp \beta$



Перпендикулярность прямой и плоскости обозначается знаком $\perp$.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

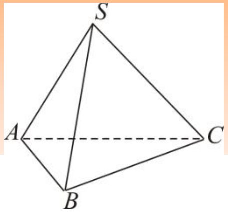


Если две пересекающие прямые, лежащие в плоскости β, перпендикулярны прямой а, то а $\perp$ β.

Другая формулировка.

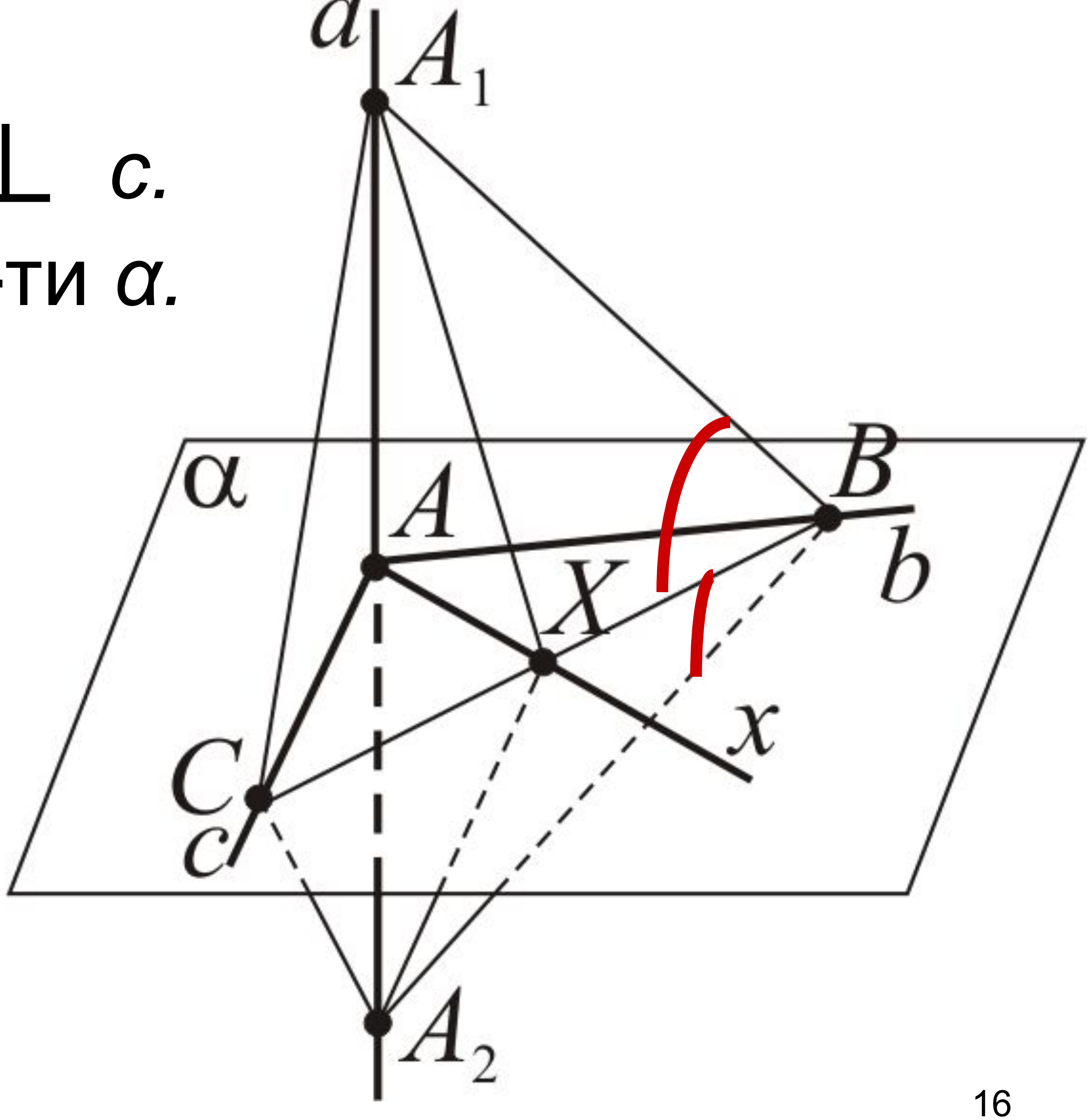
Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

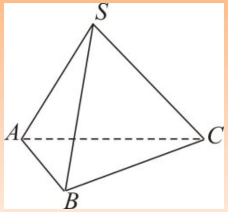
Доказательство

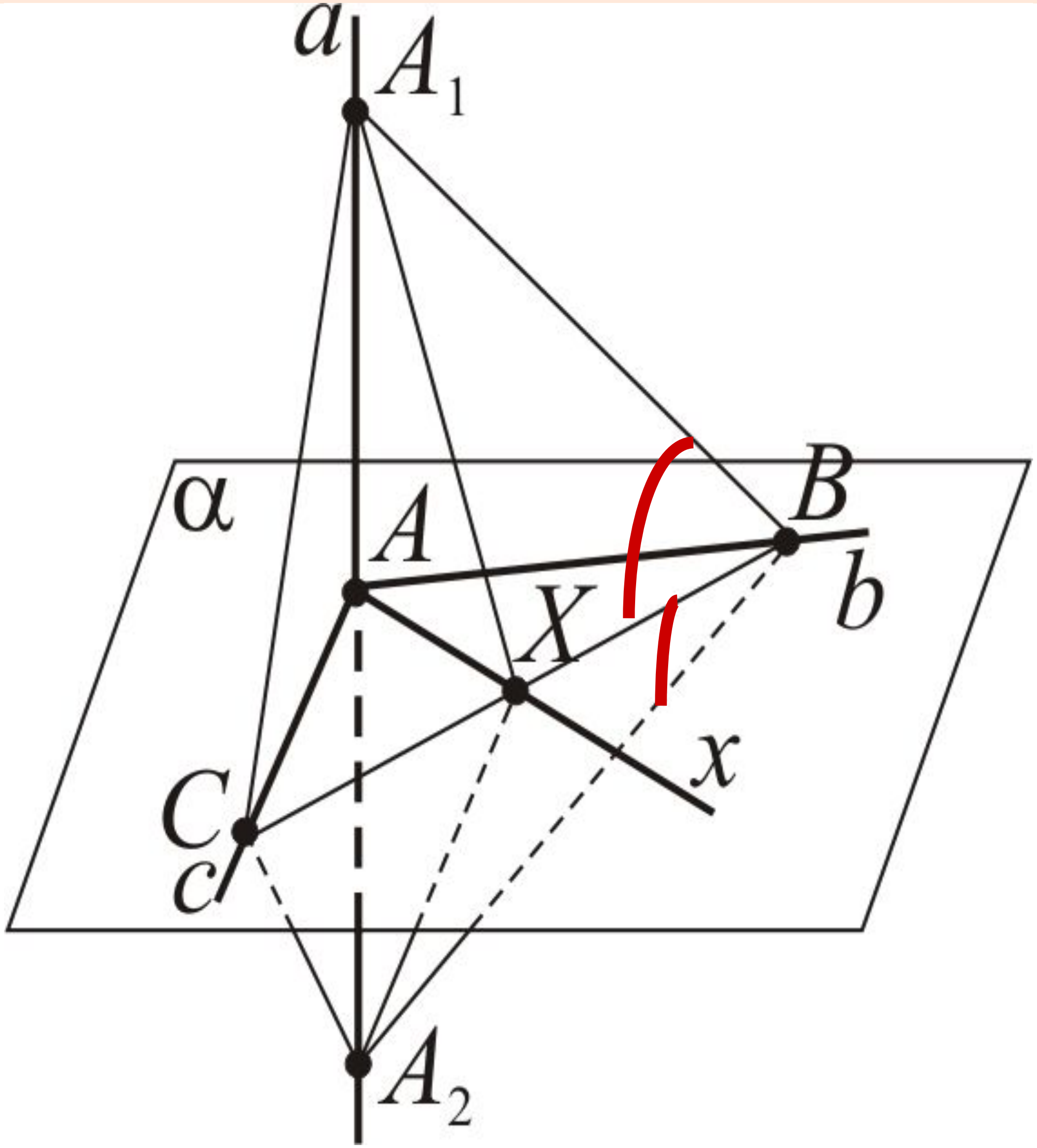


Дано: *a* ⊥ *b*, *a* ⊥ *c*.
Док-ть: *a* ⊥ пл-ти *α*.

