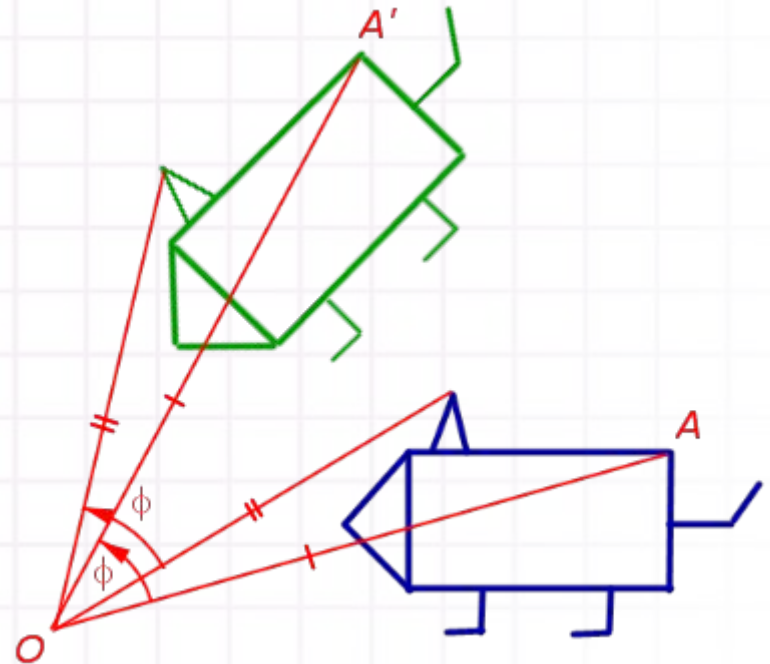


# Геометрія 9-А,В класи

## Розділ 4. Геометричні перетворення



# Тема уроку: Поворот

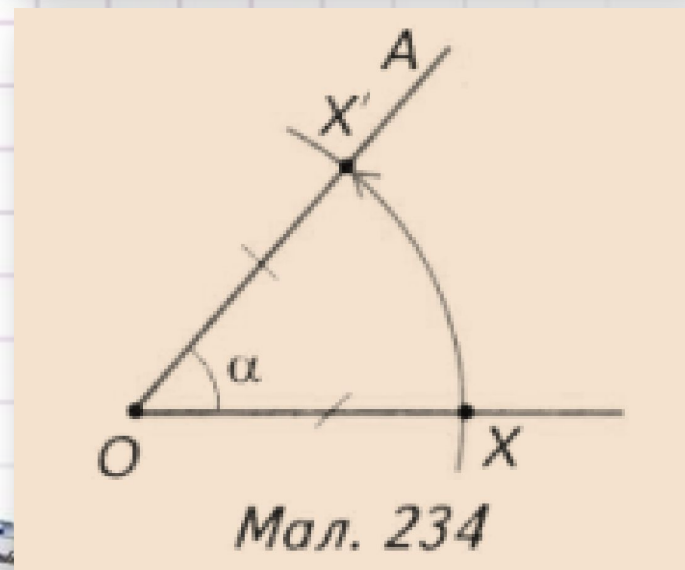
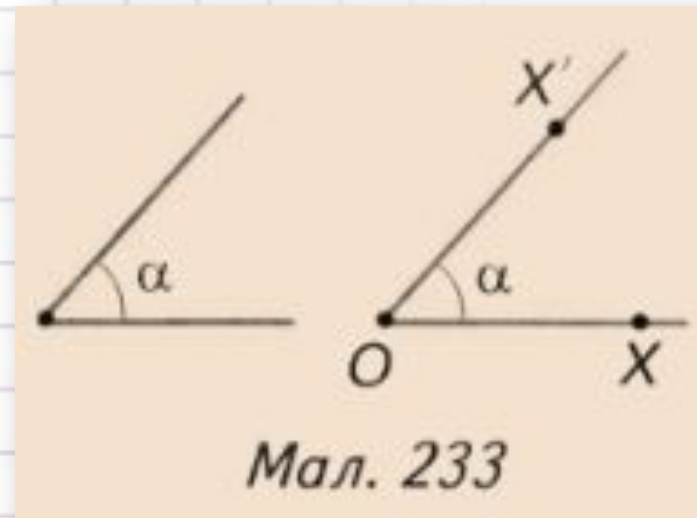


# Означення повороту

• Нехай дано кут  $\alpha$  і точку  $O$  (мал. 233).  
Виберемо іншу точку  $X$ . Точці  $X$  поставимо у відповідність таку точку  $X'$ , що: 1)  $OX = OX'$ ; 2) кут між променями  $OX$  і  $OX'$  дорівнює  $\alpha$ . Такий перехід від точки  $X$  до точки  $X'$  називається поворотом точки  $O$  на кут  $\alpha$  проти годинникової стрілки.

Сама точка  $O$  після повороту переходить сама в себе.

