§5. Интеграл от функции комплексной переменной по кривой на комплексной плоскости.

п.1. Вспомогательные положения.

Def. ***Кусочно-гладкая кривая-***

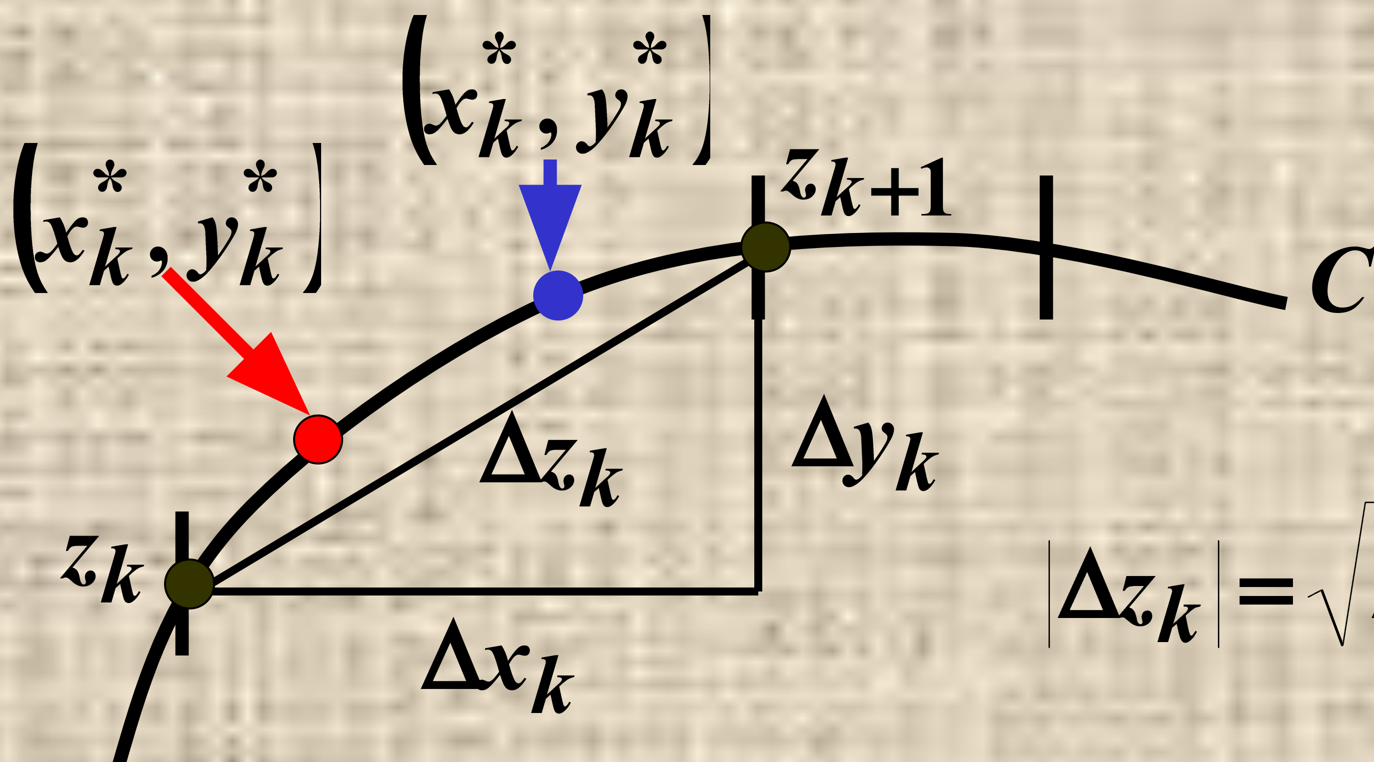
$$\left\{ z \middle| z(t) = x(t) + iy(t); t \in [a,b] \right\},\ x(t), y(t) \in C[a,b],$$

$x'(t), y'(t) -$ кусочно-непрерывные на $[a,b]$,

$\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 \neq 0 -$ *нет точек возврата и самопересечения*.