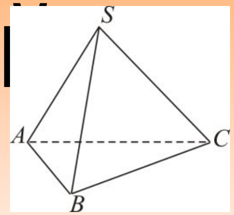
(Доказательство в Погорелове параграф 17)




S
A
C
B


a
A1
α
A
B
b
X
x
C
c
A2

Свойства перпендикулярности прямой и плоскости

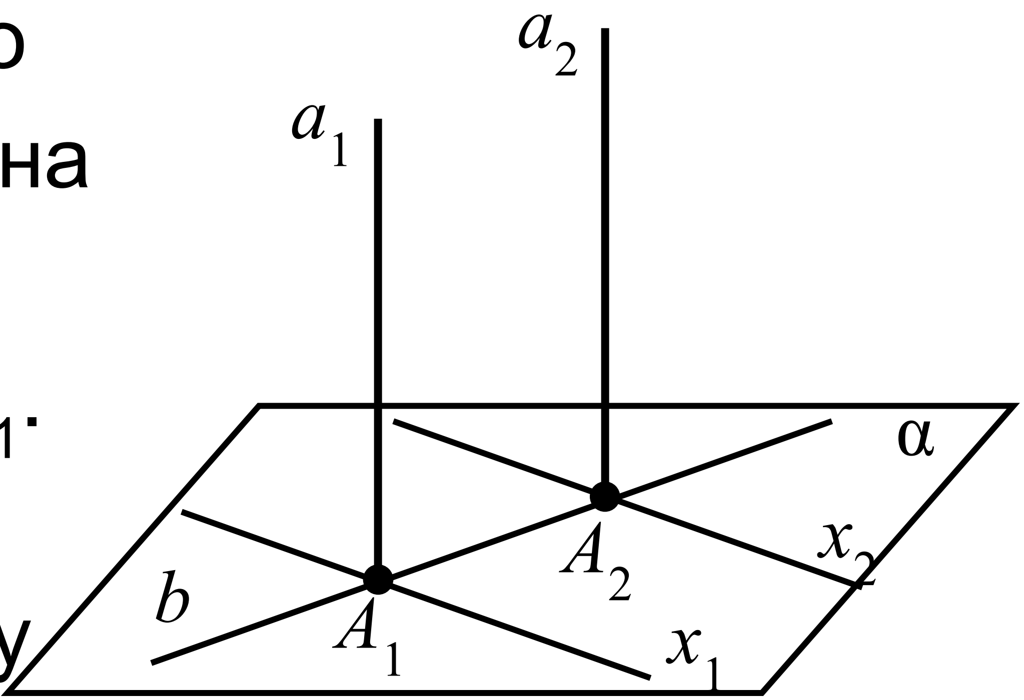


Т.1. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

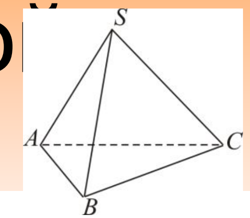
Дано: $a_1 || a_2$; $\alpha \perp a_1$.

Док-ть: $\alpha \perp a_2$.

(Ссылка на теорему со слайда 8)



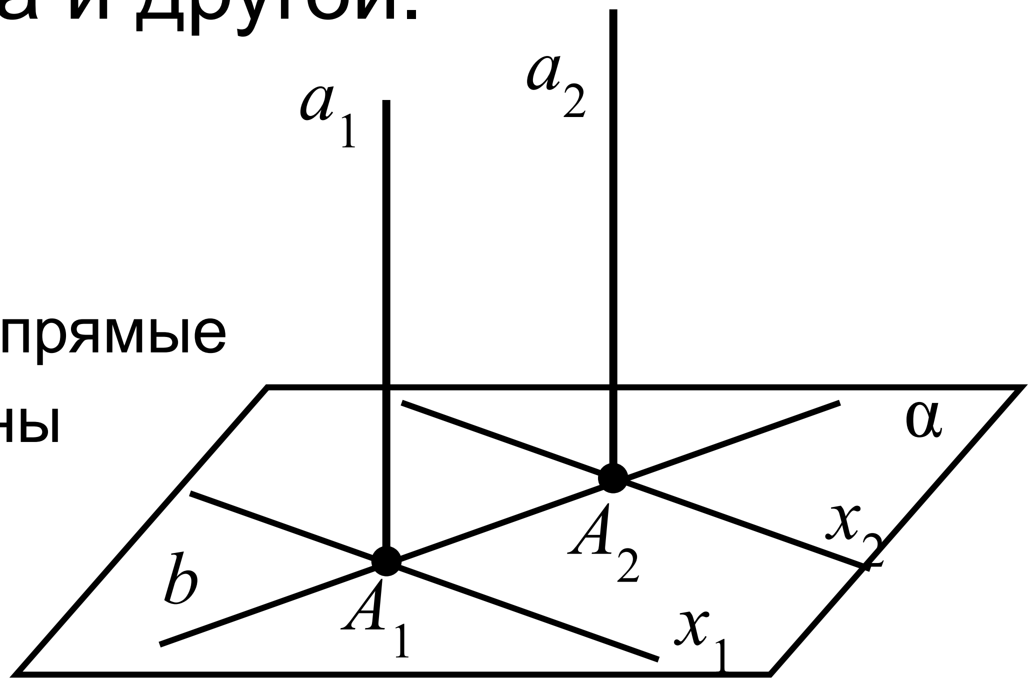
Свойства перпендикулярной прямо плоскости



Т.1. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

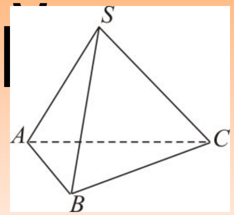
Дано: $a_1 || a_2$; $\alpha \perp a_1$.

Док-ть: $\alpha \perp a_2$.



Если две пересекающиеся прямые соответственно параллельны двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.

Свойства перпендикулярности прямой и плоскости



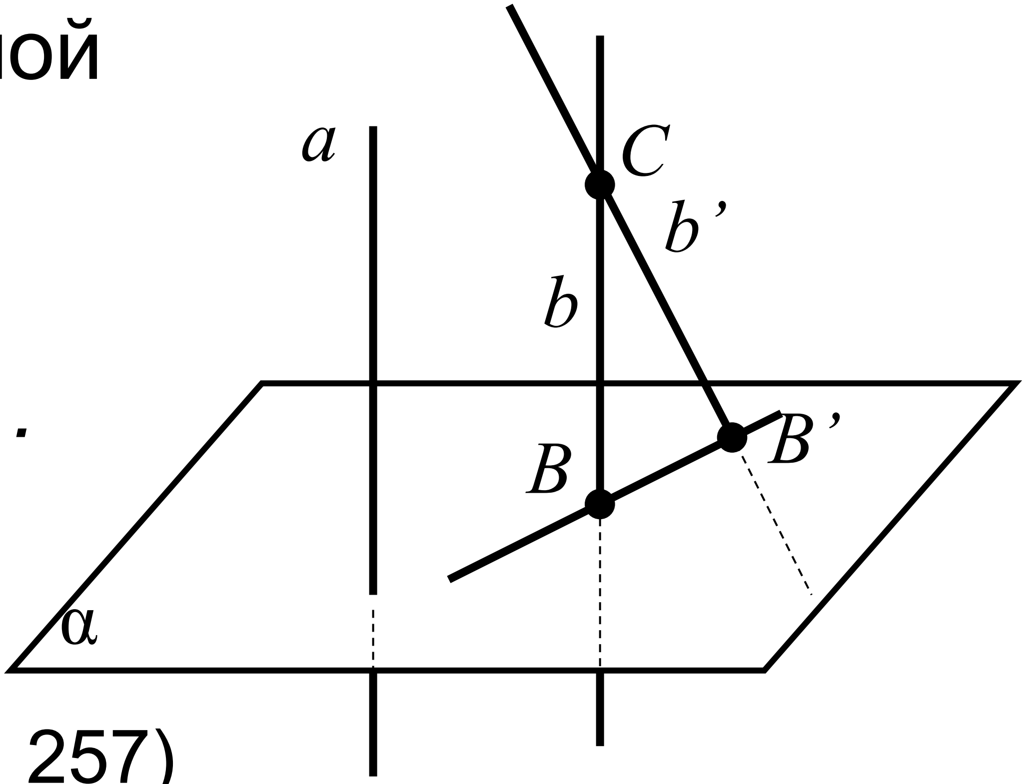
Т.2. Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

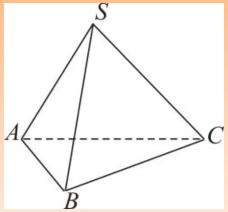
Дано: $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$.

Док-ть: $a \parallel b$.

