Урок 11

Функция распределения случайных величин

- **Для характеристики поведения НСВ используют не вероятность события P(X=x), а P(X<x), где x – некоторое фиксированное число.**

  Если x изменяется, то изменяется и P(X<x), т.е. P(X<x) является функцией.
- **Определение. *Функцией распределения* случайной величины X называется функция F(x), задающая вероятность того, что случайная величина X<x, т.е. F(x)= P(X<x).**

  Эта функция называется *интегральной функцией распределения.*

Построение интегральной функции распределения.

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

$$x < x_1 \quad F(x) = P(x < x_1) = 0$$

$$x_1 \le x < x_2 \quad F(x) = P(x < x_2) = P(x = x_1) = p_1$$

$$x_2 \le x < x_3 \quad F(x) = P(x < x_3) = P(x = x_1) + P(x = x_2) = p_1 + p_2$$

…

$$x_{n-1} \le x < x_n \;\; F(x) = P(X < x_n) = p_1 + p_2 + \dots p_{n-1}$$

$$x \ge x_n \;\; F(x) = 1$$

Задача 1.

- **Построить интегральную функцию распределения и ее график, используя таблицу исходных данных:**

X	1	3	4	5	7	8
P	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

$$x < 1 \quad F(x) = 0$$

$$1 \le x < 3 \quad F(x) = 0{,}1$$

$$3 \le x < 4 \quad F(x) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$$

$$4 \le x < 5 \quad F(x) = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$$

$$5 \le x < 7 \quad F(x) = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$$

$$7 \le x < 8 \quad F(x) = 0{,}8 + 0{,}1 = 0{,}9$$

$$x \ge 8 \quad F(x) = 0{,}9 + 0{,}1 = 1$$

- **График (коммулята)**

$$x < 1 \quad F(x) = 0$$

$$1 \le x < 3 \quad F(x) = 0{,}1$$

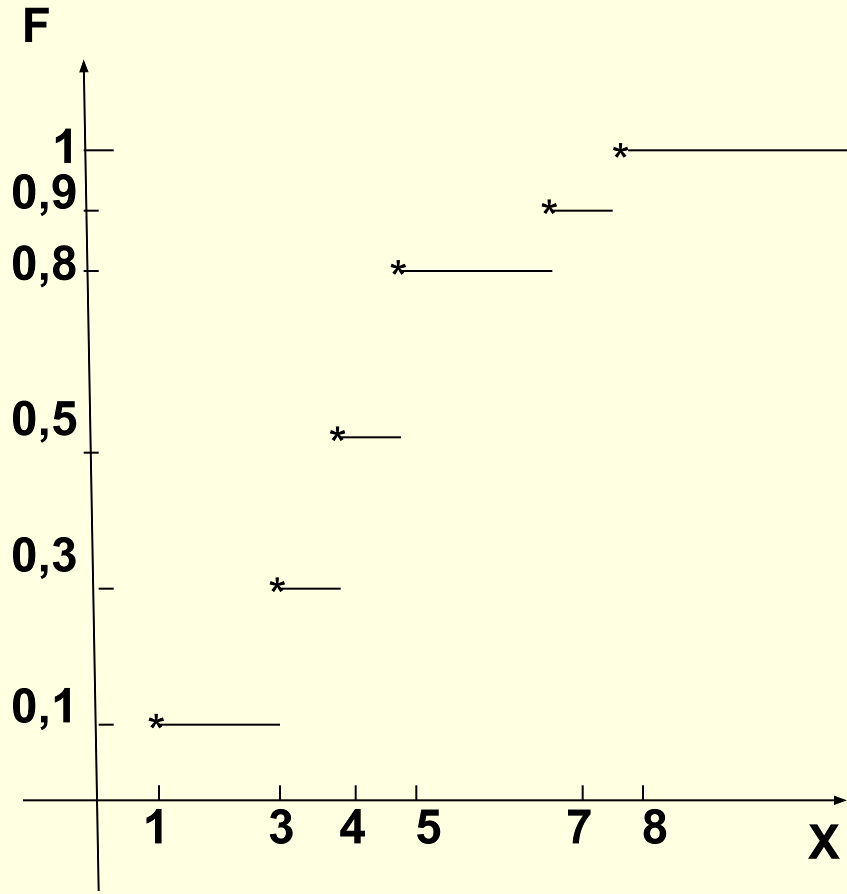
$$3 \le x < 4 \quad F(x) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$$

$$4 \le x < 5 \quad F(x) = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$$

$$5 \le x < 7 \quad F(x) = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$$