Если $x(a) = x(b), y(a) = y(b) -$ **замкнутая кривая.**

Криволинейные интегралы второго рода по кривой на плоскости (x,y).



$$\left|\Delta z_k\right| = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$

$$P(x,y), Q(x,y) \quad (x,y) \in C$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} P\left(x_k^*, y_k^*\right)\Delta x_k + Q\left(x_k^{**}, y_k^{**}\right)\Delta y_k$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k |\Delta z_k| \to 0}} S_n \equiv \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Достаточные условия существования:

1) ***кусочная гладкость кривой C;***
2) ***кусочная непрерывность и ограниченность функций P и Q.***

п.2. Основное определение.

Def. ***Интегралом от функции комплексной переменной $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ по кривой C комплексной плоскости z*** **называется** ***комплексное число***

$$\int_C f(z)dz = \int_C [u(x,y)+iv(x,y)](dx+idy) =$$

$$= \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy).$$

Замечания.

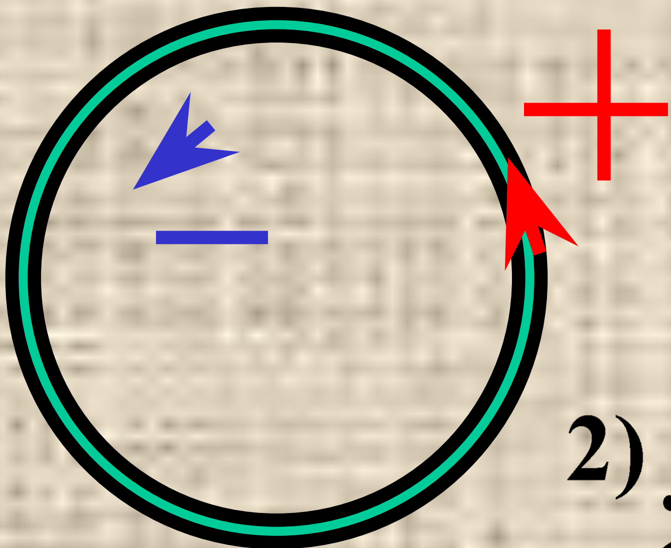
1) **Достаточные условие существования**

- *кусочная гладкость контура C;*

- *кусочная непрерывность и ограниченность $u(x,y)$, $v(x,y)$.*

2) $$\exists \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_{k}|\Delta z_k|\to 0}} S_n = \int_C f(z)dz, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(z_k^*\right)\Delta z_k .$$

п.3. <u>Свойства</u> $\int\limits_{C} f(z)\,dz$



1) $$\int\limits_{C^{+}} f(z)\,dz = -\int\limits_{C^{-}} f(z)\,dz;$$

2) $$\int\limits_{C} \left[af(z)+bg(z)\right]dz = a\int\limits_{C} f(z)\,dz + b\int\limits_{C} g(z)\,dz;$$

3) $$\int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} C_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C_k} f(z)\,dz;$$

4) $\left|\int\limits_C f(z)\,dz\right| \le \int\limits_C \left|f(z)\right| dl \le ML_C.$

5) $\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt.$

<u>Пример.</u>

$$\int\limits_{|z-z_0|=R_0} \frac{dz}{z-z_0} = \left\{ \begin{array}{c} z = z_0 + R_0\,e^{i\varphi} \\ dz = iR_0\,e^{i\varphi}\,d\varphi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{iR_0\, e^{i\varphi}}{R_0\, e^{i\varphi}}\, d\varphi = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\, i.$$

6) <u>**Замена переменной.**</u> **Пусть** $\exists$ <u>***однолистная***</u>

$$\varphi(\xi) \in C^{\infty}(D): \quad C \xleftrightarrow{z=\varphi(\xi)} \Gamma \subset D.$$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\Gamma f(\varphi(\xi))\,\varphi'(\xi)\,d\xi.$$

§6. Теорема Коши.

п.1. Вспомогательные положения.

Def. Область $g \subset R^2$ называется *квадрируемой*

если $\inf\{O\} = P^* = P_* = \sup\{B\}$.

Def. Число $P = P^* = P_*$ называется *площадью* плоской области g (по Жордану).

Достаточное условие квадрируемости

- *кусочная гладкость (спрямляемость)* ∂g.