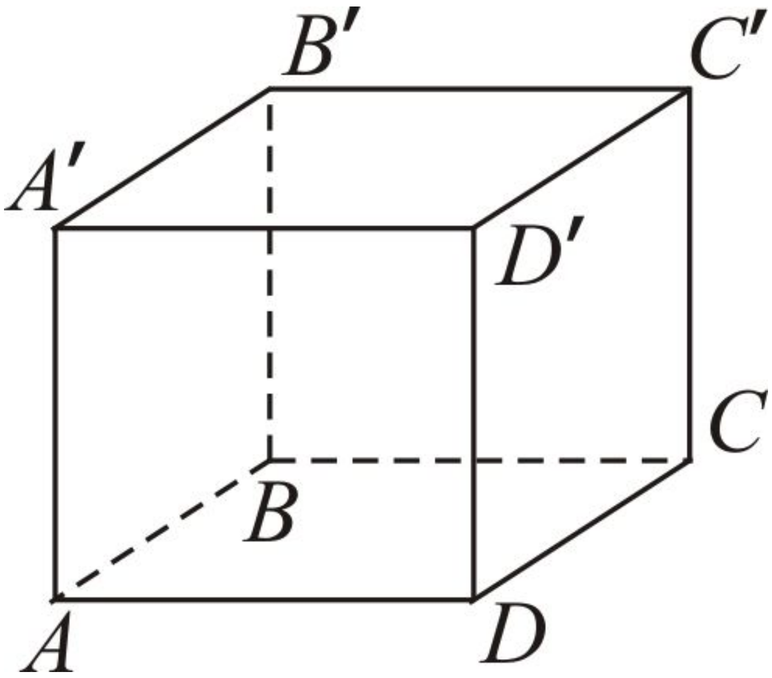
От противного.

См. теорему 17.4 (стр. 257)

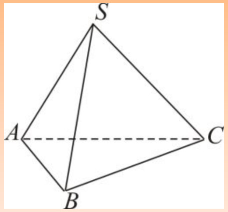




Теорема 3. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.



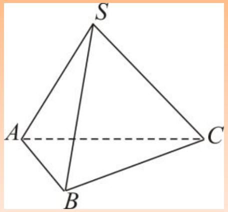
Обратное утверждение



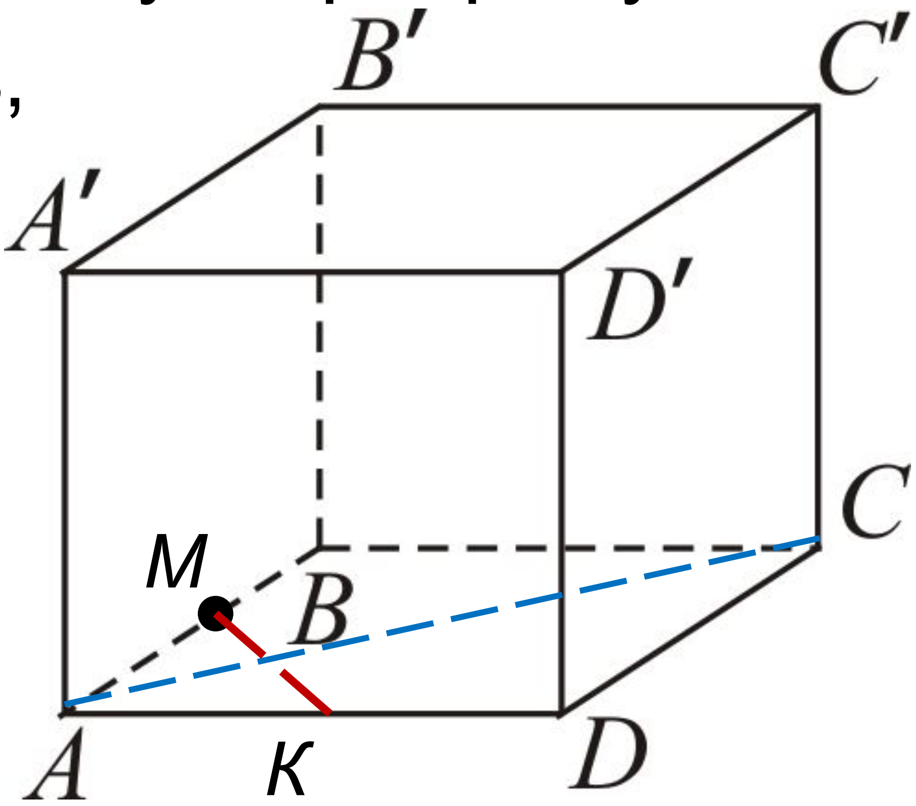
Верно обратное свойство.

Если прямая перпендикулярна двум различным плоскостям, то эти плоскости параллельны.

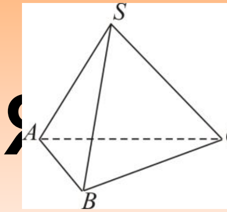
Задача на построение



Как через данную точку на ребре куба провести плоскость, перпендикулярную прямой АС?

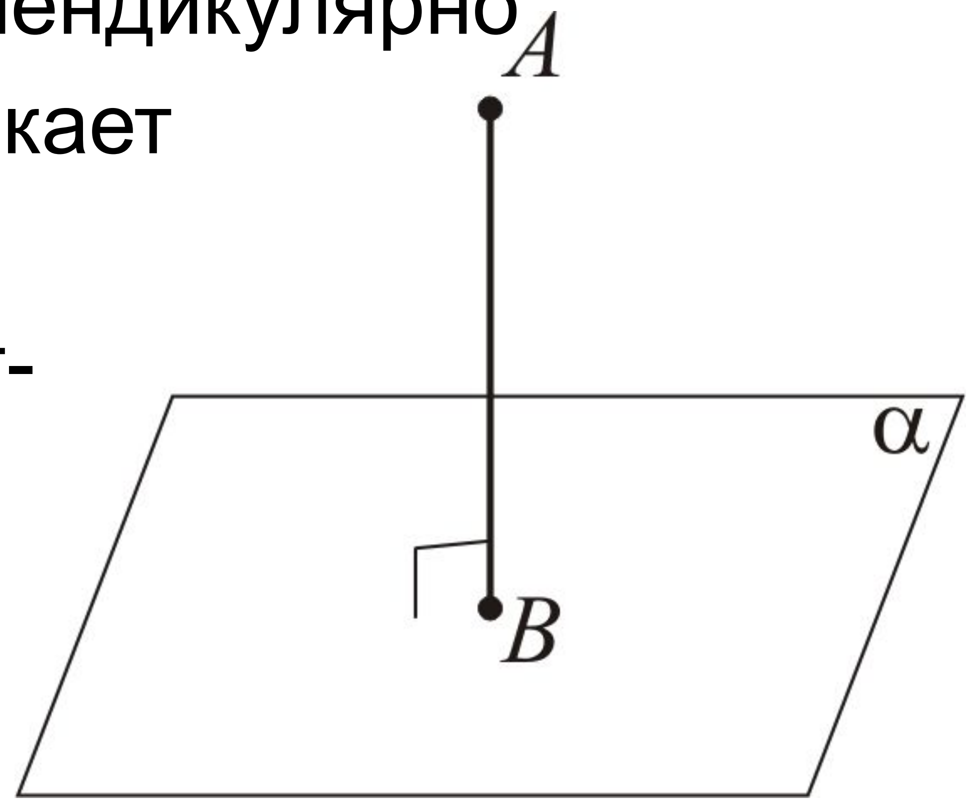


Перпендикуляр и наклонная

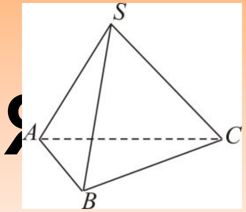


Пусть дана плоскость и точка *A* вне этой плоскости. Пусть прямая *a* проходит через точку *A* перпендикулярно плоскости *α* и пересекает ее в точке *B*.

Отрезок *AB* называется *перпендикуляром*, опущенным из точки *A* на плоскость *α*.