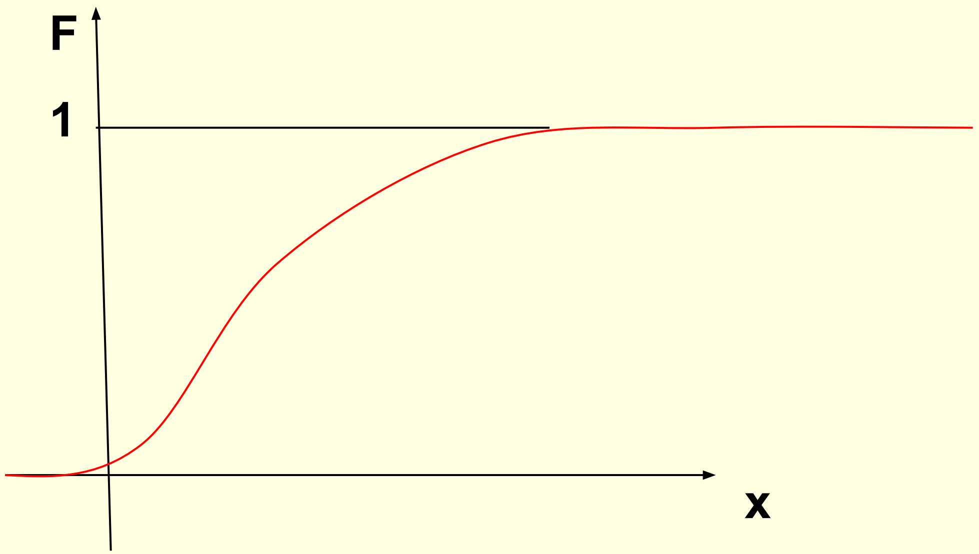
$$7 \le x < 8 \quad F(x) = 0{,}8 + 0{,}1 = 0{,}9$$

$$x \ge 8 \quad F(x) = 0{,}9 + 0{,}1 = 1$$



Коммулята:

- **При увеличении числа интервалов и увеличении числа возможных значений х ступенчатая кривая будет приближаться к плавной:**



Свойства интегральной функции распределения:

$1. 0 \le F(x) \le 1$

$2. F(x) - \textit{неубывающая, т.е.}\ P(\alpha \le x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

$3. \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0; \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

$4. P(\alpha) = 0, \textit{где}\ \alpha - \textit{отдельно взятое значение}$

$\textit{непрерывной}\ CB: \lim\limits_{\beta \to \alpha} P(\alpha \le x < \beta) = F(\alpha) - F(\alpha) = 0$

$5. P(\alpha < x \le \beta) = P(\alpha \le x < \beta)$

Задача 2.

- **Функция распределения СВ задана выражением:**

$$F(x)=\begin{cases}0, при\ \ x<\dfrac{\pi}{4}\\ a\cdot\sin(x-\dfrac{\pi}{4})+\dfrac{1}{2}, при\ \dfrac{\pi}{4}\le x<\dfrac{3\pi}{4}\\ 1, при\ x\ge\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$$

- **Найти коэффициент а; вероятность попадания значения СВ в интервал** $(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4})$ **и построить график.**