Для функции $f(x,y) \in C(g)$ **и** $|f(x,y)| \leq A$ **в** ***квадрируемой области g*** $\exists \iint\limits_{g} f(x,y)\,dxdy.$

Def. **Область** $g \subset R^2$ **называется** ***односвязной*****, если для** $\forall$ ***замкнутого контура*** $\gamma \subset g$**, ограниченная им часть плоскости** ***целиком*** $\subset g$**.**

Формула Грина.

Пусть $P(x,y)$, $Q(x,y)$ $\in C(\overline{g})$, ∂g**-** ***кусочно-гладкий контур*** **и** P_x, P_y, Q_x, Q_y $\subseteq C(g)$, **тогда**

$$\oint\limits_{\partial g} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{g} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

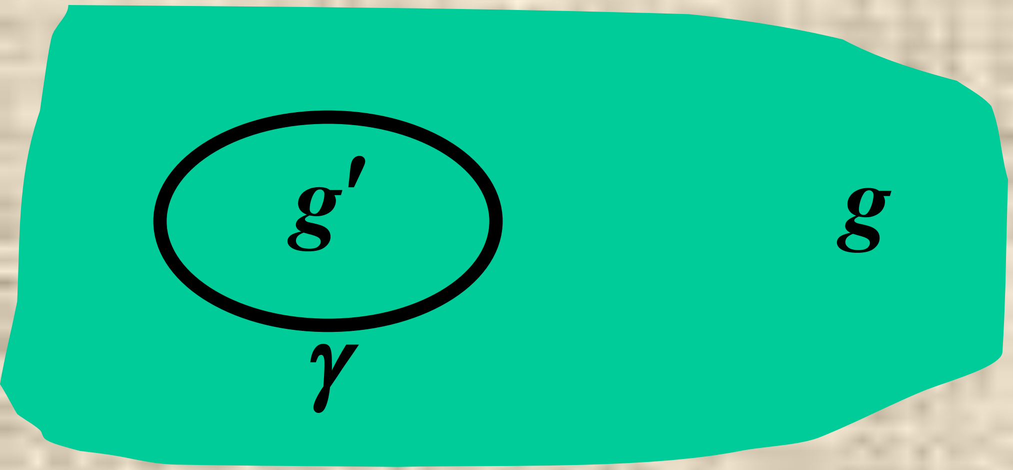
п.2. Теорема 6.1 (Коши).

Если $f(z)\in C^{\infty}(g)$ в *односвязной* области g, то для $\forall$ *замкнутого* контура $\gamma\subseteq g$ $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz=0.$

Доказательство.

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz=\oint\limits_{\gamma} udx-vdy+i\oint\limits_{\gamma} vdx+udy=$$ по формуле Грина

$P=u$ $Q=-v$ $P=v$ $Q=u$



$$= \iint_{g'} \left(-v_x - u_y\right) dxdy + i \iint_{g'} \left(u_x - v_y\right) dxdy =$$

$$= \left\{ f(z) \in C^{\infty}(g) \Rightarrow u_x = v_y, u_y = -v_x \right\} =$$

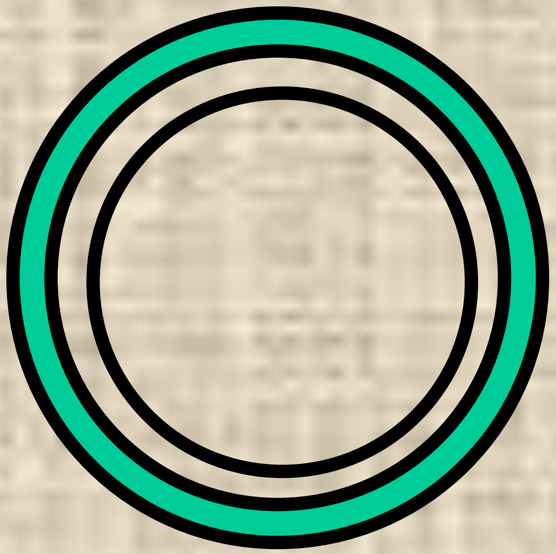
$$= \iint_{g'} \left(-u_y - u_y\right) dxdy + i \iint_{g'} \left(v_y - v_y\right) dxdy = 0 \quad \blacksquare$$

Замечания.