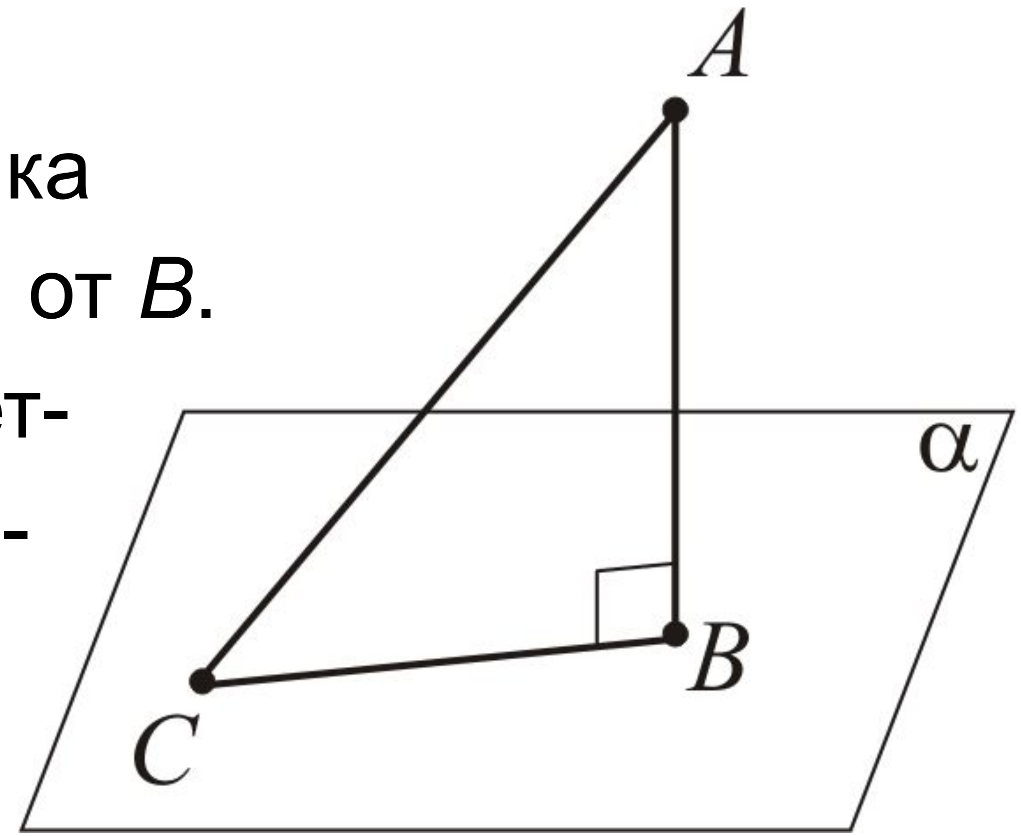
Перпендикуляр и наклонная



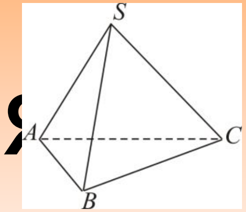
Точка *B* называется *основанием* этого перпендикуляра.

Пусть *C* – любая точка плоскости, отличная от *B*.

Отрезок *AC* называется *наклонной*, проведенной из точки А к плоскости *α*.

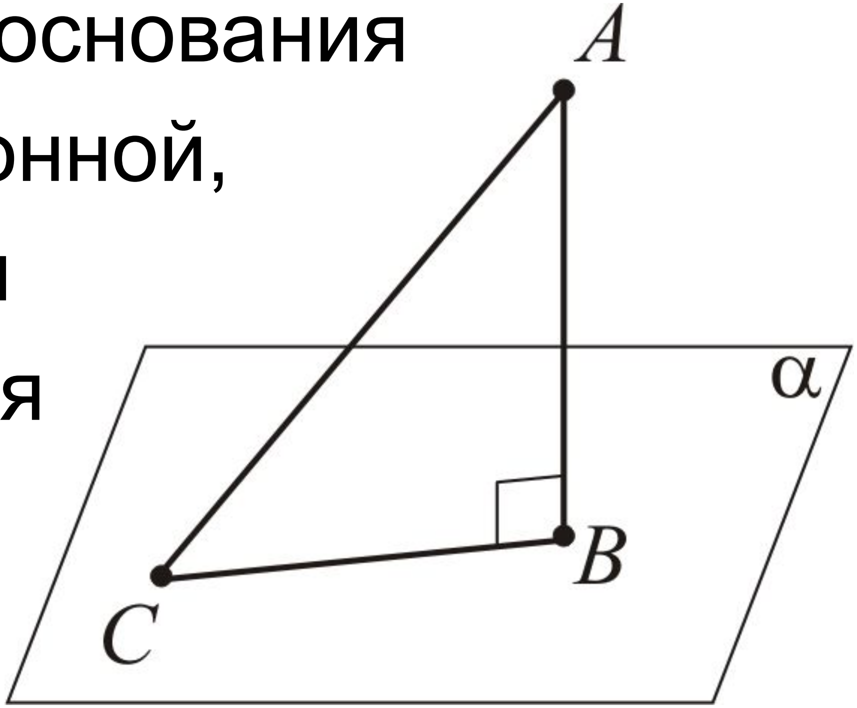


Перпендикуляр и наклонная



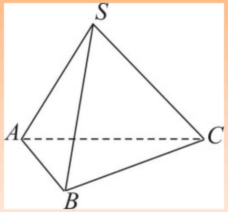
Точка *C* называется *основанием* наклонной.

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется *проекцией наклонной* на плоскость *α.*

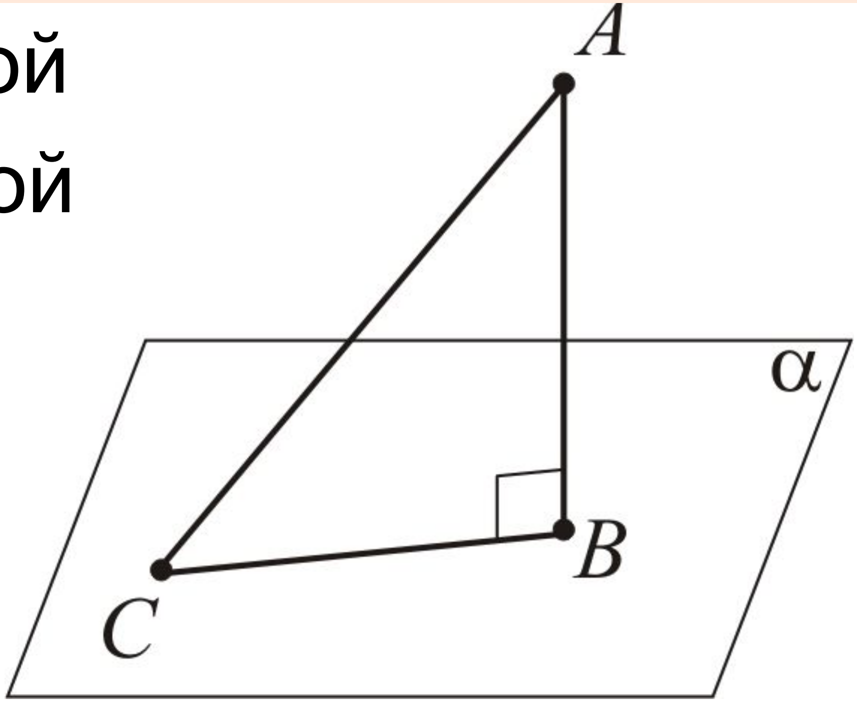


BC – проекция *AC*.

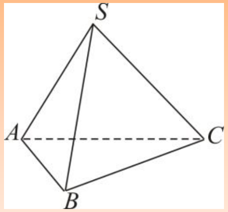
Определение наклонной



Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку *A* с точкой плоскости, и не являющийся перпендикуляром.



Свойство перпендикуляра и наклонной



Длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости,

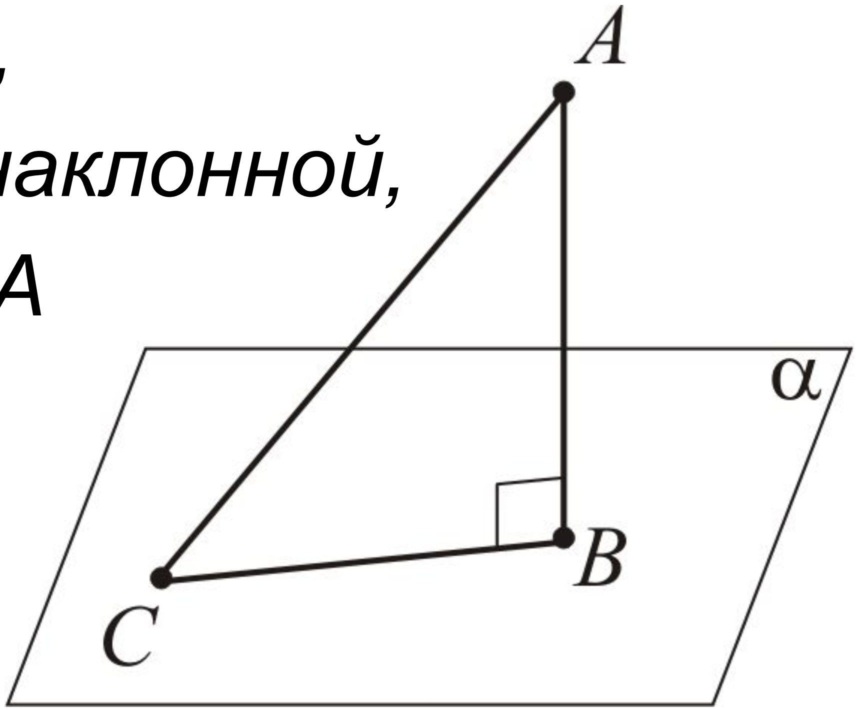
меньше длины любой наклонной,

проведенной из точки A

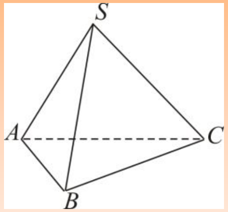
к этой же плоскости.

