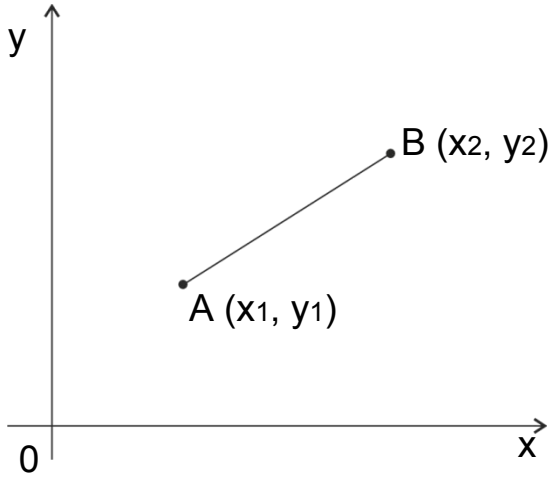
АЛГОРИТМЫ И ФОРМУЛЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

На алгоритмах вычислительной (аналитической) геометрии основаны решения многих задач, являющихся стандартными функциями программ КГ вообще и геоинформационных систем в частности. Мы рассмотрим основные, наиболее употребимые формулы и алгоритмы. Начнем с тех, на которых основаны картометрические функции.

1. Расстояние между двумя точками.

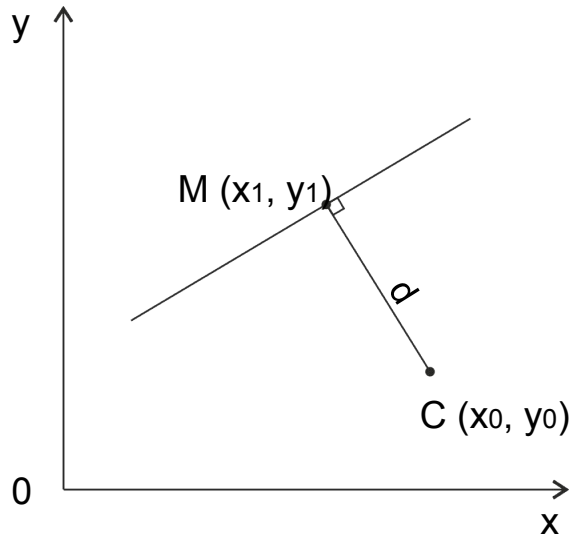


Как найти расстояние?

В прямоугольной системе координат оно вычисляется по теореме Пифагора:

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Расстояние от точки до прямой



По т. Пифагора $$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \qquad (1)$$

Координаты x_1 и y_1 находятся из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} A_x + B_y + C = 0 \\ A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0 \end{cases}$$ - ур-е прямой, проходящей через точку М и перпендикулярной к исходной

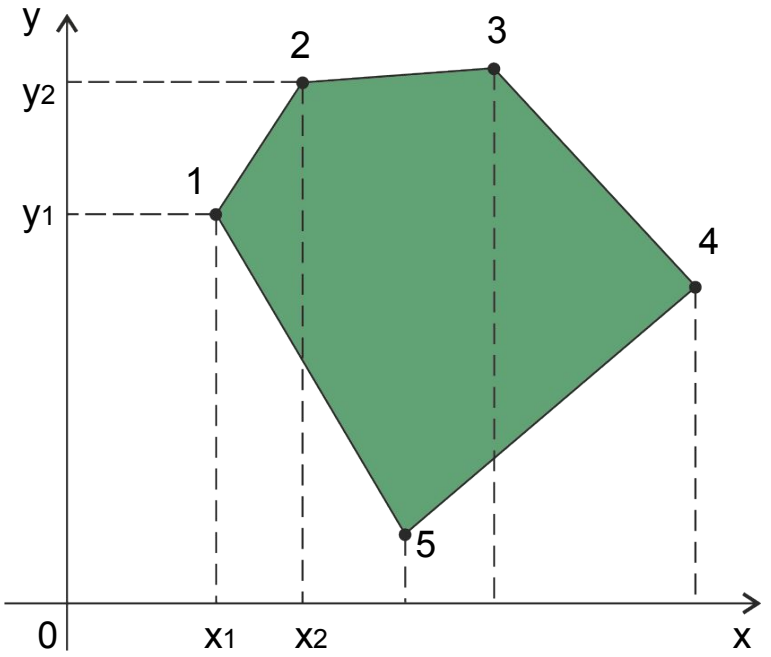
Решив систему и подставив в (1) получаем:

$$d = \left| \frac{A_{x_0} + B_{y_0} + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Площадь многоугольника

Вычисление площади многоугольника произвольной формы основано на аппроксимации простыми фигурами, чьи площади находятся по элементарным формулам.

Обычно используют аппроксимацию трапециями.



Чему равна площадь трапеции?

$$s = \frac{a+b}{2}h$$

$$S_{1,2,x_2,x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)}{2}$$

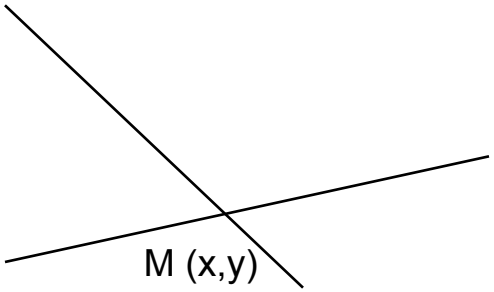
Двигаясь по часовой стрелке находят площади всех трапеций. При этом часть трапеций имеет отрицательную площадь (при $x_{i+1} < x_i$).

Площадь всего многоугольника равна сумме площадей всех получившихся трапеций:

$$S = \frac{1}{2}\sum (x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} + y_i)$$

Формула справедлива при нумерации вершин по часовой стрелке.