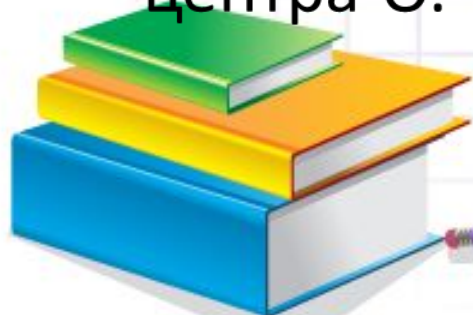
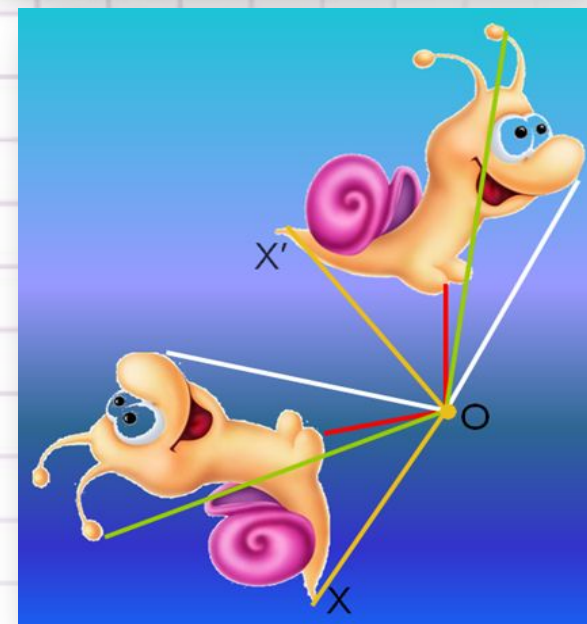
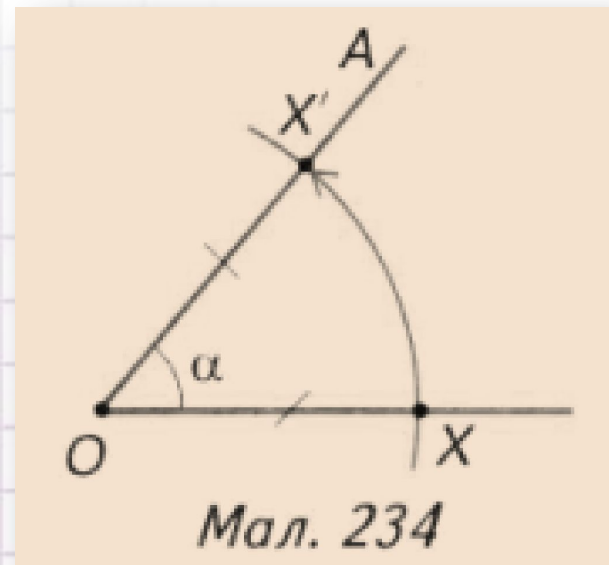
Точка  $O$  називається центром повороту, кут між променями  $OX$  і  $OX'$  - кутом повороту проти годинникової стрілки (мал. 234).



# Поворот

Якщо задано центр  $O$  і кут  $\alpha$  повороту, то точку  $X'$ , у яку переходить точка  $X$  у наслідок повороту проти годинникової стрілки, будуємо так:

- 1) Від променя  $OX$  відкладаємо кут  $XOA$ , що дорівнює куту  $\alpha$
- 2) На промені  $OA$  знаходимо точку  $X'$ , яка лежить на відстані  $OX$  від центра  $O$ .



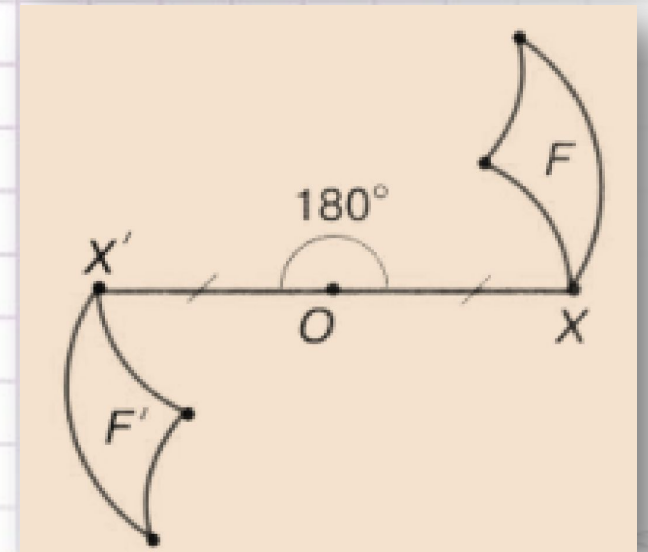
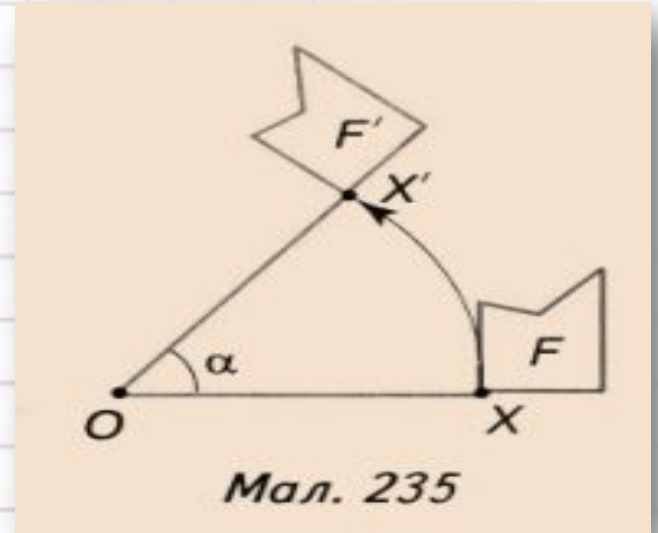
# Поворот фігури

• Якщо на площині дано деяку фігуру  $F$ , то для кожної її точки  $X$  можна знайти таку точку  $X'$ , у яку перейде  $X$  унаслідок повороту навколо точки  $O$  на кут  $\alpha$ .