Другими словами,

перпендикуляр к плоскости короче наклонной.



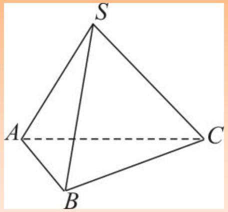
Расстояние от точки до плоскости



Расстоянием от точки *M*, не лежащей в плоскости, до плоскости *α* называется длина перпендикуляра, проведенного из точки *M* на данную плоскость.

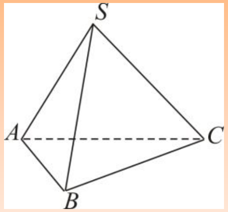
Найти расстояние от точки до плоскости – это значит найти длину перпендикуляра.

Вопросы



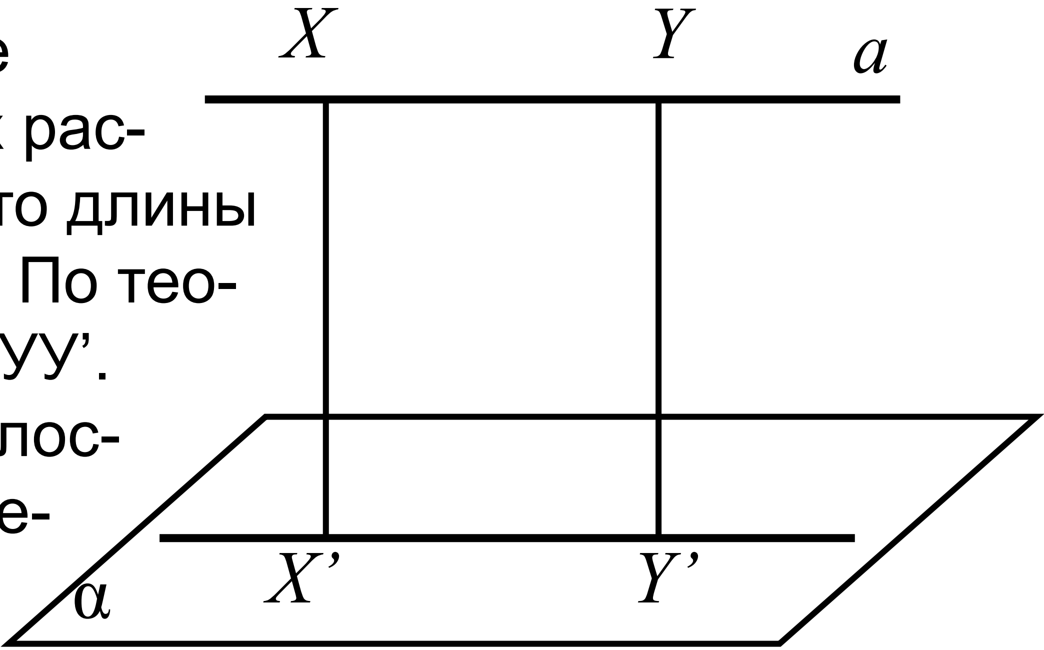
1. Дана точка *M* и плоскость *α*. Сколько можно построить перпендикуляров из точки *M* к плоскости *α*?
2. Сколько можно построить наклонных из точки M к этой плоскости?
3. Сколько можно построить наклонных из точки M заданной длины?
4. Где лежат основания таких наклонных?

Задача

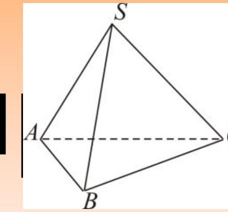


Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости.

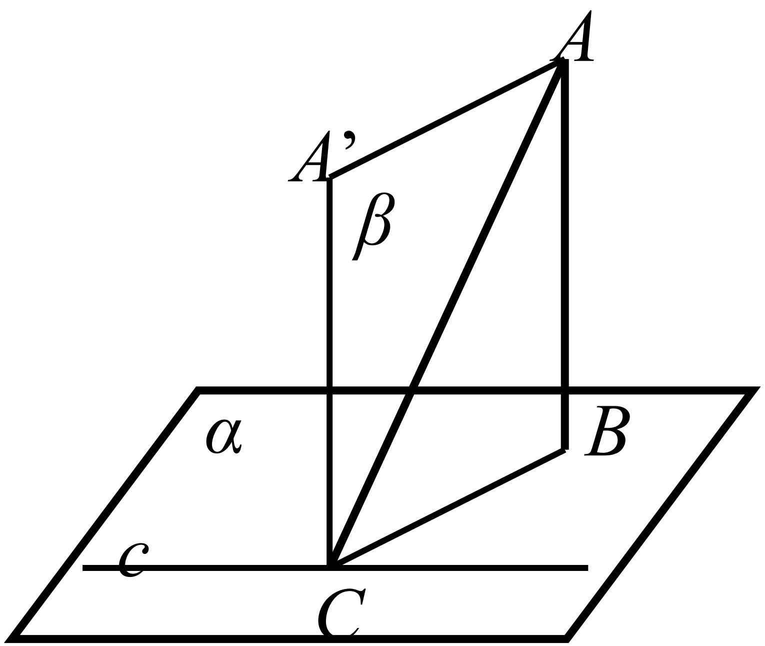
Возьмем две произвольные точки Х и У на прямой а. Их расстояния до плоскости *α* – это длины перпендикуляров ХХ’ и УУ’. По теореме (сл. 19) прямые ХХ’ || УУ’. Сл-но, они лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает пл. *α* по прямой Х’У’. Прямая а || Х’У’, так как не пересекает пл. *α.* Тогда четырехугольник ХХ’У’У – параллелограмм.



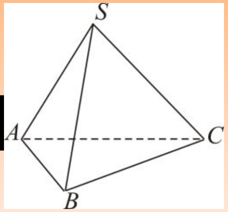
Теорема о трех перпендикуляр



Прямая теорема. Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной.



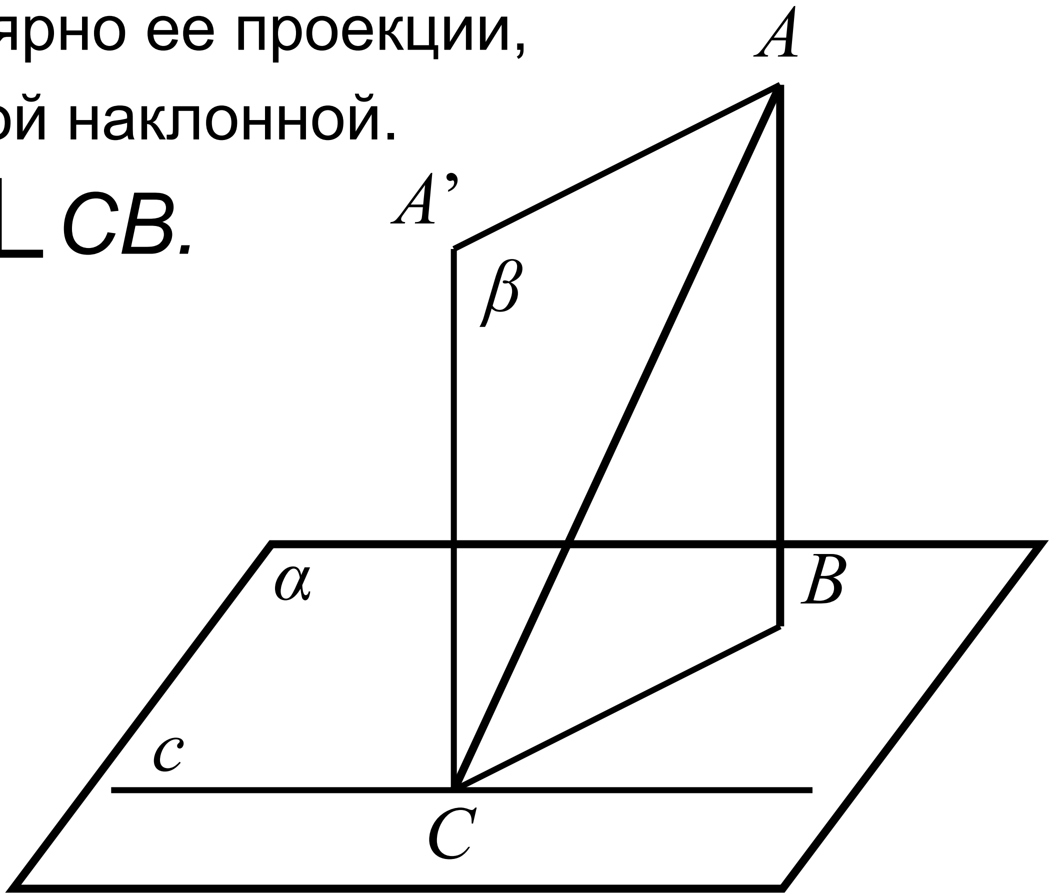
Доказательство прямой теорем



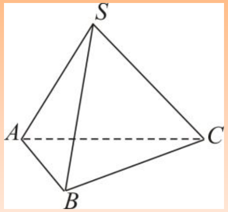
Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной.

