ШПАРГАЛКИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ.

ЭКЗАМЕН 13 ЯНВАРЯ 2014 Г.

Предмет теории вероятностей.

- 1. Теория вероятностей возникла в XVII в. Заложили основы *Гюйгенс, Блез Паскаль, Ферма, Яков Бернулли* и др.
- 2. **Т.в.** – это математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений, независимо от их конкретной природы и дающая методы количественной оценки влияния случайностей на различные явления.
- 3. **Предмет т.в.** – математические модели случайных явлений.
- 4. **Основная задача**: установление мат. Законов для исследования случайных явлений массового характера и предвидения их на основании отдельных фактов.
- 5. **Цель**: осуществление прогноза в области случайных явлений, влияние на ход этих явлений, их контроль, ограничение сферы действия случайностей.

1. **Опыт (испытание, эксперимент)** – всякое осуществление определённого комплекса условий или действий, при которых происходит соответствующее явление.

2. **Событие** – возможный результат опыта.

3. **Классификация.**

- По отношению к конкретному опыту события делят на: *достоверные, невозможные, случайные.*
- События: *совместные, несовместные.*
- События: *простые* (элементарные, 1 исход) и *сложные* (составные).

4. События называются **равносильными**, если появление одного из них равносильно непоявлению другого.

5. Множество событий наз. **полной группой событий**, если они попарно несовместны и появление одного и только одного из них является достоверным событием.

6. События наз. **равновозможными**, если нет основания считать, что одно событие является более возможным, чем другие.

7. **Элементарный исход** - каждое равновозможное событие, которое может произойти в данном опыте.

8. **Благоприятствующие исходы** – элементарные исходы, при которых данное событие наступает.

Пространство элементарных событий.

1. **Пространство элементарных событий** – это произвольное множество, состоящее из всех возможных исходов ω некоторого опыта, а его элементы – это элементарные события.

2. **L** – некоторая система случайных событий и называется **алгеброй событий**, если:
1. L содержит невозможные и достоверные события;
2. Если события $A_1, A_{2,\ldots,} A_n$ ∈ L, то L содержит сумму, произведение и дополнение этих событий.

3. Числовая функция P(A), определённая на алгебре событий, наз. **вероятностью**, если выполняются след. аксиомы:
1. А. неотрицательности: Вероятность любого события А из L неотрицательна.
2. А. нормированности P(Ω)=1.
3. А. аддитивности: Вероятность суммы несовместных событий = сумме вероятностей этих событий.

4. Совокупность объектов (пространство элементарных соб-й, L, P) наз. **вероятностным пространством случайного эксперимента.**

5. Элементарные свойства вероятности:
- P(∅)=0
- Для любого А существует $\overline{A}$.

Классическое определение вероятности.

1. Вероятностью события называется отношение числа исходов, благоприятствующих данному событию, к числу всех равновозможных исходов опыта, в которых может появиться это событие.

2. **Свойства вероятности события**:

1. P (Ω) = 1

2. P (∅) = 0

3. 0 < P(A) < 1, A – случайное событие;

4. Вероятность любого события удовлетворяет неравенству $0 \leq P(B) \leq 1$

Статистическая вероятность.

1. **Относительная частота события** – отношение числа опытов, в котором появилось это событие, к числу всех произведённых опытов.

$$W\ (A) = \frac{m}{n}$$

2. Свойства частоты:

1. P (Ω) = 1;
2. P (∅) = 0;
3. 0 < W(A) < 1.

3. **Свойство статичтической устойчивости**: В различных сериях испытаний, в каждом из которых может появиться или не появиться данное событие, относительная частота принимает значения, достаточно близкие к некоторой константе. Эту постоянную, являющуюся объективной числовой характеристикой явления, считают вероятностью данного события.

4. **Статистическая вероятность** – относительная частота (частость) этого события, вычисленная по результатам большого числа испытаний.

$$\mathrm{P}_{\text{стат}}(\mathrm{A}) = W(A)_{\text{при } n\to\infty} = \frac{m}{n}_{\text{при } n\to\infty}$$

5. Свойства стат. вероятности аналогичны свойствам частоты события.

Геометрическая вероятность

Комбинаторика.

- Комбинаторика изучает способы подсчёта числа элементов в конечных множествах любой природы.
- Группы, составленные из каких-либо объектов, называются соединениями, или комбинациями.
- Объекты, из которых состоят соединения, называются элементами.

Соединения без повторений.