У результаті отримаємо фігуру  $F'$ , в яку перейшла фігура  $F$  при заданому повороті.

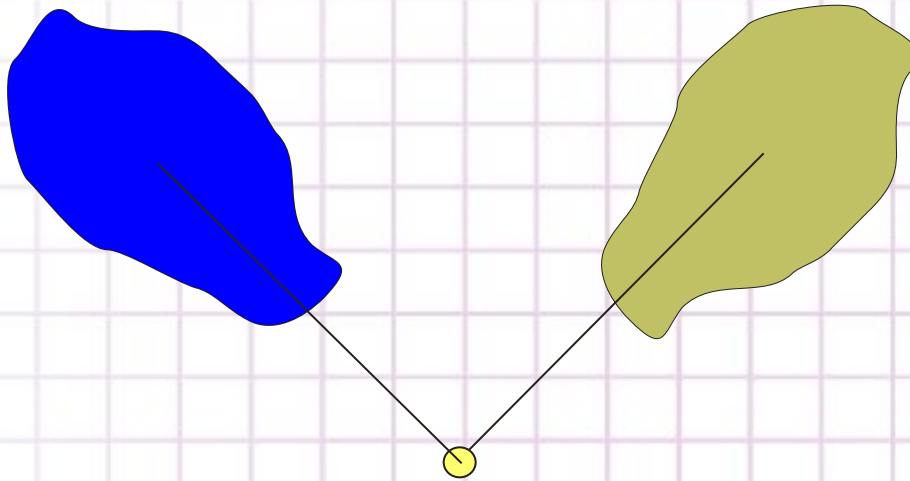
При цьому точка  $O$  переходить у себе.

***Поворот на кут  $180^\circ$  навколо точки  $O$  є симетрією відносно точки  $O$ .***



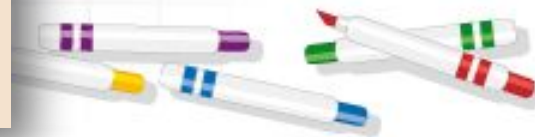
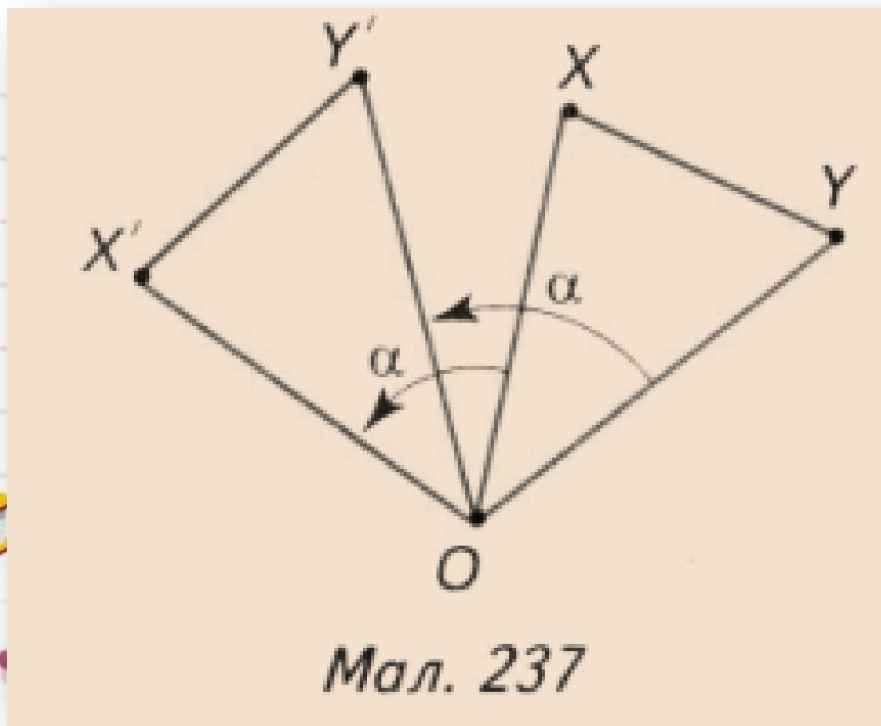
# Властивість повороту