1) *Односвязность области* – **важное требование!**

Пример. $f(z)=\frac{1}{z}\in C^{\infty}(1<|z|<3).$

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z}=2\pi i\neq 0.$$



Def. $f(z)$ называется ***аналитической в замкнутой области*** g $f(z) \in C^{\infty}(\square g)$, если $f(z) \in C^{\infty}(g)$ и $f(z) \in C(\square g)$. Т.е. $f(z) \in C(\partial g)$.

Определение справедливо и для многосвязной области.

Теорема 6.2 (2-я теорема Коши).

Если $f(z) \in C^{\infty}(\square g)$, g-***односвязная***, **то** $\oint\limits_{\partial g} f(z)\,dz = 0.$

Теорема переносится и на случай *многосвязной области*.

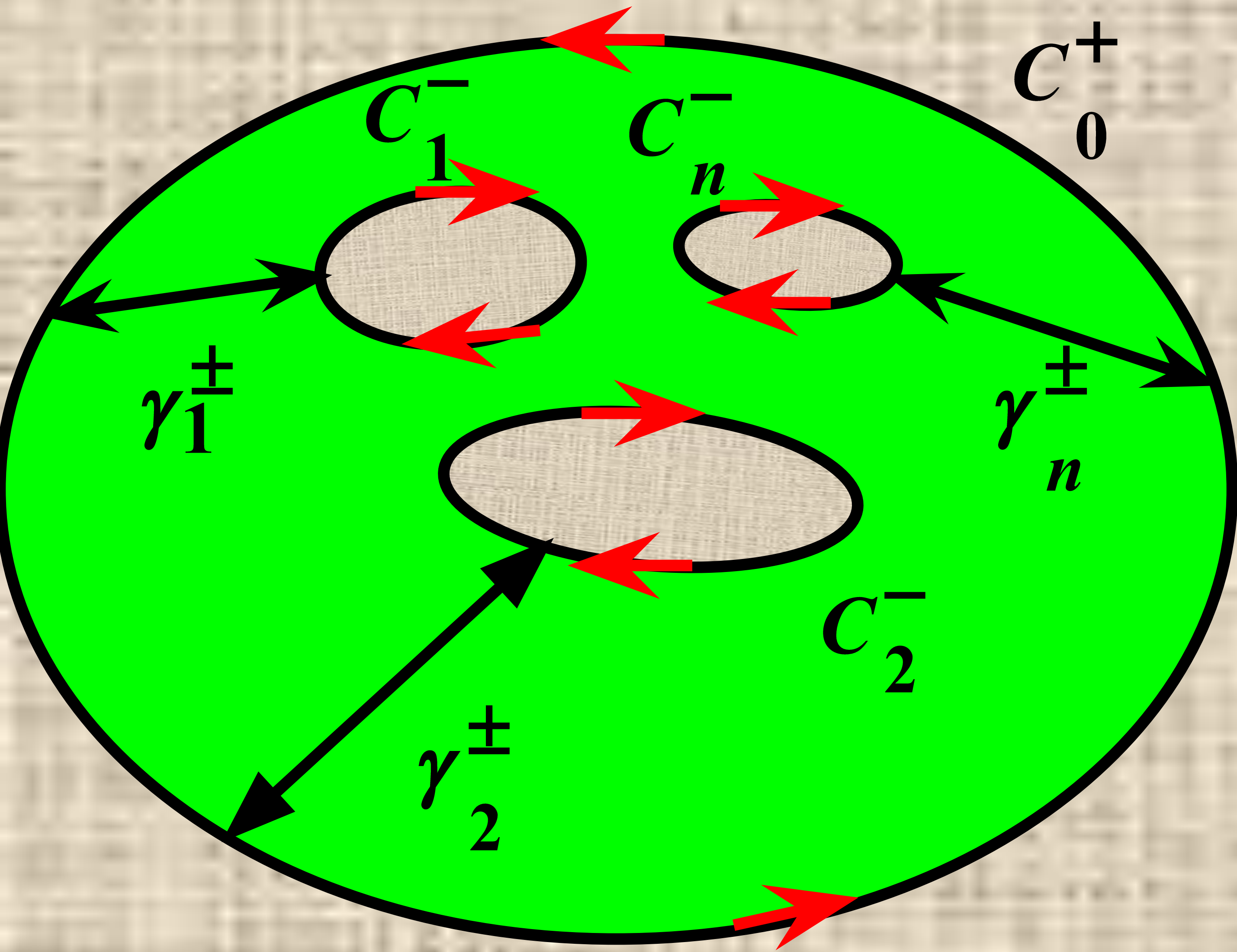
Теорема 6.3 (теорема Коши для многосвязной области).

