Тема 2. Численное интегрирование

Лекция 6. Методы численного интегрирования.

1. Обзор методов численного интегрирования.
2. Метод прямоугольников.
3. Метод трапеций.
4. Численное интегрирование методом Симпсона.

Литература: [1] с.123-134.

1. Обзор методов численного нтегрирования

Задача численного интегрирования- вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ используя ряд значений подинтегральной функции y=f(x), которые известны заранее.

Методы численного интегрирования:

- Методы Ньютона-Котеса – основаны на аппроксимации подинтегральной функции полиномами степени n при равноотстоящих друг от друга узлах;

- Методы сплайн – интегрирования основаны на аппроксимации подинтегральной функции сплайнами – функциями, форма которых близка к интегрируемой функции;
- Метод Гаусса использует специально выбираемые неравноотстоящие узлы, что обеспечивает высокую точность вычислений;
- Метод Монте-Карло используется для вычисления кратных интегралов на случайно выбираемых узлах; результат является случайной величиной и определяется с заданной вероятностью.

Методы Ньютона-Котеса предусматривают разбиение интервала интегрирования **[a,b]** на n равных частей с шагом:

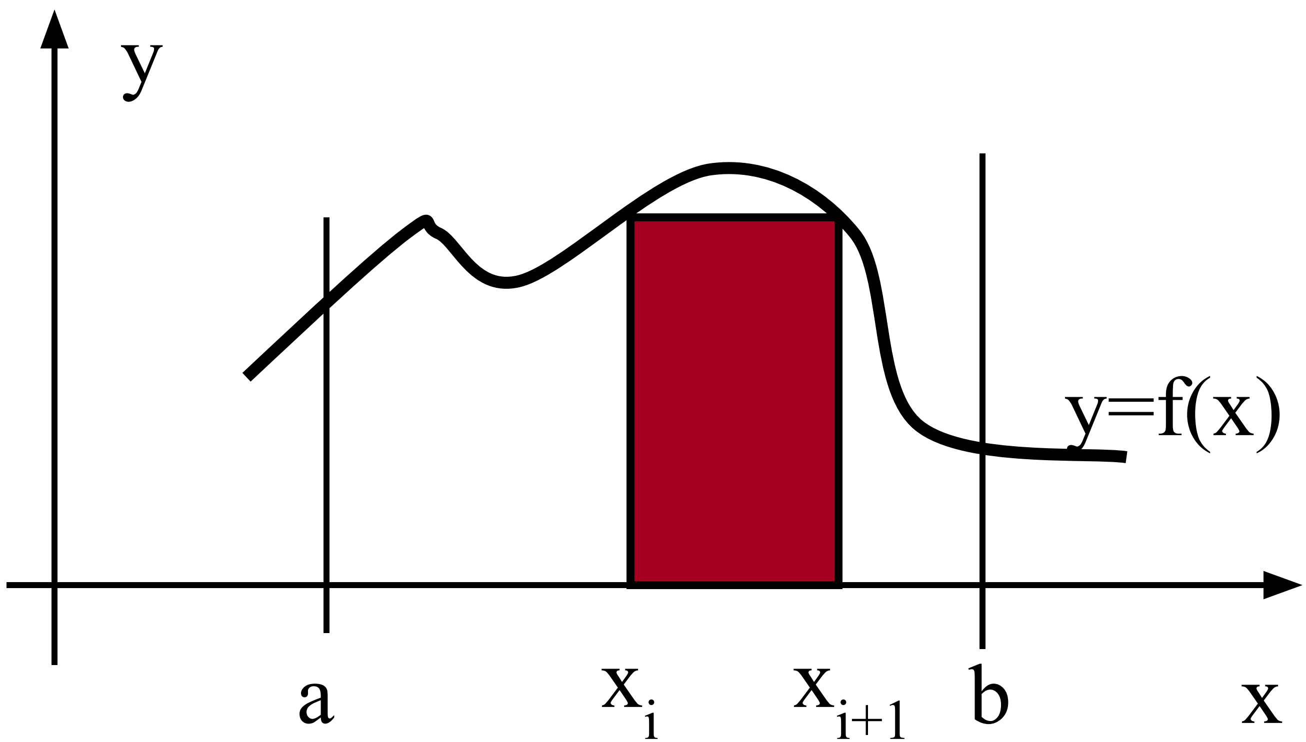
$$\mathbf{h=x_{i+1}-x_i=(b-a)/n,\ \ \overline{i=1,n}} \qquad (4)$$

При этом известны в узлах разбиения значения подинтегральной функции известны:

$$\mathbf{y_i=f(x_i)} \qquad (5)$$

2. Метод прямоугольников

Интерполяционный многочлен 1-го порядка, т. е. линейная интерполяция.