Теорема. *Поворот є переміщенням*

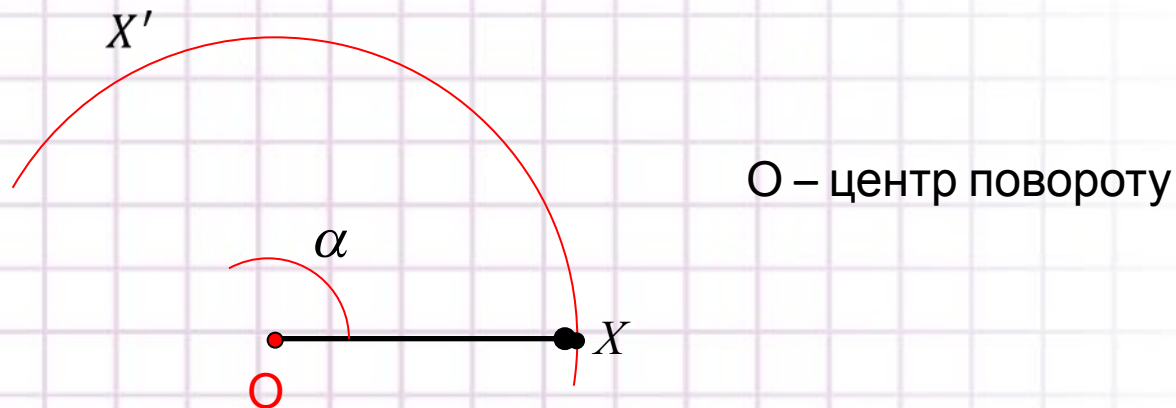


# Теорема. Поворот є переміщенням

**Доведення.** Нехай поворот навколо точки  $O$  на кут  $\alpha$  точки  $X, Y$  фігури  $F$  переводить у точки  $X', Y'$  фігури  $F'$  (мал. 237). Доведемо, що  $XU = X'Y'$ . Розглянемо загальний випадок, коли точки  $O, X, Y$  не лежать на одній прямій.  $\triangle OXY = \triangle OX'Y'$  за двома сторонами і кутом між ними. У них  $OX = OX', OY = OY'$  за означенням повороту і  $\angle XOY = \angle X'OY'$  (кожний з цих кутів дорівнює різниці кута  $\alpha$  і кута  $Y'OX$ ). З рівності трикутників випливає  $XU = X'Y'$

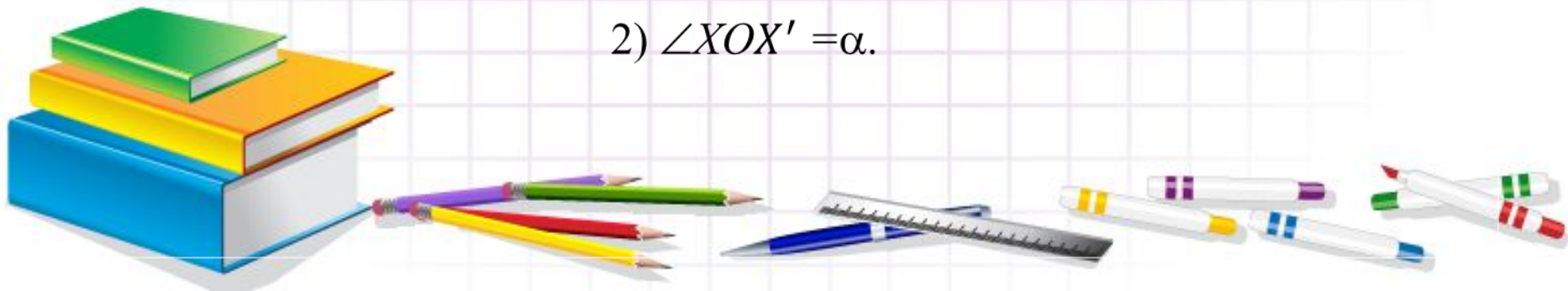


# Поворот



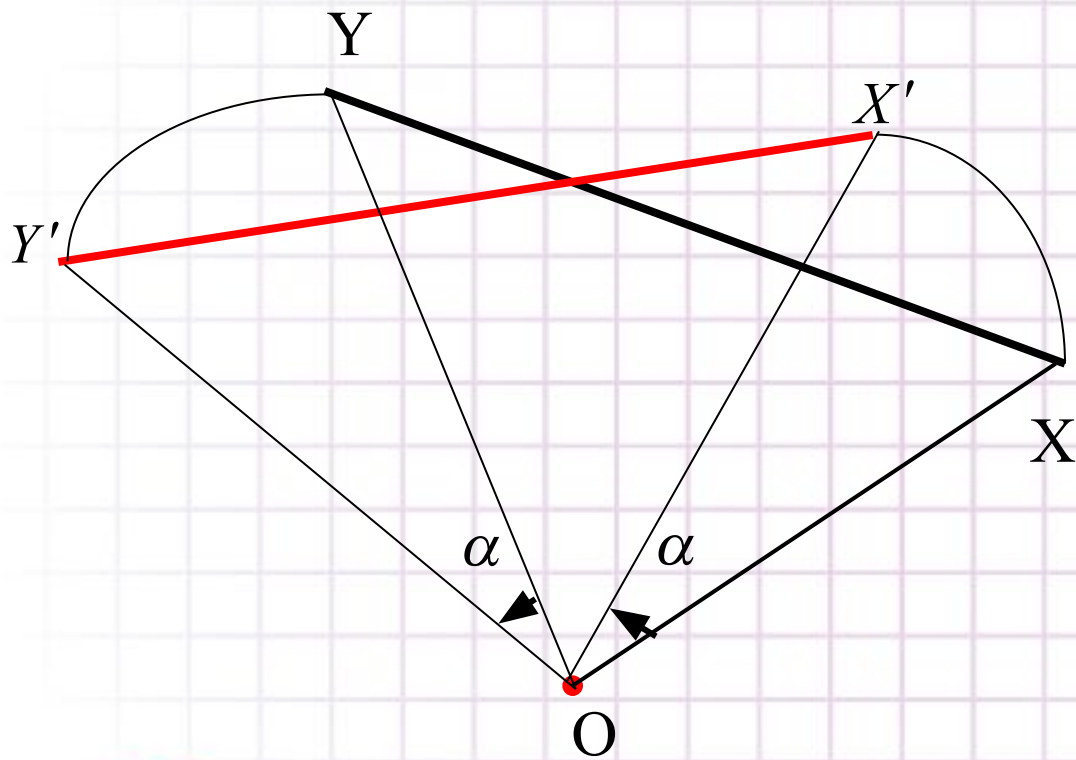
Точка  $X'$  є образом точки  $X$  при повороті навколо точки  $O$  на кут  $\alpha$ , якщо:

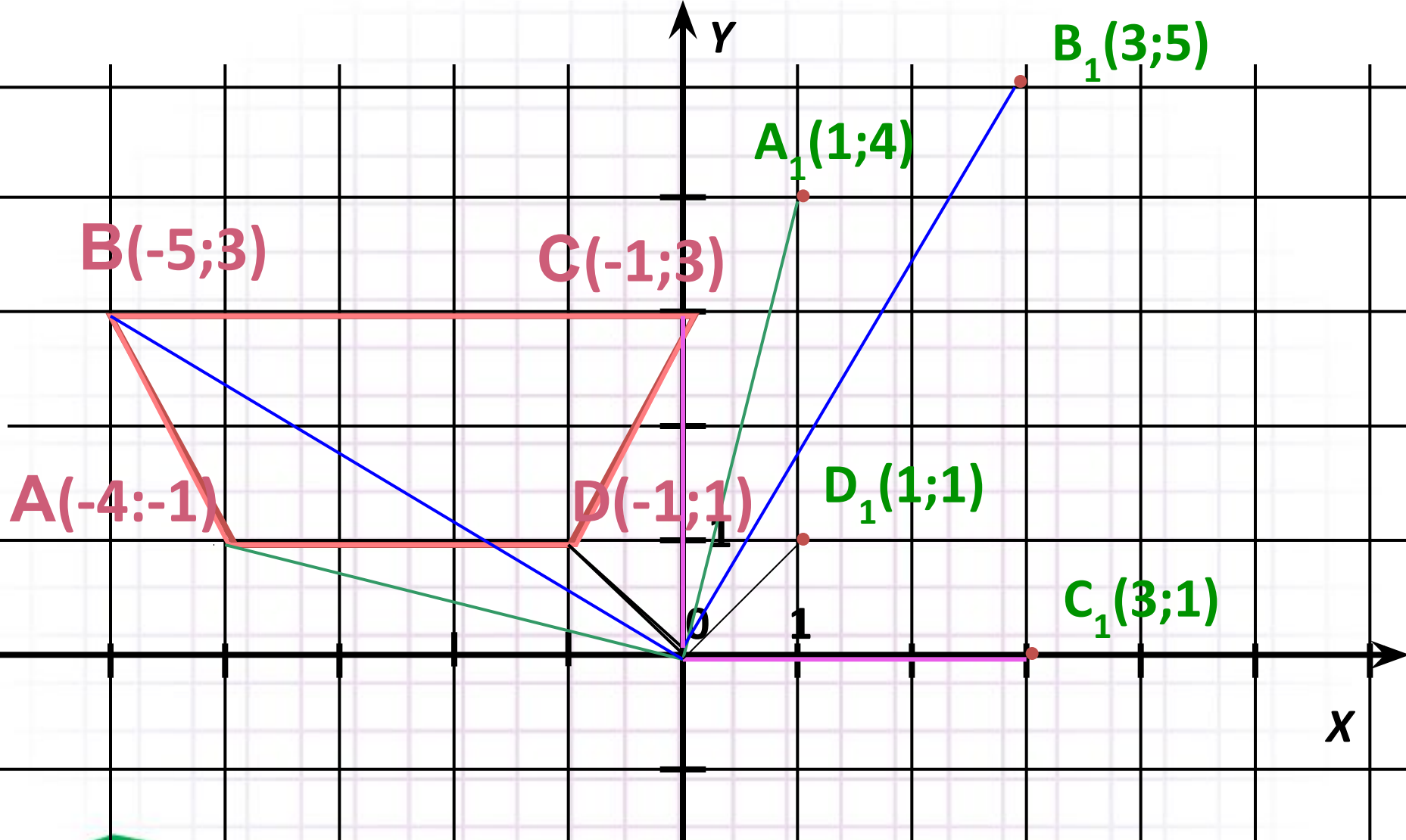
- 1)  $XO = X'O$ ;
- 2)  $\angle XO X' = \alpha$ .