Пусть $f(z) \in C^{\infty}(g)$, g-*многосвязная*, ограниченная извне контуром C_0, а изнутри- контурами C_1, C_2,…C_n и пусть $f(z) \in C(\overline{g})$. Тогда

$$\oint\limits_{C} f(z)\,dz = 0,$$

где *C*-*полная граница g*, $C = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \ldots \cup C_n$, проходящая в *положительном* направлении.

Доказательство.

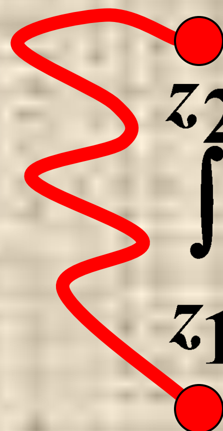


■

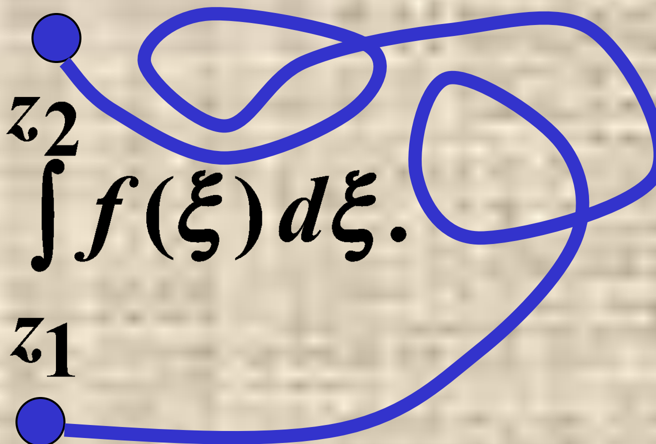
п.3. Следствия теоремы Коши.

1) Если g- *односвязная* и $f(z) \in C^{\infty}(g)$, то для

$\forall z_1, z_2 \in g$



$$\int_{z_1}^{z_2} f(\xi)\,d\xi = \int_{z_1}^{z_2} f(\xi)\,d\xi.$$



При фиксированной z_0 $\quad \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi = F(z)$

функция только z !

2) <u>Неопределенный интеграл.</u>

Пусть *g*-***односвязная*** область, $f(z) \in C(g)$,

для $\forall$ ***замкнутого*** контура $\gamma \subset g \oint_{\gamma} f(z)dz = 0.$

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi = F(z) -$$ ***неопределенный интеграл*** $f(z)$.

Свойства неопределенного интеграла F(z).

Теорема 6.4 Если *g*-***односвязная*** область,

f(z) $\in C(g)$, для $\forall$ ***замкнутого*** контура $\gamma \subset g$

$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$, то $\exists F(z) \in C^{\infty}(g)$,

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi.$$

Доказательство.

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z}f(\xi)d\xi-f(z)\right|=\left\{\int\limits_{z}^{z+\Delta z}d\xi=\Delta z\right\}$$

$$=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z}\{f(\xi)-f(z)\}d\xi\right|\le$$

$$\le\frac{|\Delta z|}{|\Delta z|}\max_{\xi\in[z,z+\Delta z]}|f(\xi)-f(z)|<\varepsilon,\quad |\Delta z|<\delta.$$

$$\Rightarrow\exists\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta z}=F'(z)=f(z)\in C(g)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(z)\in C^{\infty}(g).\quad\blacksquare$$

Понятие первообразной

Def. **Пусть** $f(z) \in C(g)$**. Тогда** ***первообразной*** $F(z)$ **функции** $f(z)$ **в** g **называется** $\forall F(z) \in C^{\infty}(g)$ **такая, что** $F'(z)=f(z)$**.**

<u>Свойства неопределенного интеграла F(z).</u>

1) **Неопределенный интеграл** ***F(z)*** **в** ***<u>односвязной</u>*** **области** ***g***- **первообразная для** ***f(z)***.