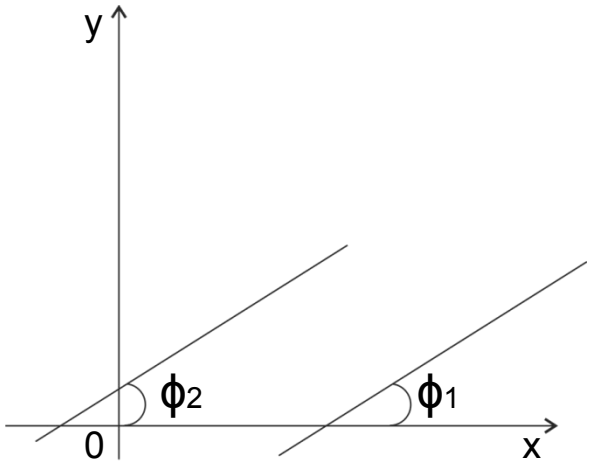
Нахождение точки пересечения двух прямых



$$\begin{cases} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2 \end{cases}$$

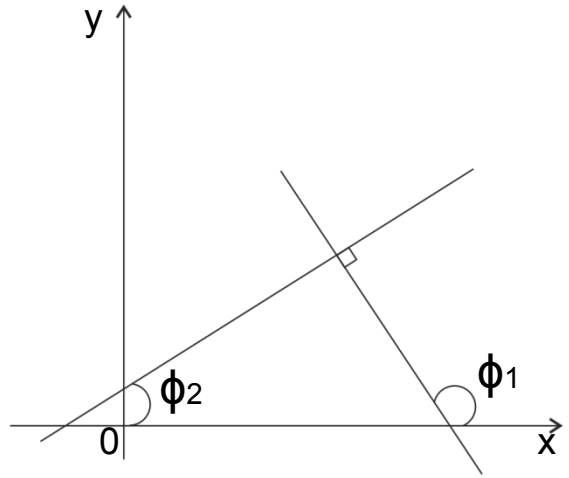
Для нахождения точки пересечения прямых надо решить систему линейных уравнений

Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых



$$\begin{cases} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2 \end{cases}$$

Прямые || при **tg ϕ1 = tg ϕ2** или **K1 = K2**

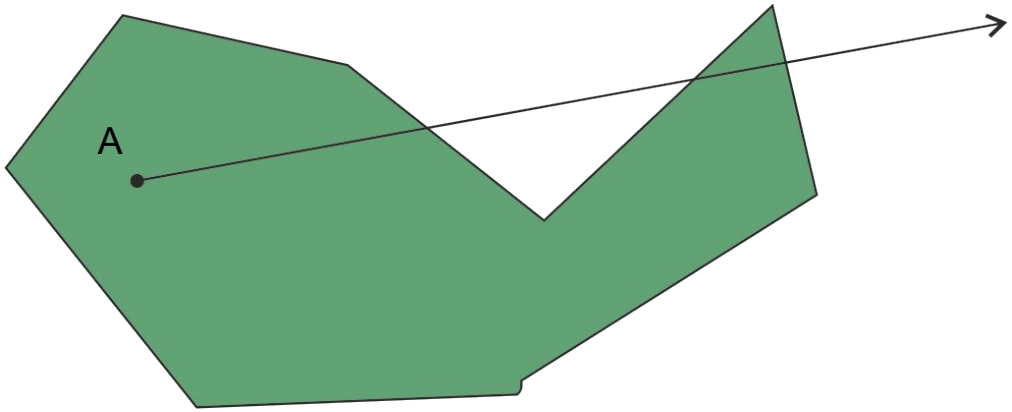


В случае ⊥ прямых $\phi_2 - \phi_1 = \pi/2$

$\phi_2 = \phi_1 + \pi/2$ или $\operatorname{tg}\phi_2 = \operatorname{tg}(\phi_1 + \pi/2) = -\operatorname{ctg}\phi_1$

$\operatorname{tg}\phi_1 \operatorname{tg}\phi_2 = -1$ или **$K_1 K_2 = -1$**

Условие принадлежности точки полигону



Находится точка внутри или снаружи?

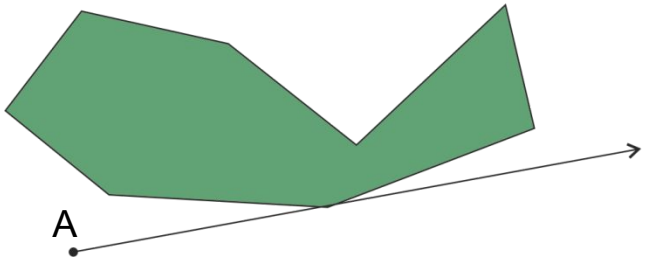
Машина «не видит». Как определить?

Выпускается произвольный луч из точки А и считается количество пересечений:

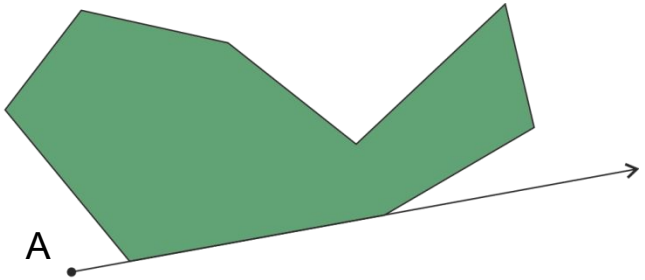
Если четное – снаружи

Если не четное - внутри

На практике возможны неоднозначные случаи:

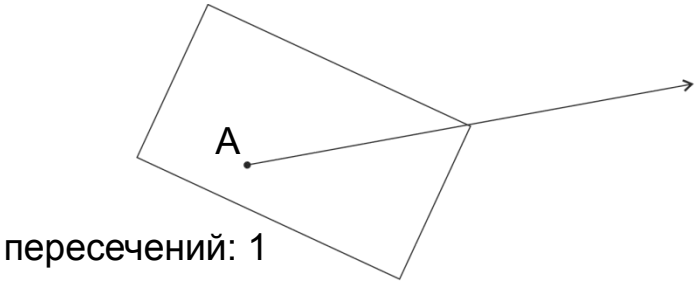


Луч попал в вершину

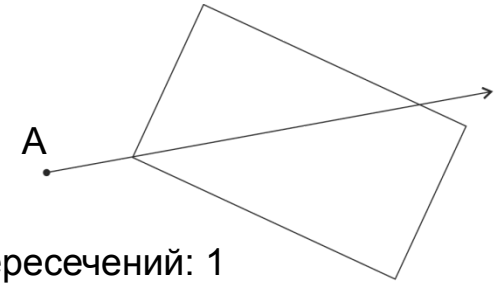


Луч попал в ребро

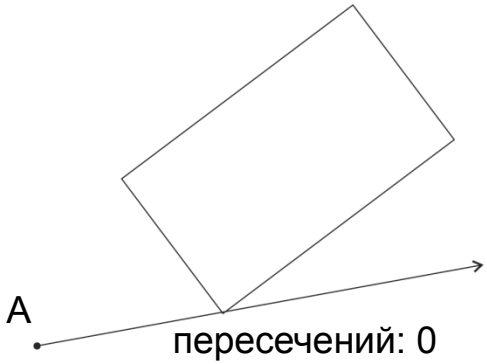
Правило: если луч попал в вершину, то засчитываются пересечения только тех ребер, для которых эта вершина является верхней.



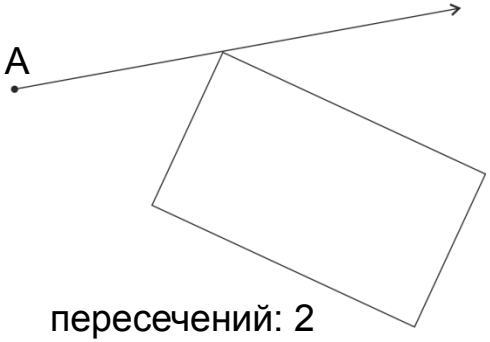
пересечений: 1



пересечений: 1



пересечений: 0

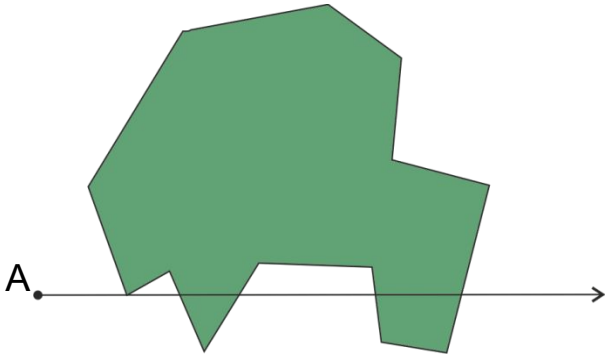


пересечений: 2

Чтобы не разбираться с попаданием луча строго в ребро, выпускают не произвольный луч, а горизонтальный, а все горизонтальные ребра игнорируют.

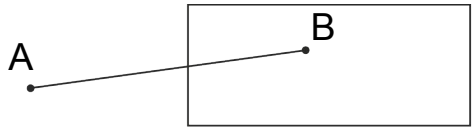
пересечений: 0

Сколько пересечений засчитывается?

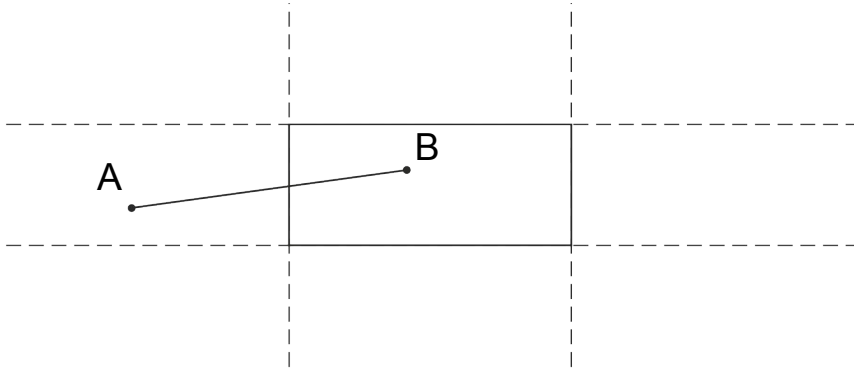


Отсечение отрезка. Алгоритм Сазерленда – Кохена (или Когана)

Простейший случай – часть отрезка отрезать прямоугольником.



Проблема в том, что машина не видит пересекает ли сторона прямоугольника отрезок и если да, то какая.



Стороны прямоугольника продлеваются прямыми в бесконечность

Каждой получившейся части плоскости ставится в соответствие 4-битовый код:

0011	0010	0110
0001	0000	0100
1001	1000	1100

бит 0 – находится или нет левее прямоугольника

бит 1 – находится или нет выше прямоугольника

бит 2 – находится или нет правее прямоугольника

бит 3 – находится или нет ниже прямоугольника

Порядок: 3-й, 2-й, 1-й, 0-й.

1 – да, 0 – нет.

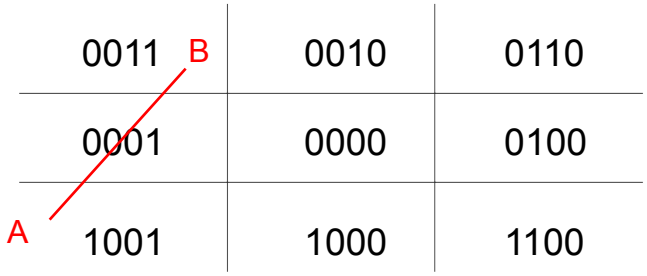
Алгоритм определяет код конечных точек отрезка.