# Властивість повороту

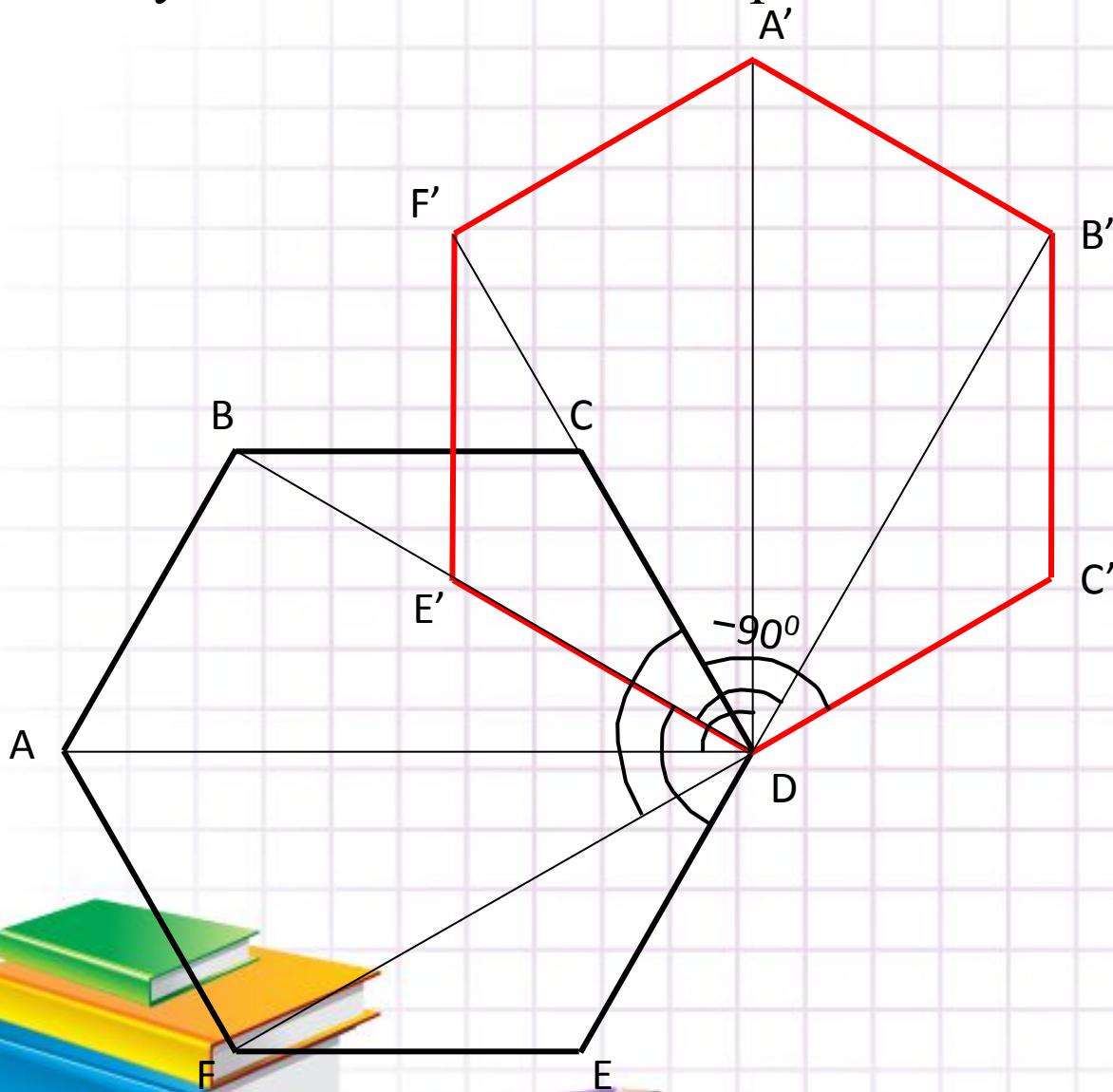




Побудувати образ даної трапеції при повороті на  $90^\circ$  навколо початку координат за