2) **Если** $\exists$ **первообразная** ***F(z)***, **то их** $\exists\ \infty$ **много,**

но $F'_1(z) - F'_2(z) = 0 \Rightarrow F_1(z) = F_2(z) + C$.

3) **<u>Формула Ньютона-Лейбница.</u> Если** ***g***- ***<u>односвязная</u>*** **и** $f(z) \in C(g)$ **и для** $\forall$ ***<u>замкнутого</u>*** **контура** $\gamma \subset g$

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 0,$$ **то**

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\xi)\,d\xi = F(z_2) - F(z_2),$$

где F- $\forall$ первообразная.

4) **Формула конечных приращений**, вообще говоря ***не верна***.

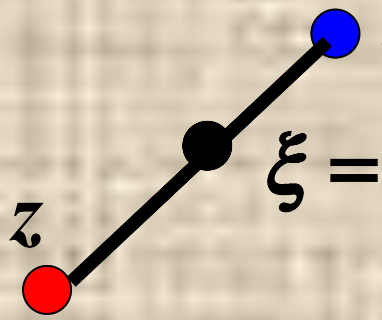
5) **Формула Коши-Адамара**.

Пусть g- ***односвязная*** и $f(z) \in C^{\infty}(g)$

и для $\forall$ ***замкнутого*** контура $\gamma \subset g$ $\oint_{\gamma} f'(z)\,dz = 0.$

$f(z)$- первообразная для $f'(z)$=>

$$\Rightarrow \int_{z}^{z+\Delta z} f'(\xi)\,d\xi = f(z+\Delta z) - f(z).$$



$$\xi = z + \theta \Delta z, \quad 0 \le \theta \le 1; \quad d\xi = \Delta z d\theta;$$

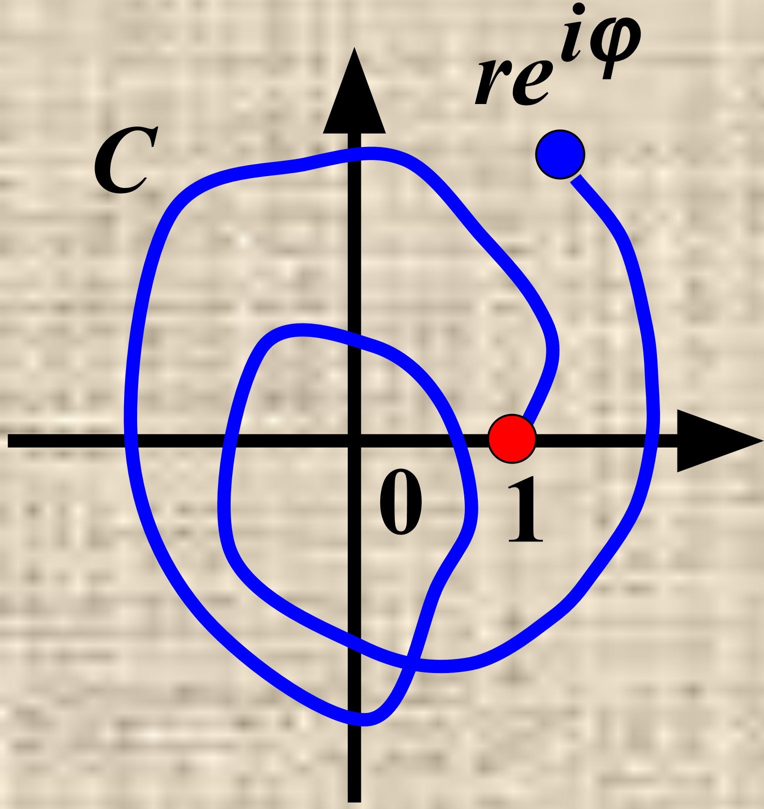
$$\boxed{f(z+\Delta z) - f(z) = \Delta z \int_0^1 f'(z+\theta\,\Delta z)\,d\theta}$$