Дано: $AB \perp \alpha$, $c \perp CB$.

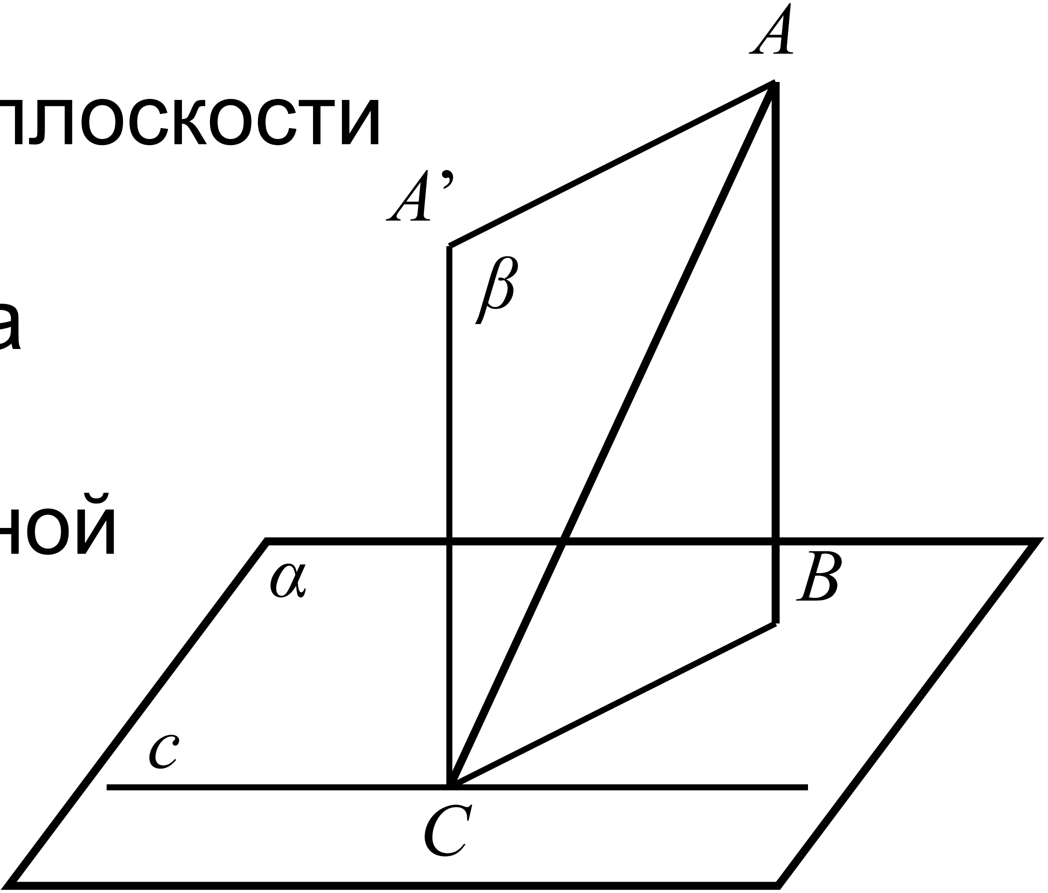
Док-ть: $c \perp AC$.



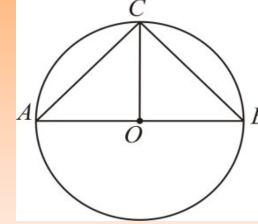
Обратная теорема



Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость.

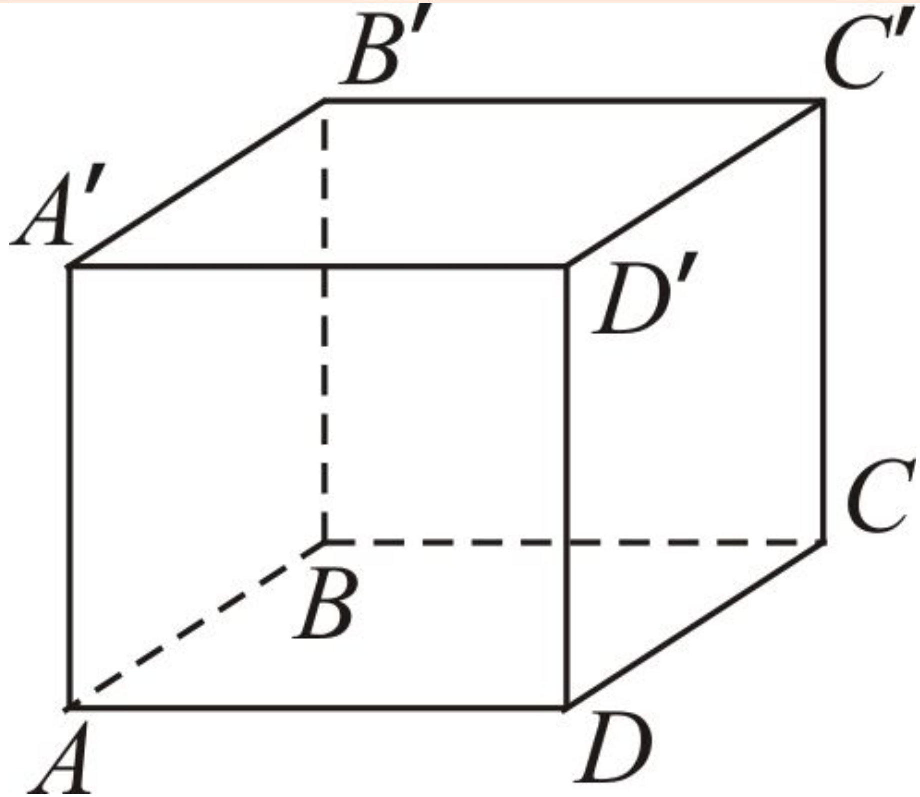


Задача 1

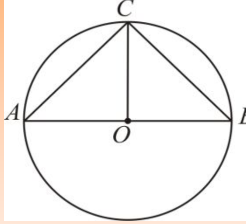


У наклонной AC’ найдите проекцию:

1) на пл-ть ABCD;
2) AA’B’B;
3) BB’C’C;
4) A’B’C’D’;
5) DD’C’C.



Задача 2

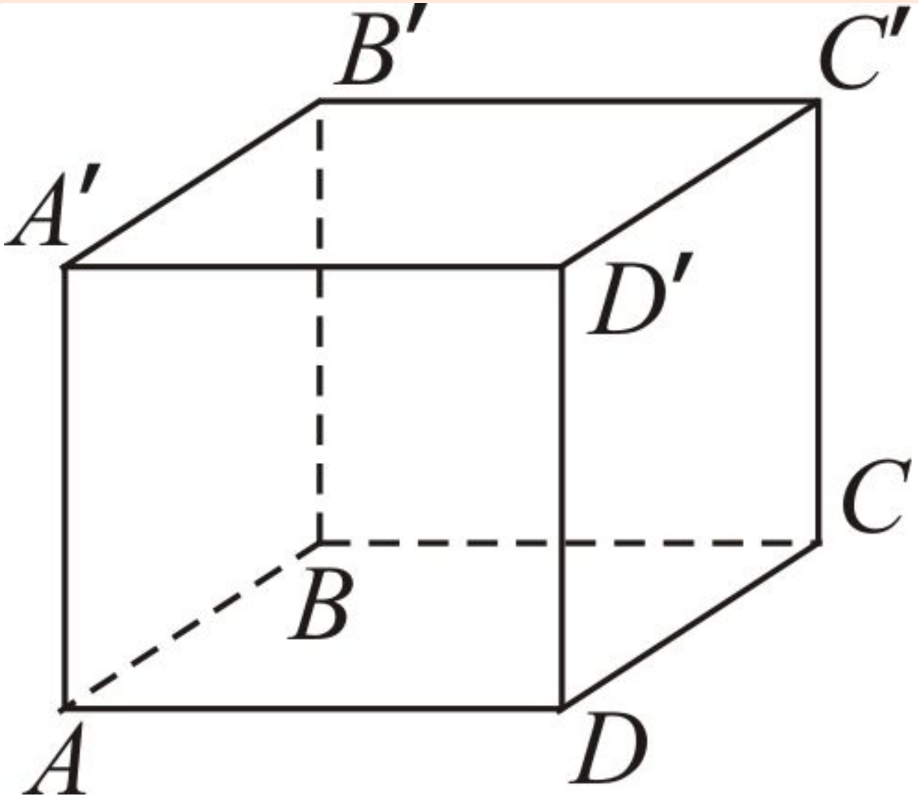


Вычислите длину главной диагонали куба, 1) если ребро куба равно 1.