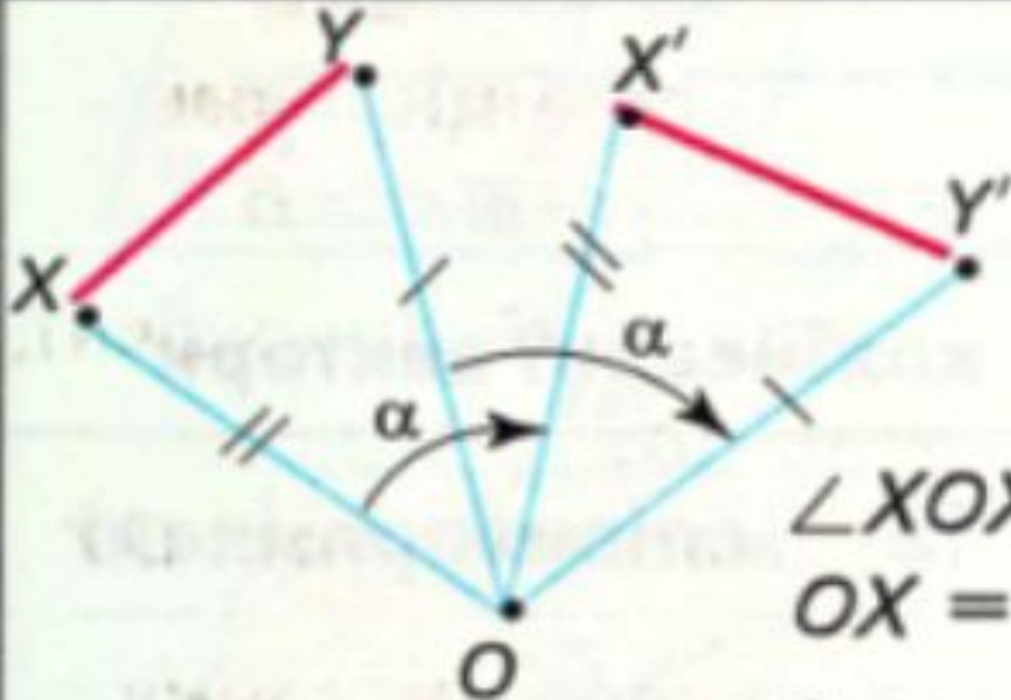


Поворот правильного шестикутника  $ABCDEF$  наколо точки  $D$  на прямой кут за годинниковою стрілкою.



# Висновки

## Поворот



$$\angle XOX' = \angle YOY' = \alpha,$$
$$OX = OX', \quad OY = OY',$$

$\alpha$  — кут повороту,

$O$  — центр повороту.

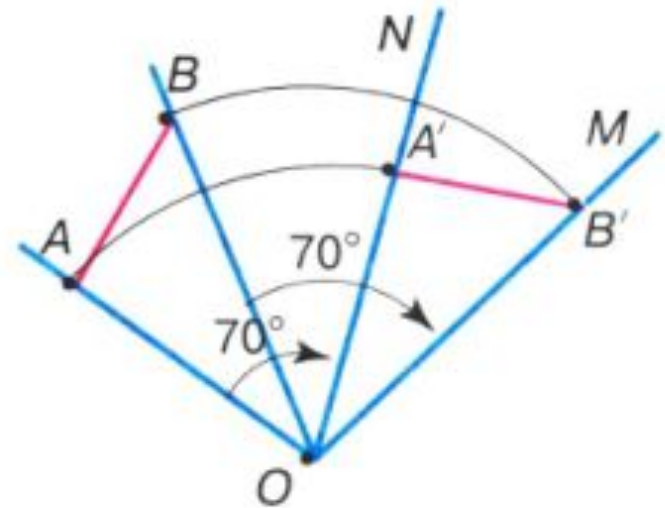
Поворот має всі властивості переміщення



# Опорна задача

**Задача.** Побудуйте відрізок, у який переходить відрізок  $AB$  при повороті навколо точки  $O$  на кут  $70^\circ$  за годинниковою стрілкою.

**Розв'язання.** Проводимо промені  $OA$  і  $OB$  (мал. 238). Відкладемо за годинниковою стрілкою  $\angle AON = 70^\circ$  і  $\angle BOM = 70^\circ$ . Відкладемо на промені  $ON$  відрізок  $OA' = OA$ , а на промені  $OM$  – відрізок  $OB' = OB$ . Сполучаємо точки  $A'$  і  $B'$ .



Мал. 238



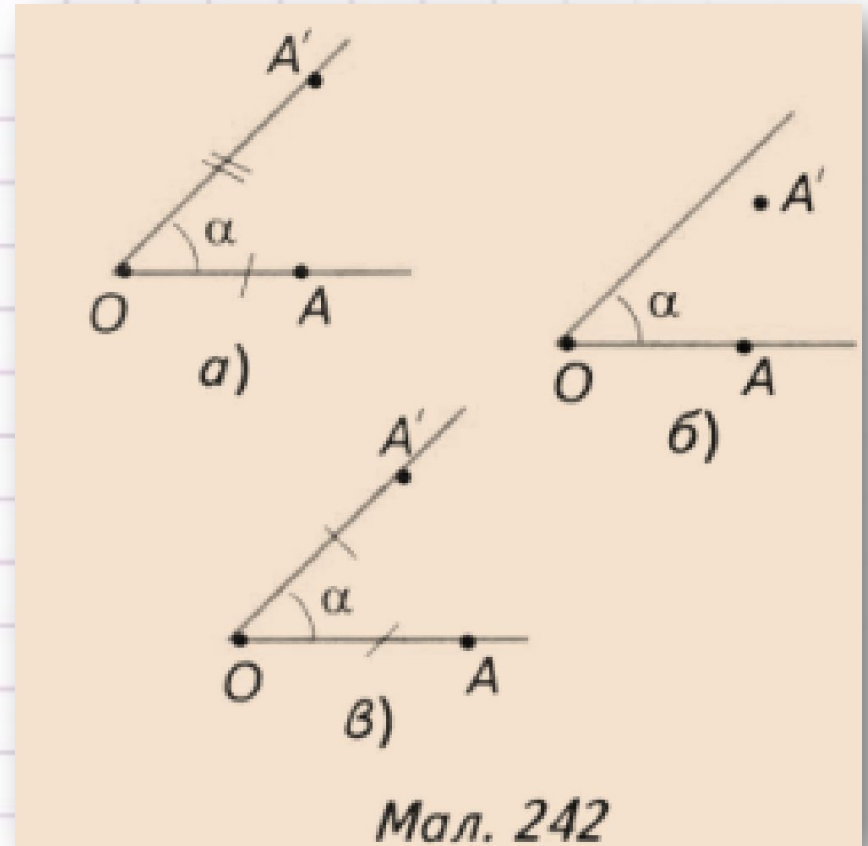
# Узагальнення вивченого

1. Що таке поворот?
2. Що таке центр повороту?
3. Що таке кут повороту?
4. Поворот – це переміщення?
5. Сформулюйте властивості простору.