- **Перестановки** – комбинации, составленные из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. (порядок) $\mathrm{P}_n = n!$
- **Размещения** – комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо порядком (комбинацией). (и порядок, и состав)
- **Сочетания** – комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. (состав)

Соединения с повторениями.

- Если среди n элементов есть n_1 элементов первого вида, n_2 элементов второго вида, n_k элементов k-го вида, то число перестановок с повторениями определяется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_k!}$$

- Число размещений с повторениями из n элементов по m вычисляется по формуле

$$(\mathrm{A}^m)_{\text{повт}} = n^m$$

- Число сочетаний с повторениями из n элементов по m равно числу сочетаний без повторений из $n + m - 1$ элементов по m элементов, т.е.

- **Правило суммы.** Если некоторый объект А может быть выбран из совокупности объектов n способами, а другой объект В может быть выбран k способами, то выбрать либо А, либо В можно n+k способами.

Правило произведения. Если некоторый объект А может быть выбран из совокупности объектов n способами и после каждого такого выбора другой объект может быть выбран k способами, то пара объектов (А, В) в указанном порядке может быть выбрана $n \cdot k$ способами.

Действия над событиями.

1. **Суммой**, или объединением 2-х событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них.

- Если A и B – совместные, то A+B обозначает наступление или события A, или события B, или обоих событий вместе.
- Если A и B – несовместные, то A+B обозначает наступление или события A, или события B.

2. **Произведением**, или пересечением 2-х событий называется событие, состоящее в одновременном их наступлении.

3. **Разностью** событий A-B называется событие, которое состоится, если событие A произойдет, а событие B не произойдет.

4. **Свойства операций сложения, умножения событий**.

1. $A+B=B+A$ коммутативность;
2. $A+(B+C) = (A+B)+C$ ассоциативность;
3. $A \cdot B = B \cdot A$ коммутативность умножения;
4. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
5. $A \cdot (B+C) = AB + AC$ дистрибутивность умножения относительно суммы.

Теоремы сложения вероятностей.

1.1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

1.2. Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

- Следствие 1. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.
- Следствие 2. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна 1.

2. Вероятность суммы 2-х совместных событий А и В равна сумме вероятностей каждого из событий минус вероятность их произведения.

Теоремы умножения вероятностей.

1. Вероятности независимых событий называются **безусловными**.
2. Вероятность события В, вычисленная в предположении, что событие А уже произошло, называется **условной** вероятностью.
3. События – **независимые**, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло или нет другое событие.
4. **Теорема**. Вероятность произведения 2-х *зависимых* событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого в предположении, что первое событие уже наступило.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

5. **Теорема**. Вероятность произведения 2-х *независимых* событий А и В равна произведению их вероятностей.

6. **Теорема о вероятности появления хотя бы одного события**. Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$:

$$\boxed{P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n}$$

- Формула полной вероятности: Вероятность появления события А равна сумме произведений вероятностей гипотез Р(H_i) на условные вероятностисобытия А при каждой гипотезе.

Формула Пуассона.

- Используется в том случае, когда число испытаний Бернулли n велико (n≥50), а вероятность успеха в одном испытании мала p≤0,1 (для редких событий).

- **Теорема**. Если число испытаний неограниченно ↑ ($n \to \infty$) и вероятность наступления события А p в каждом испытании неограниченно ↓ ($\mathrm{p} \to 0$), но так, что их произведение $n \cdot p = \lambda = const$, то вероятность $P_n(A = m)$ удовлетворяет предельному равенству: $\lim_{n\to\infty} P_n(A = m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$, где m = 0,1,2… - **ассимптотическая формула Пуассона**.

- **Приближённая формула Пуассона**:

$$P_n(A = m) \sim \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!},$$

где λ (параметр, или средняя интенсивность) = $n \cdot p$.

Локальная теорема Муавра-Лапласа.

1. **Теорема**. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, а число независимых испытаний достаточно велико, вероятность наступления события A м/б вычислена по формуле:

$$P_n(A=m) \sim \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ где } x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

Выражение $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(\mathrm{x})}$ называется **функцией Гаусса.**

2. **Свойства функции Гаусса**:

- 1. $\varphi(\mathrm{x})$ – чётная функция
- 2. При x≥4 можно считать, что $\varphi(\mathrm{x})$=0.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

1. Теорема применяется, когда n достаточно велико и когда требуется вычислить вероятность того, что в n независимых испытаниях событие А наступит не менее k_1, но не более k_2 раз.