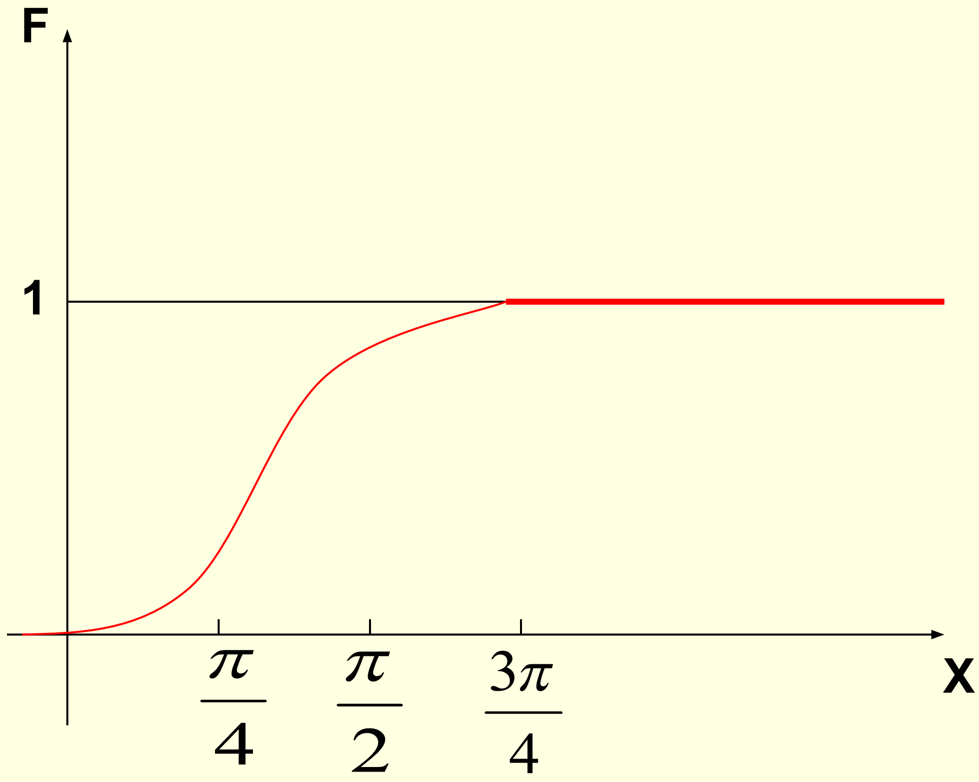
Решение:

$$1.\,при\ x = \frac{3\pi}{4}\ F(x) = 1 \Rightarrow a \cdot \sin(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2} = 1,$$

$$a \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2},\ a = \frac{1}{2}.$$

$$2.\ P(\frac{\pi}{4} \le x < \frac{3\pi}{4}) = F(\frac{3\pi}{4}) - F(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3.



Плотность распределения вероятности

- **Используя интегральную функцию распределения трудно судить о характере распределения СВ в небольшой окрестности точки на числовой прямой.**

- **Пусть имеется НСВ с интегральной функцией распределения F(x).**

Рассмотрим вероятность попадания значений СВ на участок $(x; x+\Delta x)$

$$P(x < X \le x+\Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x);$$

определим вероятность, которая приходится на единицу длины этого участка:

$$\frac{P(x < X \le x+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X \le x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = ?$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F^{/}(x) = f(x)$$

- ***Дифференциальной функцией распределения или плотностью распределения называется первая производная интегральной функции распределения.***

- ***График:***

Свойства дифференциальной функции распределения

1. *Для любого* x, $f(x) \geq 0$;

2. $P(\alpha \leq x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$;

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

4. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$;