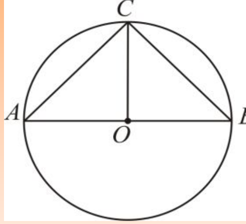
Ответ: $\sqrt{3}$

2) Ребро куба равно а.

Ответ: $a\sqrt{3}.$

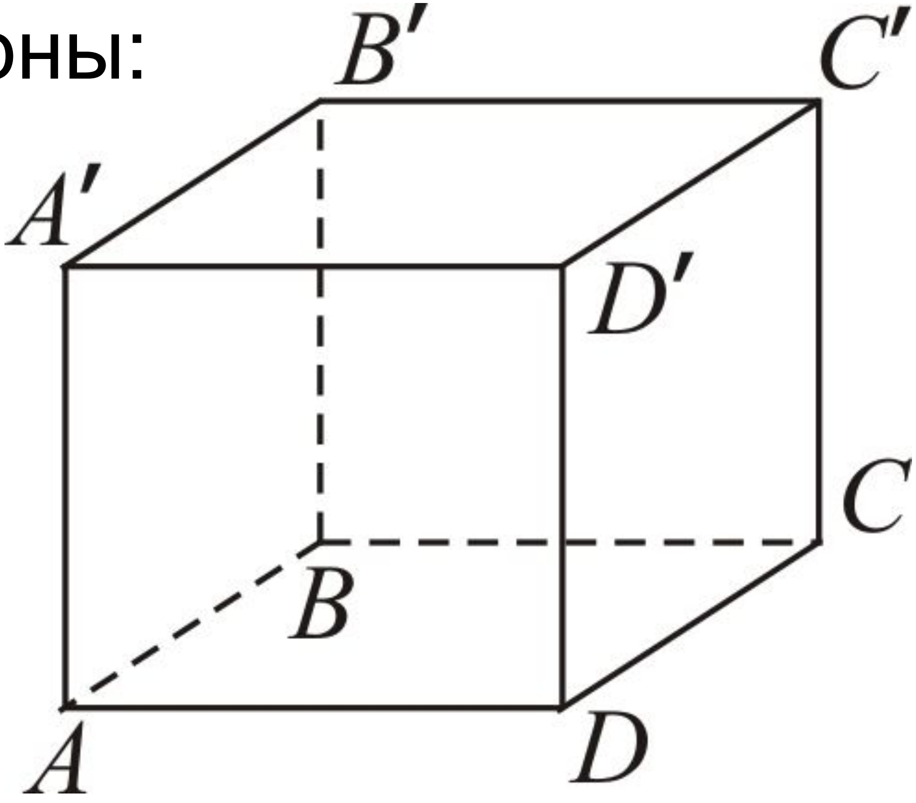


Задача 3

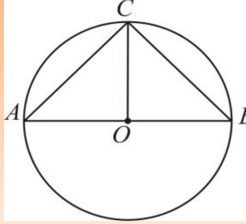


Доказите, что следующие прямые перпендикулярны:

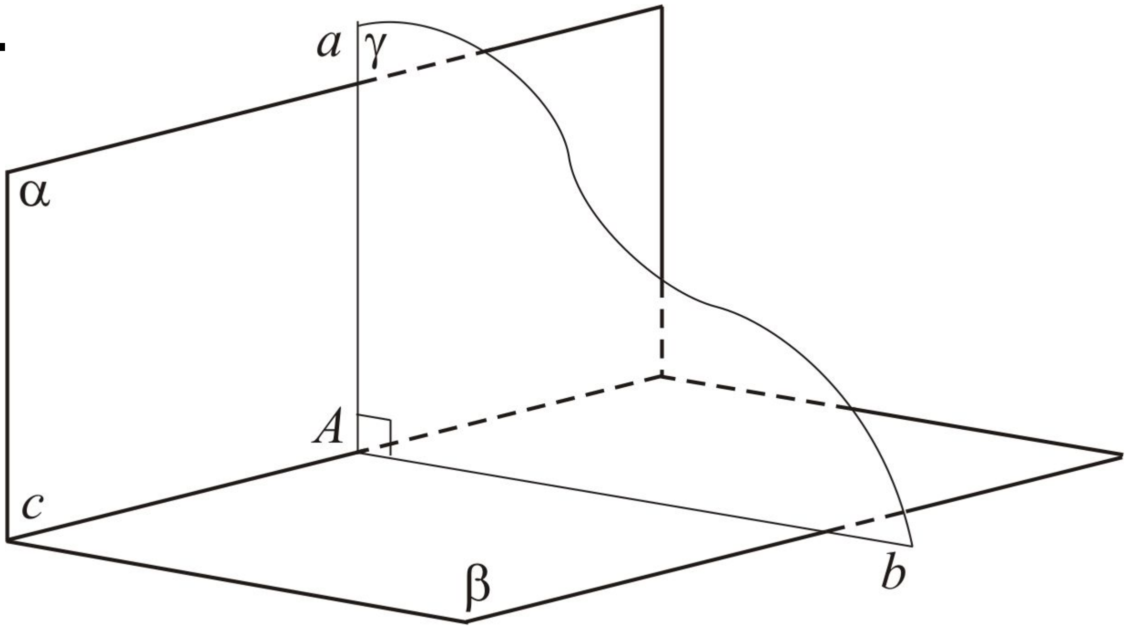
1) AC’ и BD;
2) AB и CC’;
3) DC’ и BC;
4) AA’ и B’D’;
5) B’C и AD’;
6) A’C’ и BD;
7) AB’ и BC.



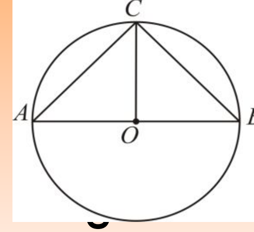
Перпендикулярность плоскостей



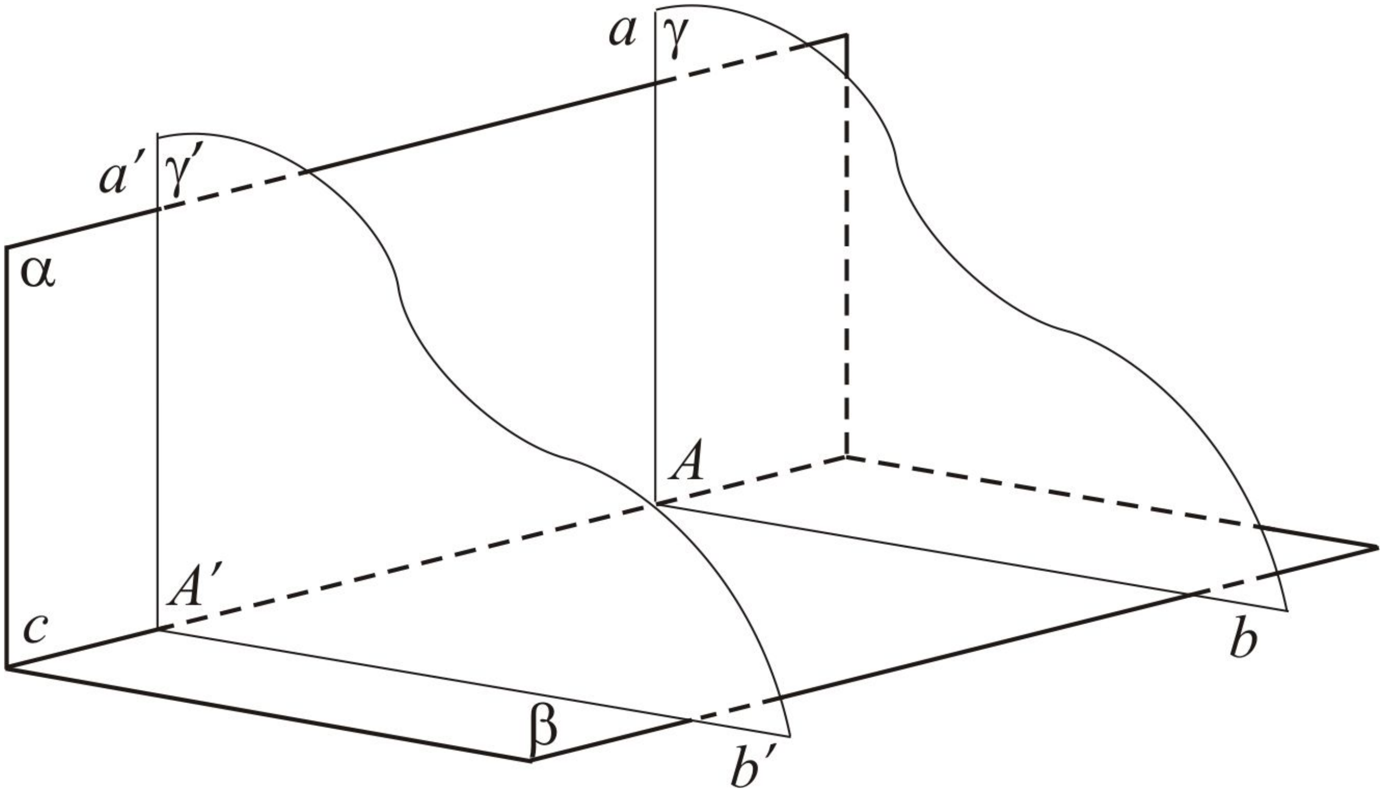
Две пересекающиеся плоскости называются ***перпендикулярными***, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.