2. **Теорема.** Если вероятность p наступления события А в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что в n испытаниях событие А наступит не менее k_1, но не более k_2 раз, м/б вычислен по формуле:

$$P_n(k_1 \leq m \leq k_2) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Выражение $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(x)}$ называется **функцией Лапласа**.

$$P_n(k_1 \leq m \leq k_2) = \Phi(x_1) - \Phi(x_2).$$

3. **Свойства функции Лапласа:**

- 1. $\Phi(x)$ – нечётная функция, Ф(-x) = -Ф(x);
- 2. При x>5 можно считать , что $\Phi(x)$=1/2.

1. **Случайная величина** – переменная величина, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно из возможного множества значений (какое именно, заранее неизвестно).

2. **Способы задания ДСВ:**

- Табличный – закон, или ряд распределения ДСВ;
- Графический – полигон, или многоугольник распределения вероятностей;
- Аналитический – аналитическая функция $p_i = \varphi(x_i)$? Позволяющая находить вероятность какого-либо значения СВ по определённой формуле, зная это значение.

Числовые характеристики ДСВ.

- 1. Математическое ожидание ДСВ – сумма произведений всех её значений на соответствующие им вероятности. **M(X)=**$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

Теорема. Математическое ожидание ДСВ Х приближённо равно среднему арифметическому всех её значений (при достаточно большом числе испытаний).

$$M(X) \approx \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n}{n},$$ где

N - число испытаний;

x_1 - СВ приняла m_1 раз,

x_n – m_n раз.

СВ X, Y – **независимые**, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая СВ.

Математическое ожидание отклонения СВ от её математического ожидания равно 0.

2. Мода – наиболее вероятное значение СВ. Геометрически это абсцисса самой высокой точки полигона вероятностей.

3. Дисперсия – математическое ожидание квадрата отклонения этой СВ от её математического ожидания. **D(X)=M**(X^2)- $M^2(X)$ **;** положительна; можно выносить постоянный множитель, возводя в квадрат; дисперсия суммы/разности СВ равна сумме дисперсий этих СВ, если СВ – независимые.

4. Среднее кв. отклонение – арифметическое значение квадратного корня из её дисперсии. $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Размерность M(X) и $\sigma(X)$ совпадает с самой размерностью СВ. Размерность D(X) равна квадрату размерности СВ.

Законы распределения ДСВ.

1. **Биномиальное распределение**, с параметрами n, p, если ДСВ принимает значения 0, 1, 2, …, m, …, n с вероятностями, определёнными по формуле:

$$\boxed{p_n = P_n(X = m) = C^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}}$$ (Бернулли).

$$M(X) = n \cdot p,$$
$$D(X) = npq,$$
$$np - q < M_0(X) < np + q$$

2. **Распределение Пуассона** – число m наступлений события A в заданном промежутке времени или пространства при заданной интенсивности λ, ДСВ рапределена по формуле:

$$\boxed{p_n = P_n(X = m) \sim \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}}$$, где $\lambda = n \cdot p$

$$M(X) = D(X) = \lambda = np$$

3. **Гипергеометрическое распределение**.

Пусть имеется конечная совокупность, состоящая из N элементов. Предположим, что k из них обладают нужным нам свойством. Оставшиеся этим свойством не обладают. Случайным образом из общей совокупности выбирается группа из n элементов. Пусть X - СВ, равная количеству выбранных элементов, обладающих нужным свойством. Вероятность появления в выборке из n элементов ровно x элементов снужным признаком вычисляется по формуле:

$$\boxed{P_n(X) = \frac{C^x \cdot C^{n-x}}{C^n}}$$

$$M(X)=n \cdot p=n \cdot \frac{k}{N},$$

$$\mathrm{D(X)} = \mathrm{npq} \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

События зависимые.

Функция распределения НСВ.

1. **Функция рапределения** НСВ – вероятность того, что СВ Х примет значение, меньшее некоторого заданного значения Х. $\boxed{F(x) = P(X < x)}$ Её называют *интегральным* законом распределения.

2. СВ называется **абсолютно непрерывной**, если её функция распределения м/б представлена в виде $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

3. **Свойства:**

- 1. Область значений $\in [0,1]$
- 2. F(x) – неубывающая на всей числовой оси. $F(X_1) \leq F(X_2)$, если $x_1 < x_2$
- 3. Если возможные зн-я СВ находятся на интервале (a, b), то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \leq a;\; F(x) = 1 \text{ при } x \geq b.$$

4. **Следствия:**

- 1. Вероятность того, что СВ примет значения, заключенные внутри интервала (a, b), равна разности значений функции распределения на концах этого отрезка.