$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{k=1}^{n} f(\alpha + kh) \qquad (6)$$

1. Если узел α=a- левому краю отрезка интегрирования, то (6) – формула «левых» прямоугольников;
2. Если узел α=$\mathbf{x_{i+1}}$ –правому краю отрезка, то (6) – формула «правых» прямоугольников;
3. Если узел α=$\mathbf{(x_{i+1}+x_i)/2}$ – середине отрезка то (6) – формула «средних» прямоугольников;

Погрешности:

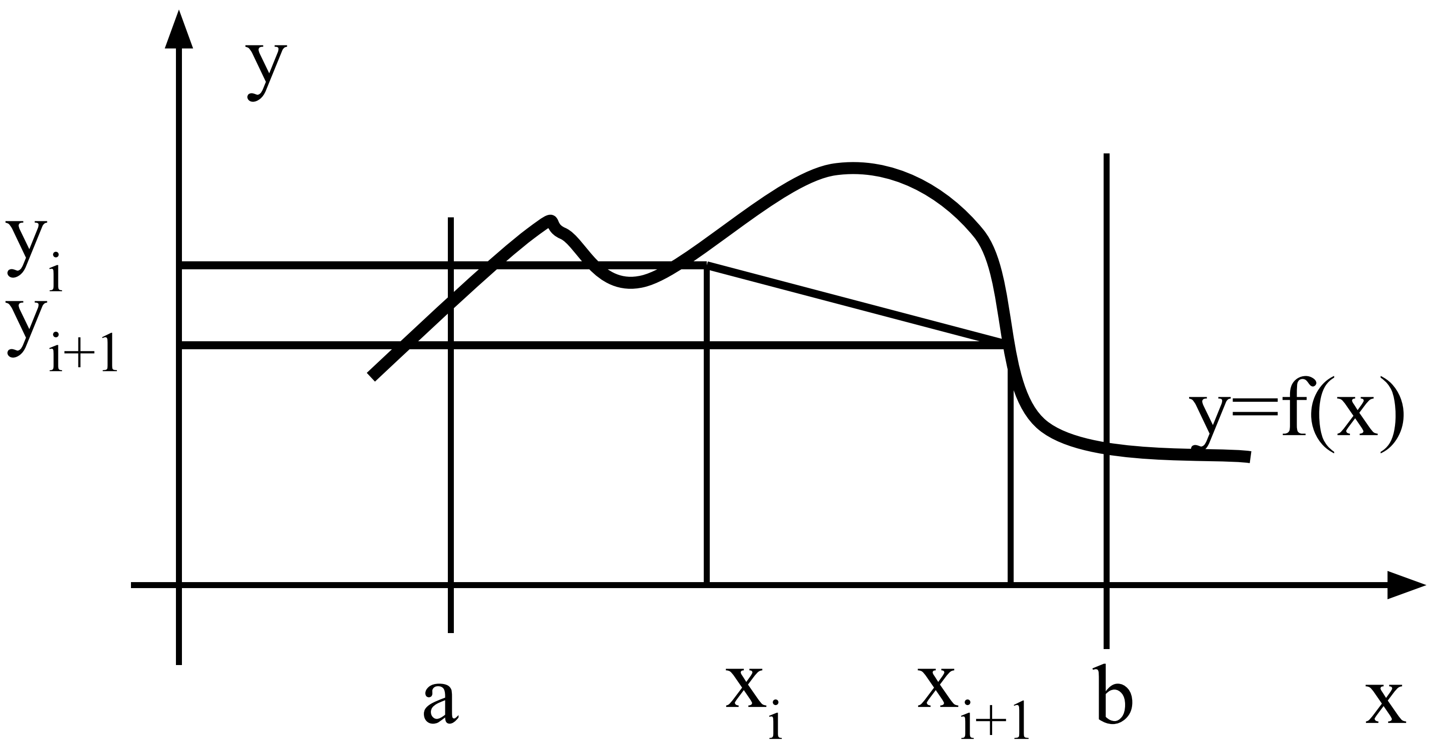
$$R_n(f,a)=\frac{(b-a)^2}{2n}\max\{f'(x)\};$$

$$R_n(f,a+h)=-\frac{(b-a)^2}{2n}\max\{f'(x)\}; \qquad (7)$$

$$R_n(f,a+h/2)=\frac{(b-a)^3}{24n^2}\max\{f''(x)\};$$

3. Метод трапеций

Интерполяционный многочлен 1-го порядка, т. е. линейная интерполяция.