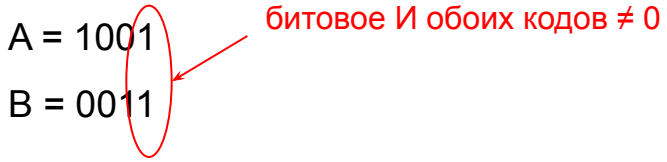
Тривиальные случаи:

а). если оба кода = 0000, то отрезок полностью находится в прямоугольнике;

б). если один = 0000, а другой нет, то по коду определяется секущая сторона и находится точка пересечения;

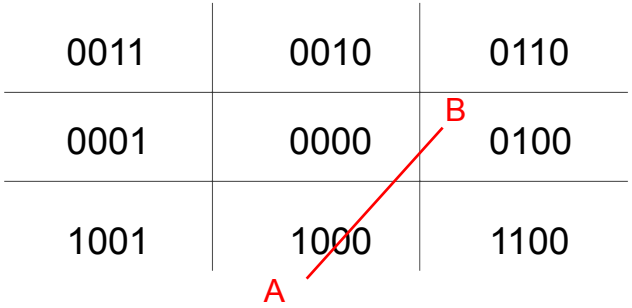
в). если битовое **И** обоих кодов не равно нулю, то отрезок не пересекает прямоугольник (так как это значит, что обе конечные точки отрезка находятся с одной стороны прямоугольника).



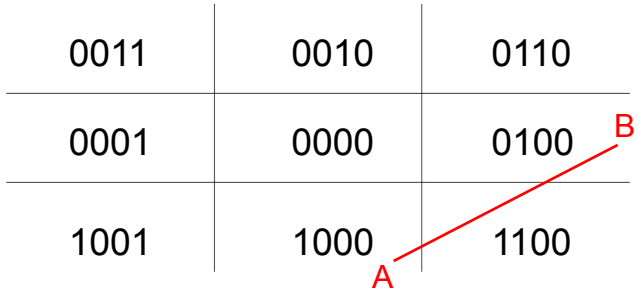


Не тривиальные случаи:

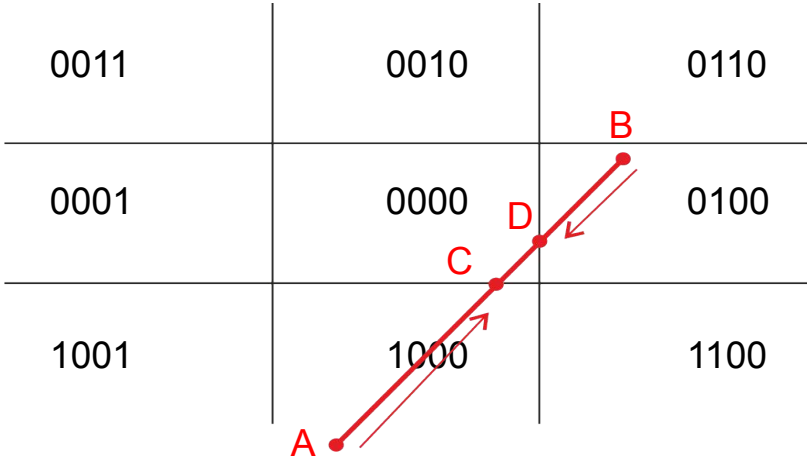
а).



б).



Алгоритм выбирает конечную точку, находящуюся вне прямоугольника, находит ближайшую к ней точку пересечения отрезка с одной из линий, образующей стороны прямоугольника, и использует эту точку пересечения как новую конечную точку отрезка. Оставшийся отрезок снова пропускается через алгоритм.