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

- 2. Вероятность того, что СВ Х примет одно определённое значение, равна О.

$$P(X = x_i) = 0$$

Функция плотности вероятности НСВ.

1. **Плотность вероятности НСВ X** – это функция f(x), равная первой производной её функции распределения. f(x)=F’(x)

2. **Свойства**:

- 1. Неотрицательна $f(x) \geq 0$;
- 2. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$;
- 3. Несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности НСВ равен единице $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- 4. $f(+\infty) = f(-\infty) = 0$
- 5. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

Числовые характеристики НСВ.

1. $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$

2. Мода $M_0(X)$ – точка максимальной плотности вероятности, если она существует.

3. Медиана $M_e(X)$ – такое зн-е НСВ, для которого одинаково вероятно, окажется ли СВ X меньше или больше него, т.е. медиана определяется из условия $P(X < M_e) = (X > M_e) = {}^1/_2$

4. $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - M(X))^2 \cdot f(x)dx$;

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - M^2(X)$$

5. $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Законы распределения НСВ.

• 1. Нормальное распределение (Гауссово).

1. СВ представляет собой сумму большого числа НСВ-н, каждая из которых играет в образщении суммы незначительную роль.
2. НСВ имеет этот закон с параметрами a, σ, если её плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \text{ где a=const, } \sigma = const > 0.$$

$$X \sim \alpha(a, \sigma)$$

Основные свойства:

1. Нормальная кривая имеет колоколообразную форму, симметричную относительно точки x=a;
2. Числовые характеристики:

a – пар-р расположения (характеризует центр рассеивания значений НСВ),
σ – пар-р масштаба нормальной кривой.

M(X)=a,

D(X)=σ^2,

$\sigma(x)$ - ср. кв. отклонение.

$$\boldsymbol{M_e(X) = M_0(X) = M(X) = a}$$

3. $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{dx}$ - функция интеграла Лапласа.
4. С вероятностью, близкой к единице, все возможные значения сосредоточены на отрезке [a-3σ, a+3σ].

Вычисление вероятностей

1. Вероятность попадания СВ в интервал $[x_1, x_2]$:

$P(x_1 \le X \le x_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1)$, где $\boxed{\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt}$ - функция Лапласа.

2. $P(|X - a| \le \Delta) = 2 \cdot \Phi(t)$, где t=$\frac{\Delta}{\sigma}$

2. Равномерное распределение.

- НСВ имеет этот закон рапределения на отрезке [a, b], если на этом отрезке плотность рапределения постоянна и имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < a, x > b \\ \dfrac{1}{b-a}, \text{при } a \le x \le b \end{cases}$$

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{при } a \le x \le b \\ 1, \text{при } x > b \end{cases}$$

$\boldsymbol{M(X) = \frac{a+b}{2}; D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$

Это распределение возникает тогда, когда СВ принимает значения в конечном промежутке и ни одно из значений не имеет преимущества перед другими.

3. Экспоненциальное (показательное) распределение.

1. СВ X подчиняется этому закону, если её плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \text{при } x \geq 0 \end{cases},$$ где λ=const>0.

2. $$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, \ \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

3. **Основные числовые характеристики**:

- **M(X)=**$\sigma(X) - \frac{1}{\lambda}$
- **D(X)=**$\frac{1}{\lambda^2}$

4. Распределение зависит от единого параметра λ.

Математическая статистика.

- **Математическая статистика** – это раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей.
- **Задача мат. стат.:** исследование свойств выборки и обобщение этих свойств на генеральную совокупность.
- **Статистические данные** – сведения о том, какие значения принял интересующий исследователя признак в статистической совокупности.
- Наблюдения: *сплошное и выборочное, или несплошное*
- **Генеральная совокупность** – это вся подлежащая изучению совокупность объектов.
- **Выборка** – совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности.
- **Объём совокупности** – число объектов в совокупности.
- Метод статистического наблюдения, состоящий в том, что на основе изучения выборки делается заключение о всей ген. совокупности, называется **выборочным**.
- Выборка д/б *репрезентативной*. Она – репрезентативна, если:

1. Её осуществили случайно,
2. Все объекты генеральной совокупности имеют *равные* вероятности попасть в выборку.

Способы выборки: повторный (возвратный), бесповторный (безвозвратный).

- **Варианты СВ X** – это различные значения признака x , x , … , x , полученные в результате наблюдений.
- **Ранжирование вариантов ряда** – это расположение вариантов в порядке возрастания или убывания.
- **Вариационный ряд** – последовательность вариантов, записанная в порядке возрастания или убывания.