$$\int_a^b f(x)dx = h/2[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + y_n] \tag{8}$$

Погрешность:

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max\{f''(x)\} \tag{9}$$

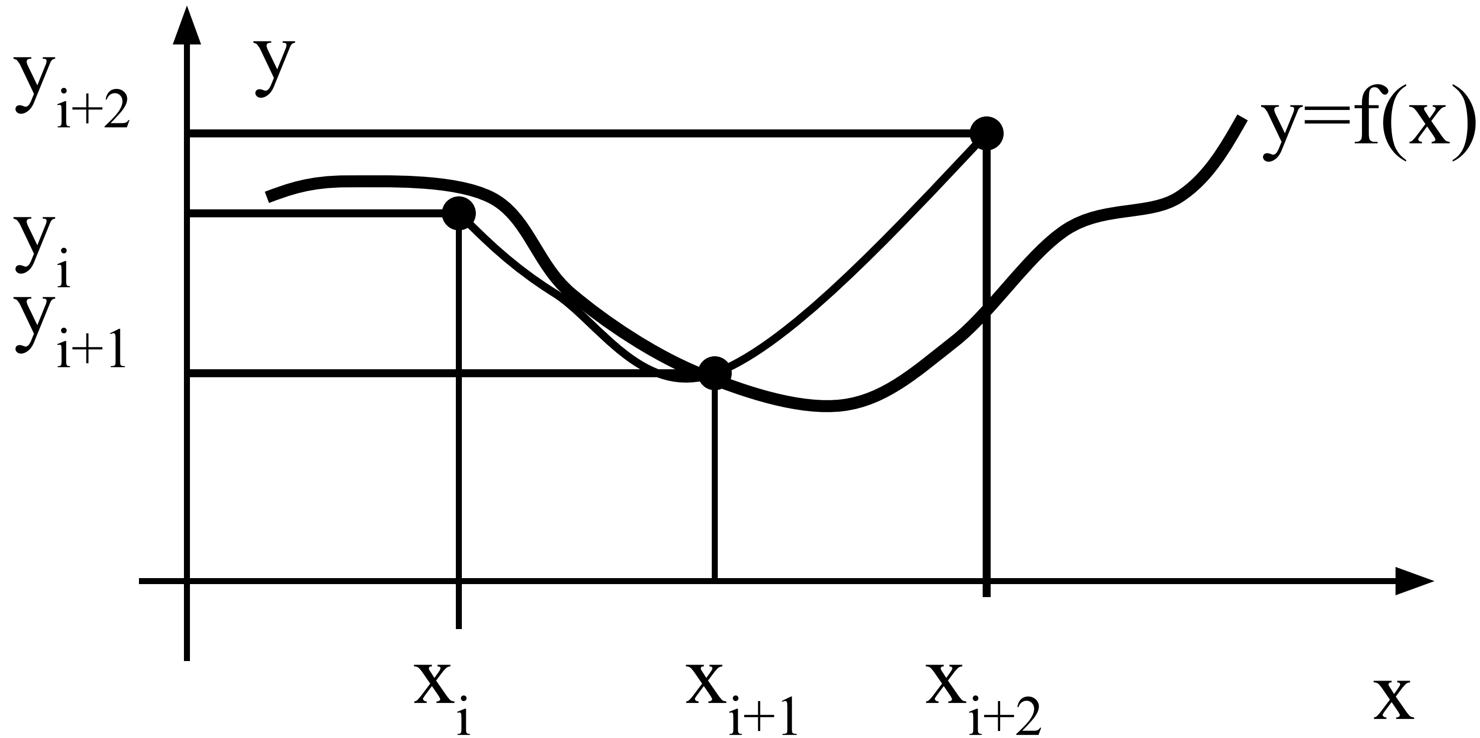
4. Метод Симпсона.

Описание метода.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + \\ + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})] \qquad (1)$$

где шаг определяется: $\mathrm{h} = \dfrac{\mathrm{b - a}}{\mathrm{2n}}$ (2)

При этом, необходимым условием является то, что количество интервалов разбиения отрезка интегрирования должно быть **четным**.