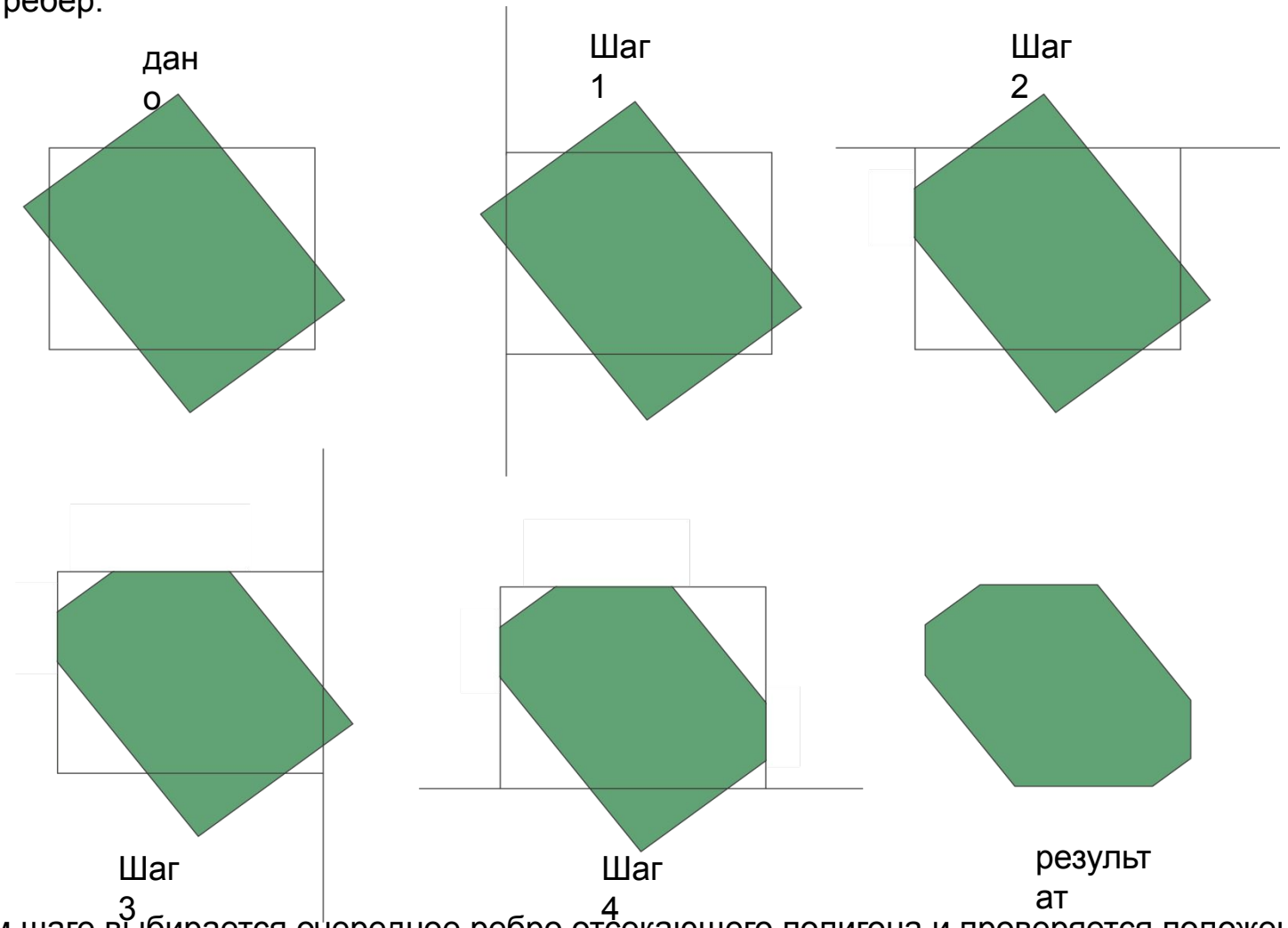


Коды концов отрезка CD = 0000, т.е. это часть исходного отрезка, попавшая внутрь прямоугольника.

В случае б). действия аналогичные, но поскольку коды ни одного из концов ≠ 0000, отсечения нет.

Пересечение двух полигонов. Алгоритм Сазерленда – Ходжмана.

Алгоритм разбивает задачу на ряд более простых задач об отсечении полигона прямой, пересекающей одно из ребер.



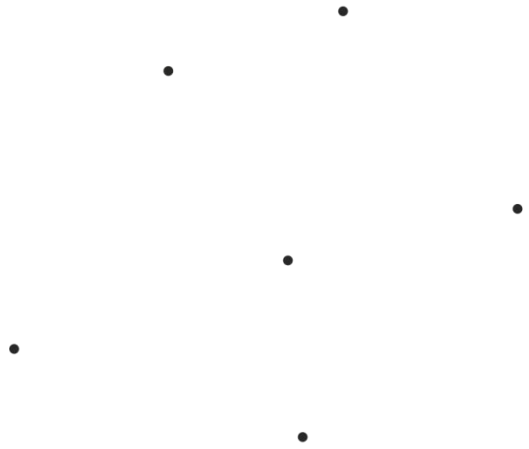
На каждом шаге выбирается очередное ребро отсекающего полигона и проверяется положение всех вершин относительно прямой, проходящей через это ребро. При этом в полученный многоугольник добавляется 0, 1 или 2 вершины.

Триангуляция Делоне

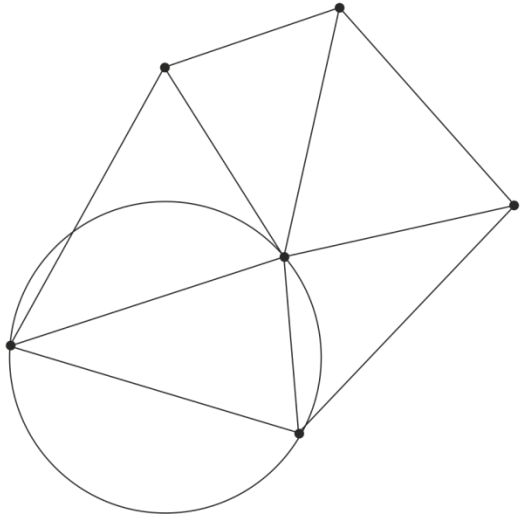
Названа так в честь русского математика Бориса Николаевича Делоне.

Является наиболее сбалансированной (или наименее вырожденной) из всех возможных на данном наборе точек.

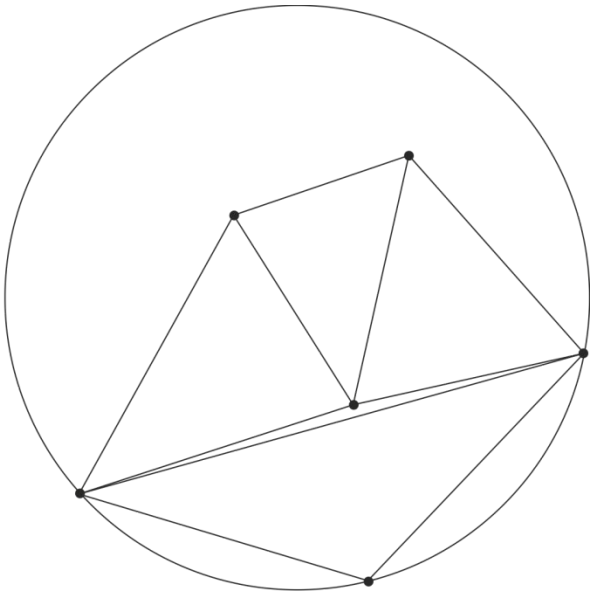
Триангуляцией Делоне называется триангуляция набора точек S, если окружность, описанная вокруг каждого из треугольников, не будет содержать внутри себя точек набора S.