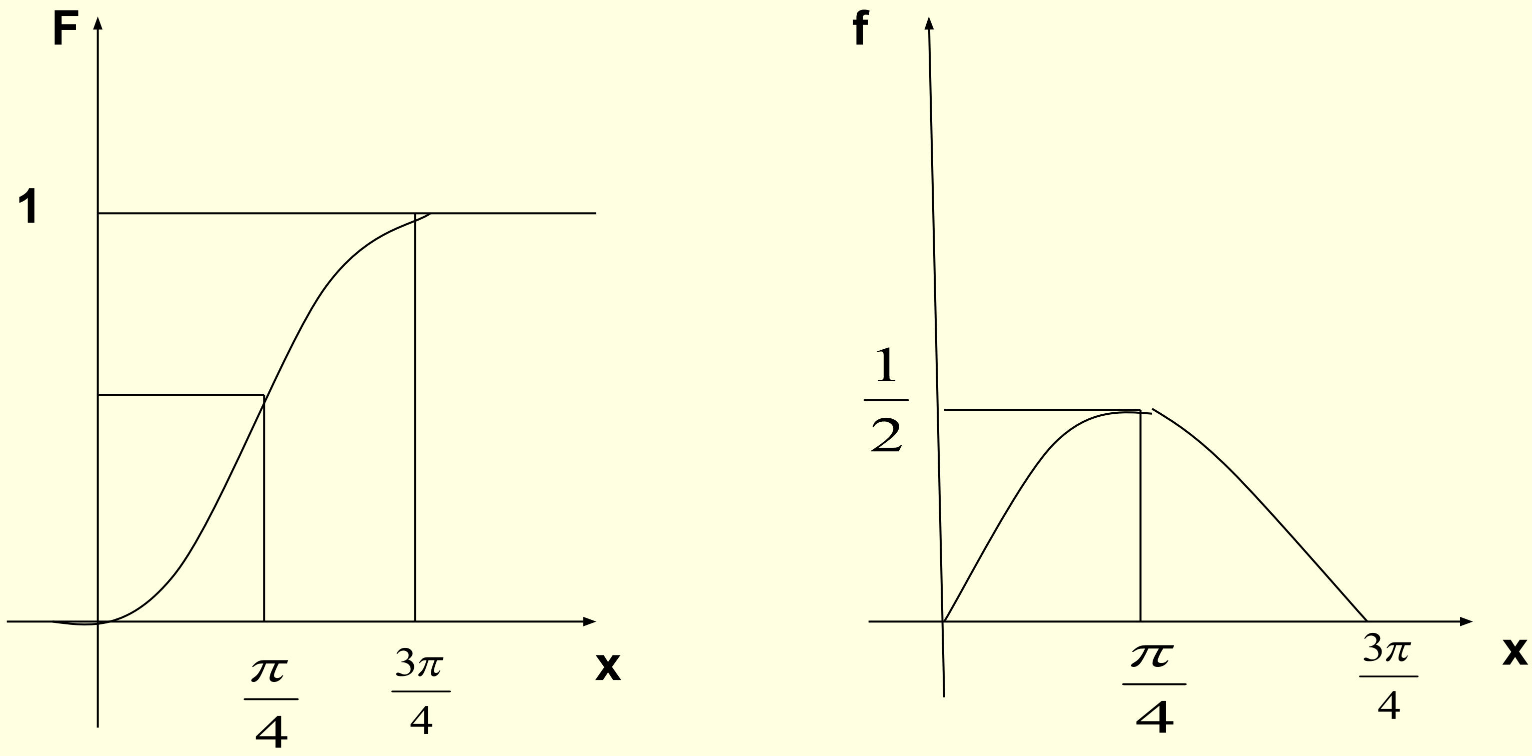
5. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) = 1$

Задача 3.

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x<\dfrac{\pi}{4},\\ \dfrac{1}{2}\sin(x-\dfrac{\pi}{4})+\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{3\pi}{4},\\ 1,\ x>\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$$

$$F^{/}(x)=f(x)=\begin{cases}0,\ x<\dfrac{\pi}{4},\\ \dfrac{1}{2}\cos(x-\dfrac{\pi}{4}),\ \dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{3\pi}{4},\\ 0,\ x>\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$$

Графики:



Решить обратную задачу: составить интегральную функцию распределения по дифференциальной.

$$f(x)=\begin{cases}0, x<-\dfrac{\pi}{4},\\ \dfrac{1}{2}\cos(x-\dfrac{\pi}{4}), -\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{3\pi}{4},\\ 0, x>\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$$

$$x<-\frac{\pi}{4}, F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dx=0;$$