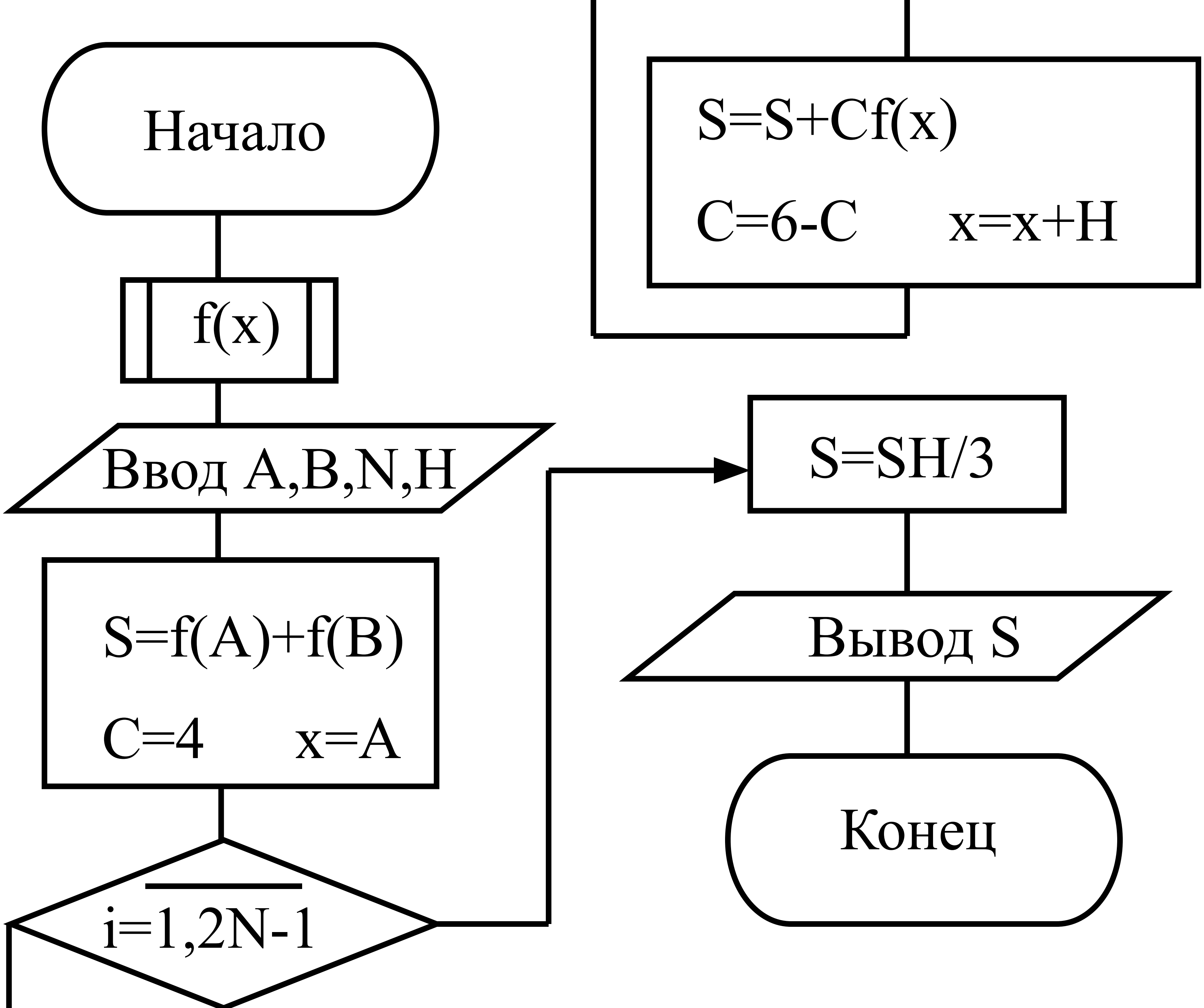


y
y_{i+2}
y_i
y_{i+1}
y=f(x)
x_i
x_{i+1}
x_{i+2}
x

Погрешность метода Симпсона:

$$R = \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} \max\{f^{(IV)}(x^*)\} \qquad (3)$$

где: $x^* \in [a;b]$


Начало
f(x)
Ввод A,B,N,H
S=f(A)+f(B)
C=4 x=A
$i=\overline{1,2N-1}$
S=S+Cf(x)
C=6-C x=x+H
S=SH/3
Вывод S
Конец