Формула Коши-Адамара

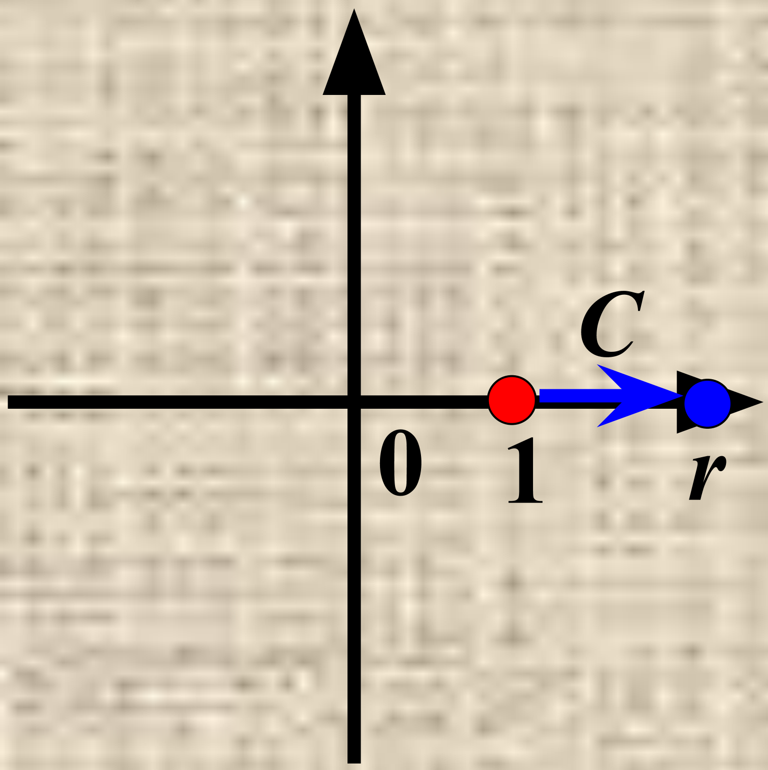
6) При вычислении интеграла от аналитической функции контур интегрирования можно деформировать так, чтобы он не выходил из области аналитичности подынтегральной функции.

Деформируя контур интегрирования так, как это допускается теоремой Коши, можно легко вычислить многие интегралы

Важный пример.