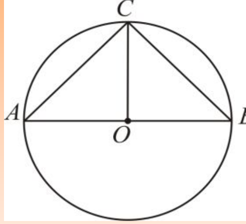
Утверждение



Любая плоскость, перпендикулярная прямой пересечения перпендикулярных плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.



Признак перпендикуляр-ности плоскостей

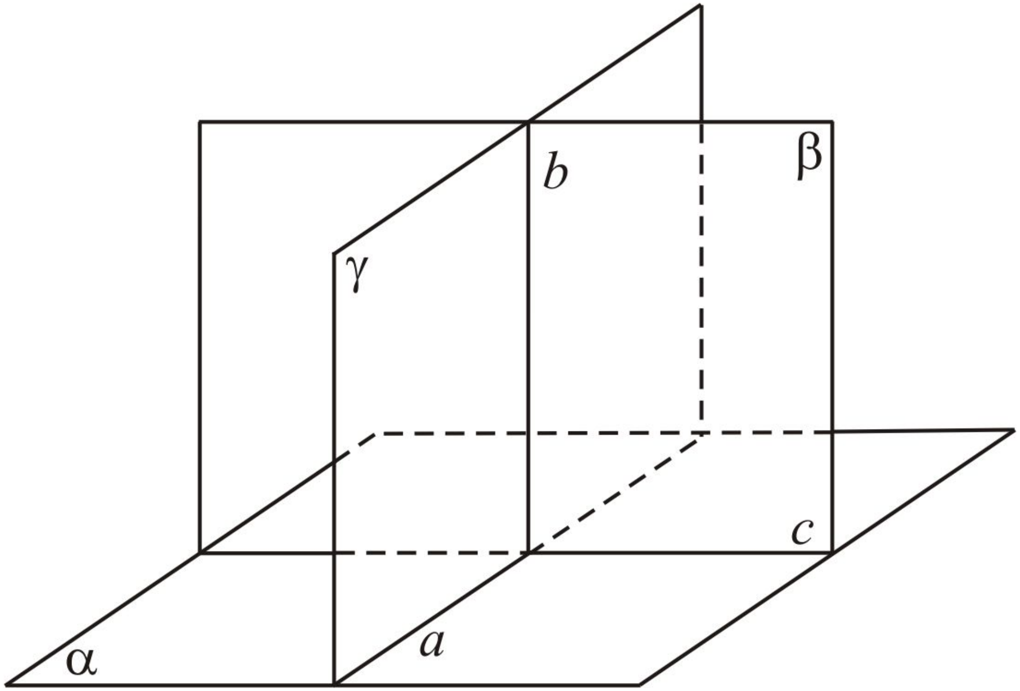


Теорема. Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны

Дано: $b \perp \alpha$,

β содержит b.

Док-ть: $\alpha \perp \beta$



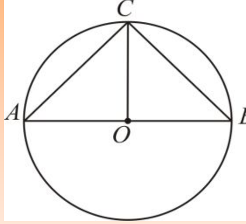
Теорема о прямой, перпендикулярной линии пересечения двух взаимно перпендикулярных плоскостей

Если в одной из двух перпендикулярных плоскостей проведена прямая перпендикулярно их линии пересечения, то эта прямая перпендикулярна другой плоскости.

Дано: пл-ти $\alpha \perp \beta$; пр. *с* = $\alpha \cap \beta$; пр. $a \perp c$

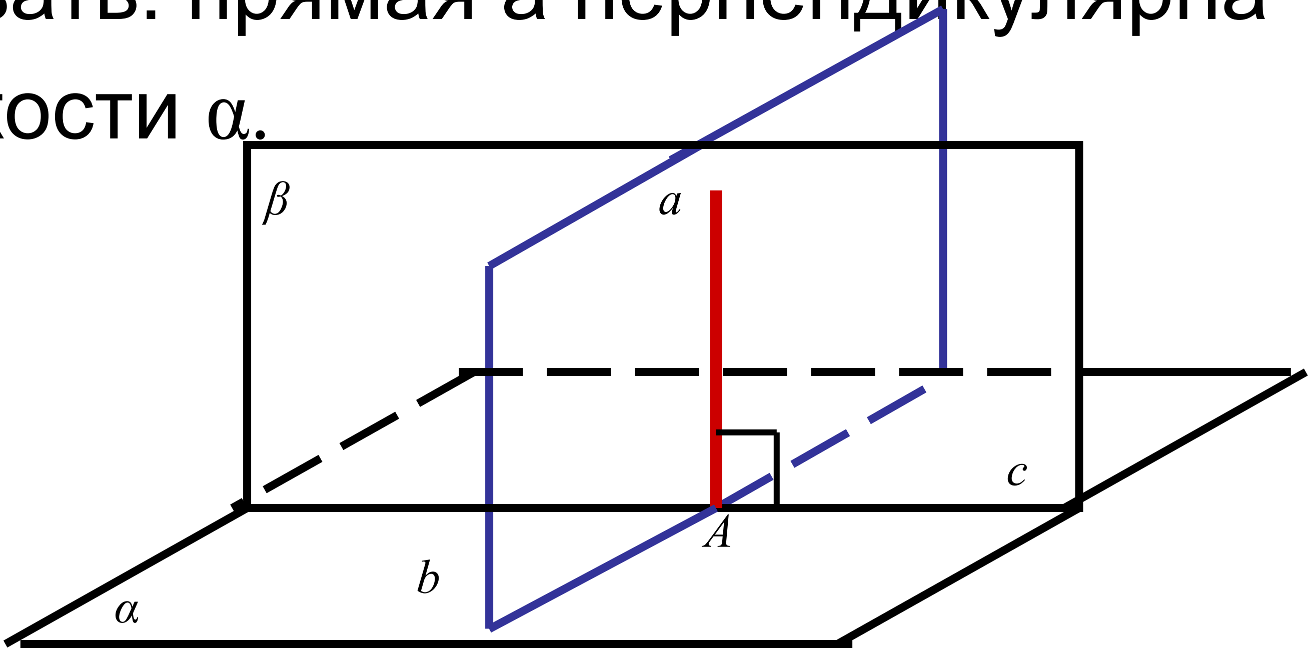
Доказать: прямая *а* $\perp$ пл-ти α.

Доказательство

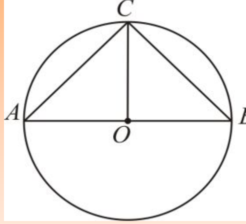


Дано: пл-ти $\alpha \perp \beta$; пр. с = $\alpha \cap \beta$; пр. $a \perp c$.

Доказать: прямая а перпендикулярна плоскости α.

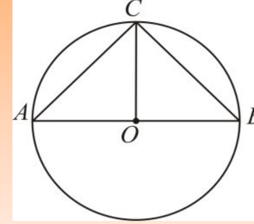


Литература



1. Учебник по геометрии под ред. Погорелова

Домашнее задание



1. Выучите определение прямой, перпендикулярной плоскости
2. Выучите признак перпендикулярности прямой и плоскости
3. Выучите теорему о трех перпендикулярах с доказательством в обе стороны
4. Выучите признак перпендикулярности плоскостей