Набор точек S

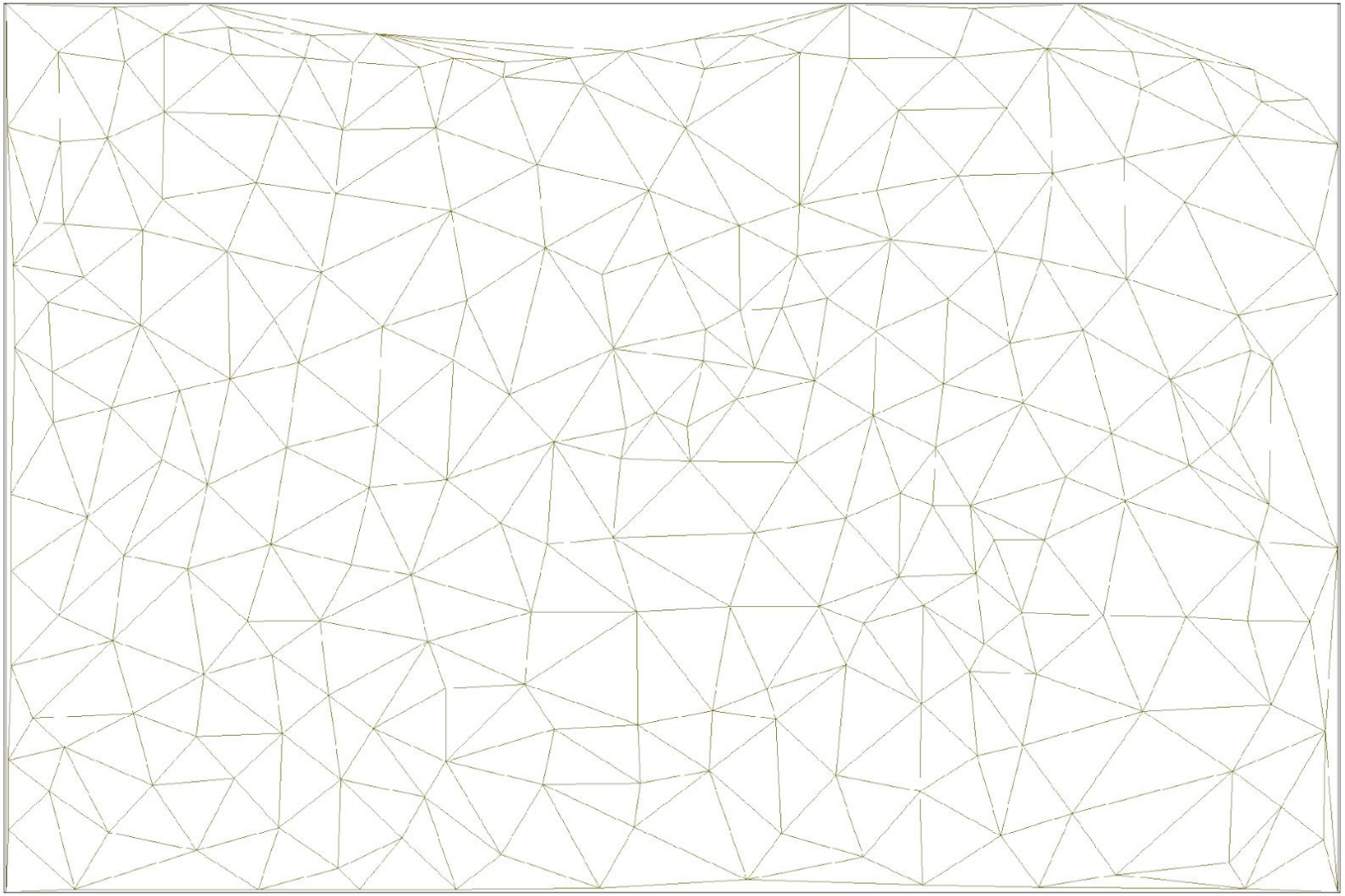


Триангуляция Делоне



Не триангуляция Делоне

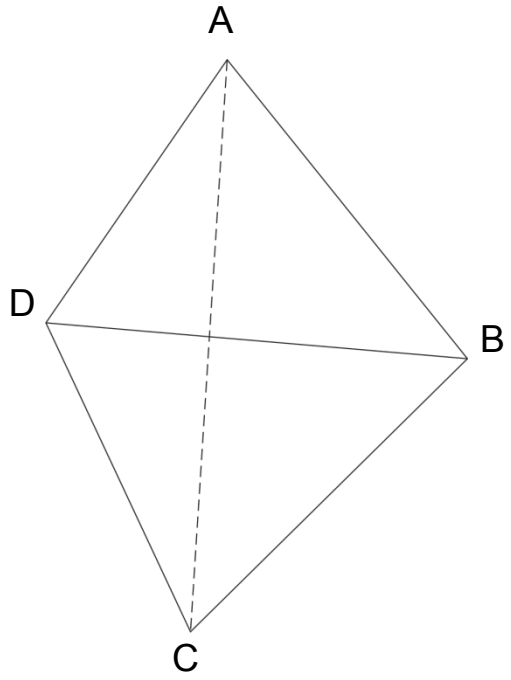
Триангуляция Делоне



Есть множество алгоритмов построения, они делятся на декрементные и инкрементные.

Декрементные – строят непосредственно сразу триангуляцию Делоне. Они не эффективны при большом количестве точек (много операций – много времени).

Инкрементные – базируются на перестройке существующей триангуляции флипами. Флипом называется операция переброски диагонали выпуклого четырехугольника.



Флип четырехугольника: диагональ AC заменяется на BD.