# Усні вправи

635'. На якому з малюнків точка  $A$  перейшла в точку  $A'$  в наслідок повороту навколо точки  $O$  на кут  $\alpha$ .



# Вправи на побудову

638. Дано точки  $O$  і  $A$ . Побудуйте точку  $A'$ , в яку переходить точка  $A$  при повороті навколо точки  $O$ :

- 1) На кут  $50^{\circ}$  за годинниковою стрілкою
- 2) На кут  $120^{\circ}$  проти годинникової стрілки
- 3) На кут  $180^{\circ}$  за годинниковою стрілкою





# Тренувальні вправи

641. Накресліть відрізок  $AB$ . Виконайте поворот відрізка  $AB$ :

- 1) навколо точки  $A$  на кут  $150^\circ$  за годинниковою стрілкою;
- 2) навколо точки  $B$  на кут  $60^\circ$  проти годинникової стрілки;
- 3) навколо середини відрізка на кут  $40^\circ$  за годинниковою стрілкою.

642. У яку фігуру перейде при повороті на деякий кут:

- 1) пряма, що проходить через центр повороту;
- 2) коло, центр якого збігається з центром повороту;
- 3) кут з вершиною у центрі повороту?



# Тренувальні вправи

644. Побудуйте кут, у який переходить прямий кут  $MON$  при повороті навколо вершини  $O$  на  $45^\circ$ :

- 1) за годинниковою стрілкою;
- 2) проти годинникової стрілки.

645. Накресліть пряму  $a$  і позначте точку  $M$ , яка не лежить на прямій. Побудуйте пряму, в яку переходить пряма  $a$  при повороті навколо точки  $M$ :

- 1) на кут  $90^\circ$  за годинниковою стрілкою;
- 2) на кут  $45^\circ$  проти годинникової стрілки.



# Тренувальні вправи

646. Виконайте поворот даного кола навколо точки  $A$  на кут  $90^\circ$ , якщо:

- 1) точка  $A$  лежить поза колом;
- 2) точка  $A$  лежить на колі.

647. Позначте точки  $X$  і  $X'$ . Побудуйте геометричне місце центрів поворотів, при яких точка  $X$  переходить у точку  $X'$ .



# Коментоване виконання вправ

652. Доведіть, що рівносторонній трикутник при повороті навколо точки перетину його висот на кут  $120^{\circ}$  переходить у себе.

653. Через центр правильного трикутника проведено дві прямі, кут між якими  $60^{\circ}$ . Доведіть, що відрізки цих прямих, які містяться між сторонами трикутника, рівні між собою.

654. Через центр квадрата проведено дві взаємно перпендикулярні прямі. Доведіть, що відрізки прямих, які містяться усередині квадрата, рівні.



# Скласти алгоритм розв'язання задачі

655. Дано два кола. Поворотом на кут  $45^\circ$  одне коло переводиться в друге. Побудуйте центр цього повороту.

656. Дано два рівних відрізки  $AB$  і  $A'B'$ . Побудуйте центр  $O$  повороту, при якому точка  $A$  переходить у точку  $A'$  а точка  $B$  — у точку  $B'$ . Чи завжди можна знайти центр такого повороту?

657. Нехай на сторонах  $AB$  і  $BC$  трикутника  $ABC$  побудовано квадрати  $ABPO$  і  $BCMN$ . Квадрат  $ABPO$  і трикутник  $ABC$  знаходяться з різних боків відносно прямої  $AB$ , а квадрат  $BCMN$  і трикутник  $ABC$  — з одного боку відносно прямої  $BC$ . Доведіть, що відрізки  $PN$  і  $AC$  рівні та перпендикулярні.



# Колективне виконання вправ

658. При повороті навколо точки  $A$  на кут  $60^\circ$  кінець  $B$  відрізка  $BC$  переходить у кінець  $C$ , а кінець  $C$  — у точку  $D$ . Доведіть, що точки  $A, B, C, D$  — вершини ромба.

659. Виконайте поворот рівнобедреного прямокутного трикутника з катетом  $1$  см навколо вершини прямого кута на  $45^\circ$ . Знайдіть площу спільної частини даного трикутника і трикутника, який отримали при повороті.

## ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

660. Стрілки годинника показують  $12$  годин. Який час показуватиме годинник, якщо хвилинна стрілка здійснить поворот: 1) на  $60^\circ$ ; 2) на  $120^\circ$ ; 3) на  $150^\circ$  ?



# Домашнє завдання

- Опрацювати п. 19
- Виконати вправи № 639, 643, 648



# Підсумок уроку

З якими новими поняттями ми сьогодні познайомилися?

Чого ми навчилися на уроці?

Що для вас залишилося не зрозумілим?