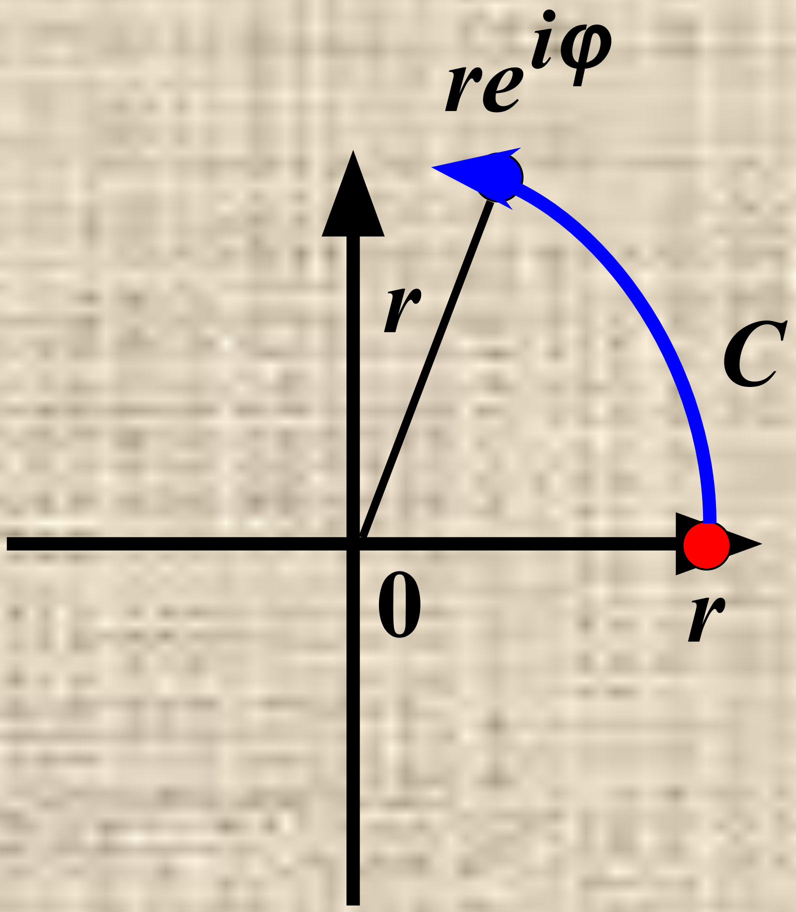


$$\int_C \frac{dz}{z} = ?$$



$$z = x, \quad dz = dx$$

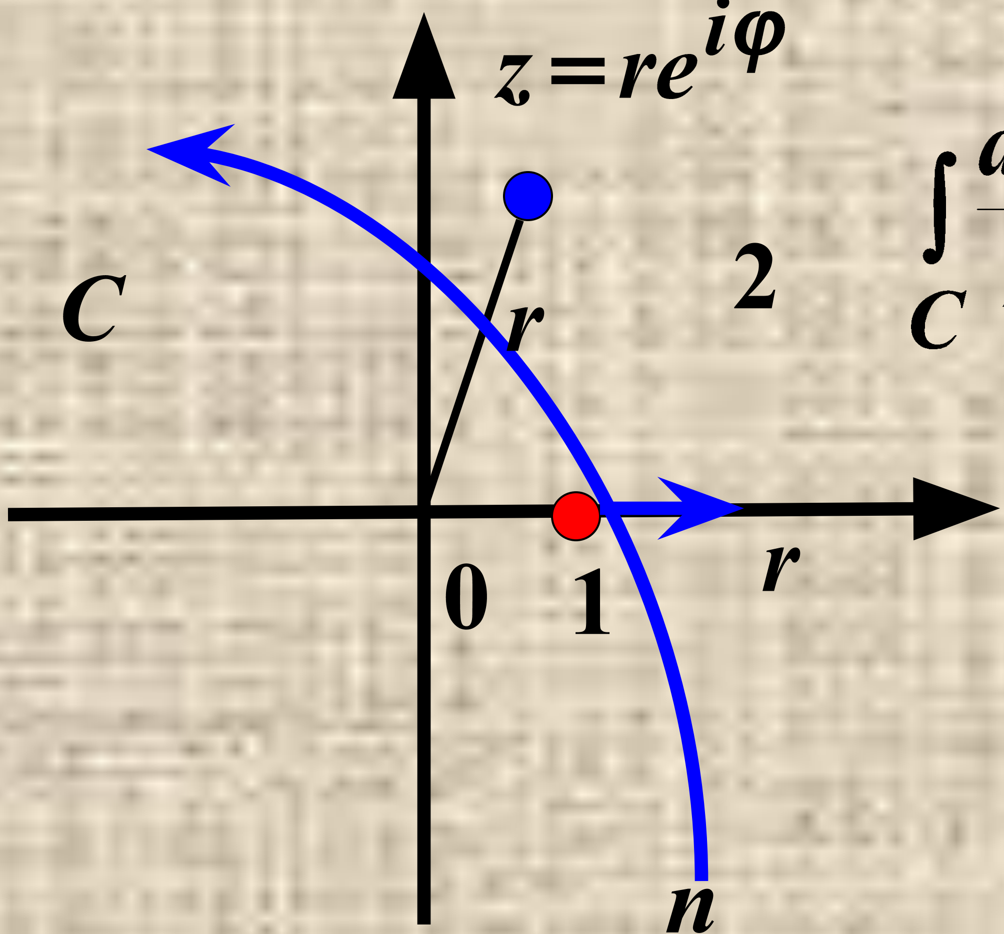
$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_1^r \frac{dx}{x} = \ln r$$



$$z = r\,e^{i\theta}$$

$$dz = ir\,e^{i\theta}\,d\theta$$

$$\int_C \frac{dz}{z} = i\int_0^{\varphi} d\theta = i\,\varphi$$



$$\int_C \frac{dz}{z} = \ln r + i(4\pi + \varphi).$$

$$\int_C \frac{dz}{z} = \ln r + i(2\pi n + \varphi) = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi n).$$

Замечание.

$$\forall n \in Z \qquad \oint\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0, n \neq -1 \\ 2\pi i, n = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

Аналитичность подынтегральной функции внутри замкнутого контура интегрирования *не является необходимым условием равенства 0* интеграла по этому контуру.