Общая схема инкрементных алгоритмов:

1. Сначала строится произвольная триангуляция
2. Для каждой точки последовательно выбирается гнездо треугольников, которые имеют эту точку в качестве вершины
3. Для каждого треугольника гнезда последовательно: по или против часовой стрелки ищется сопряженный треугольник
4. Каждая полученная пара треугольников проверяется на соответствие триангуляции Делоне. Если соответствует – помечается как проверенная и двигается дальше, если нет, то в 4-угольнике, образованном парой сопряженных треугольников делается флип с образованием двух новых.

Алгоритм работает до тех пор, пока все треугольники не будут удовлетворять условиям триангуляции Делоне.

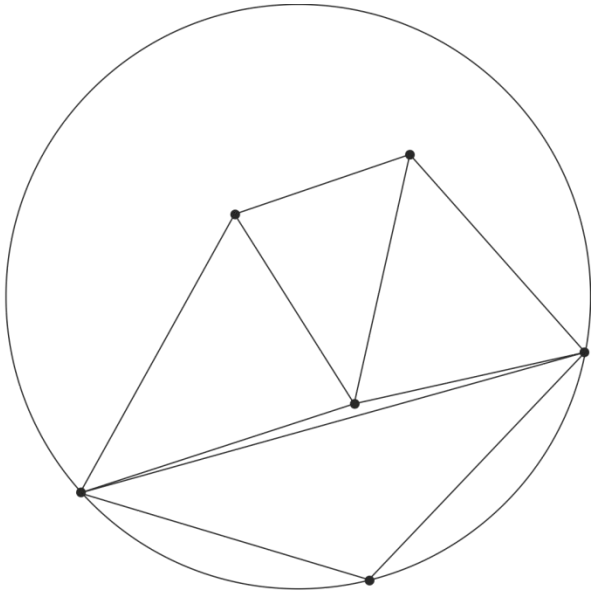


Диаграмма Вороного

Названа так в честь русского математика Георгия Феодосьевича Вороного. Также в литературе может называться: полигоны Тиссена, ячейки Дирихле или области Дирихле-Вороного, зоны Вигнера-Зейтца.

Диаграмма Вороного – геометрическая конструкция, образованная относительно исходных точек таким образом, что границы полигонов являются отрезками срединных перпендикуляров, восстановленных к сторонам треугольников триангуляции Делоне.

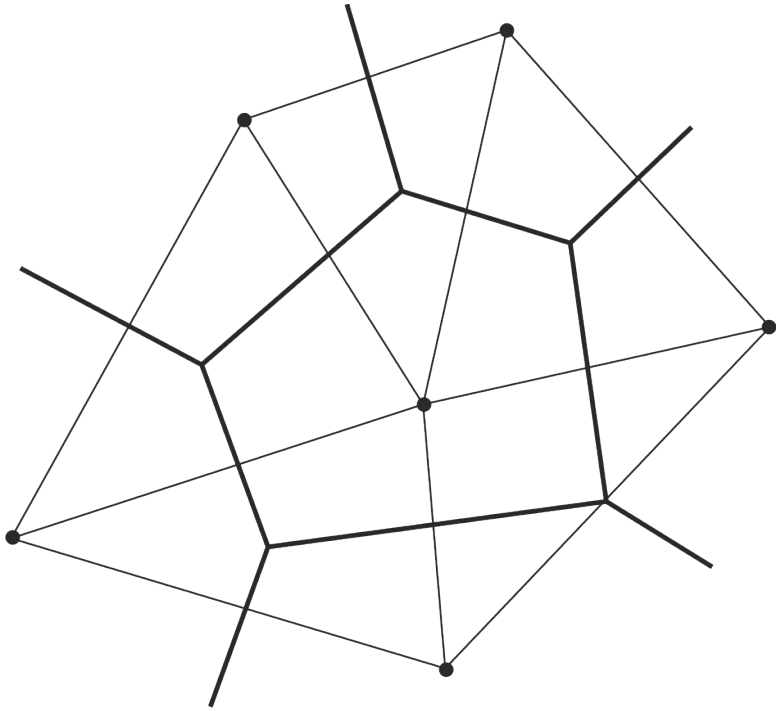
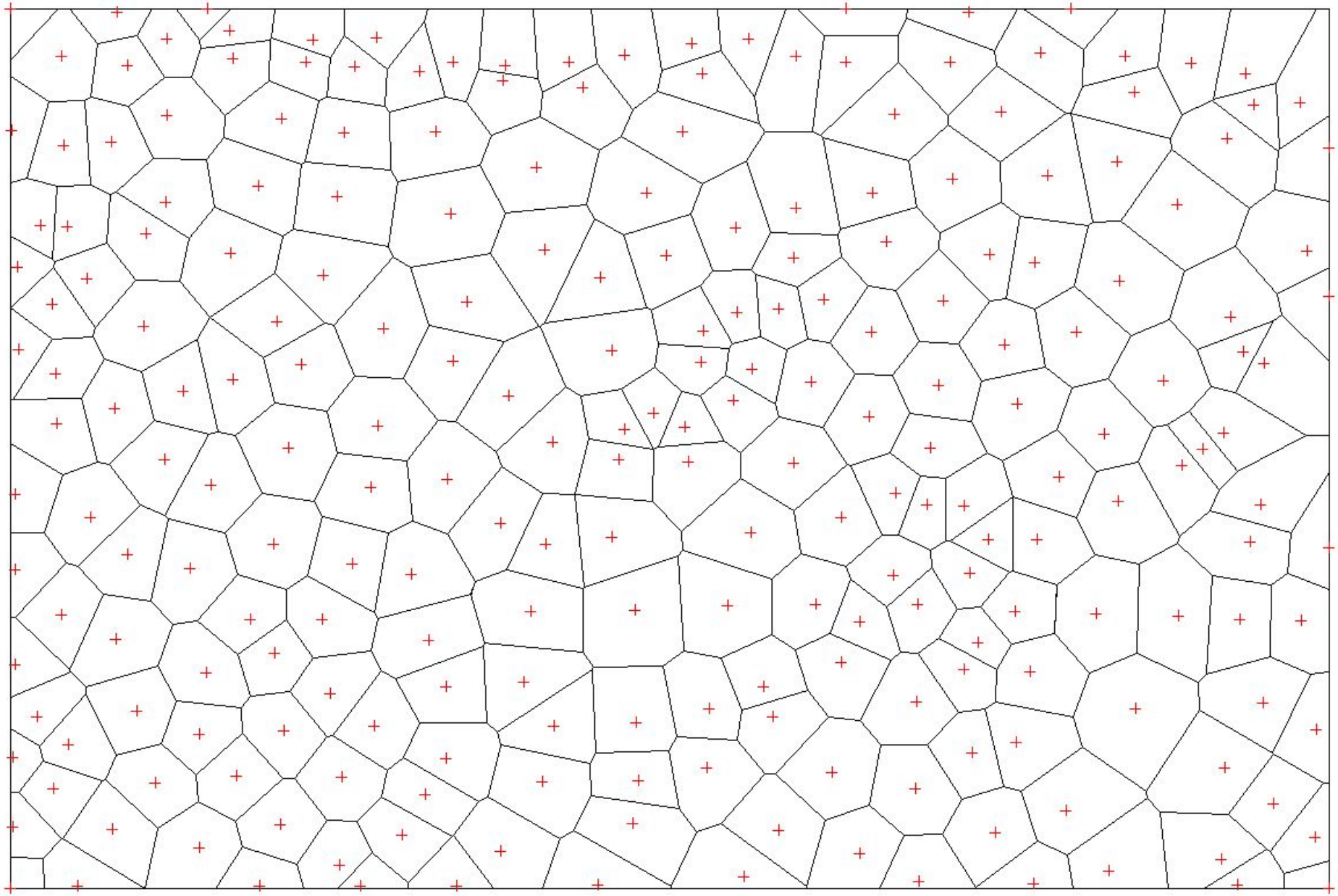
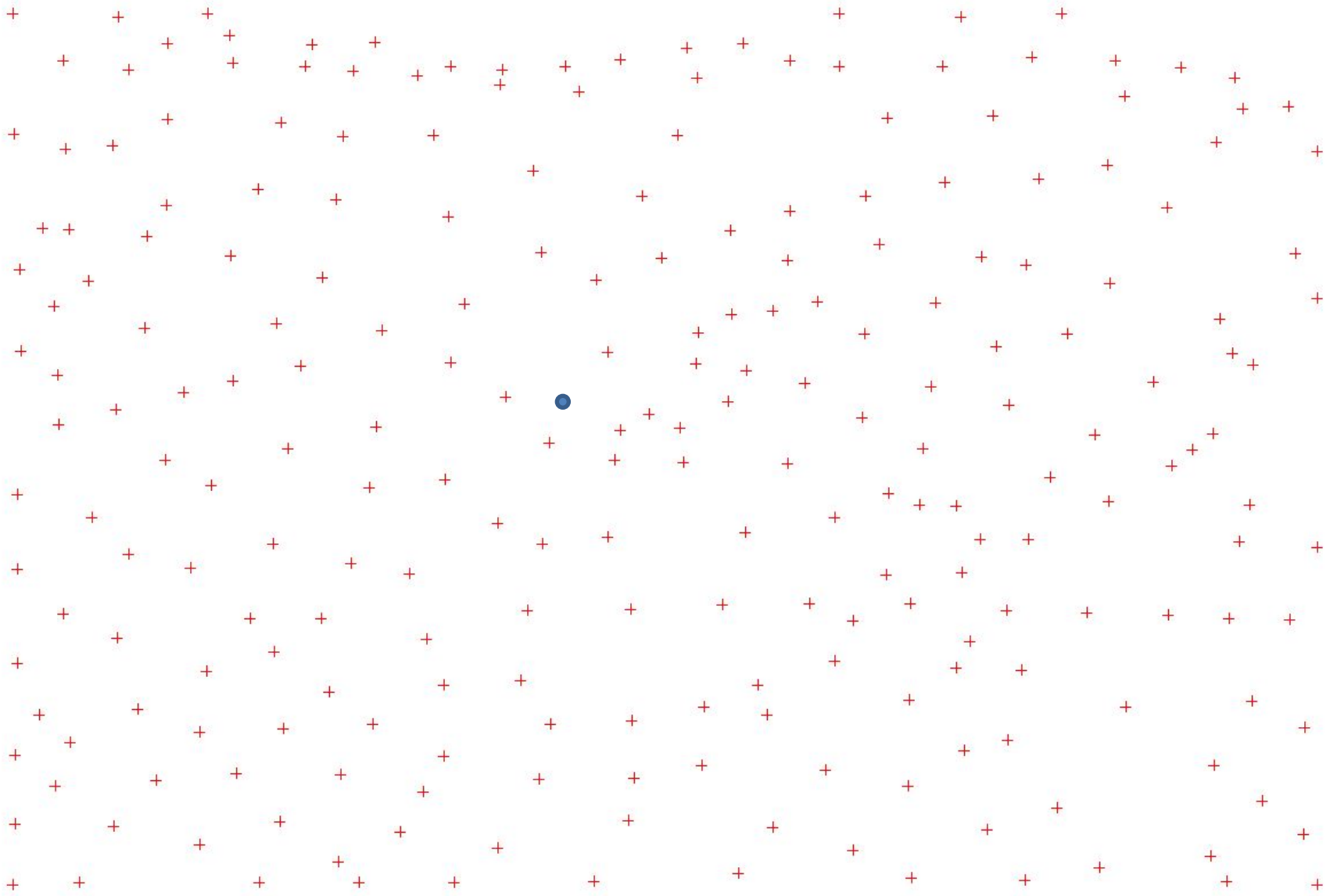


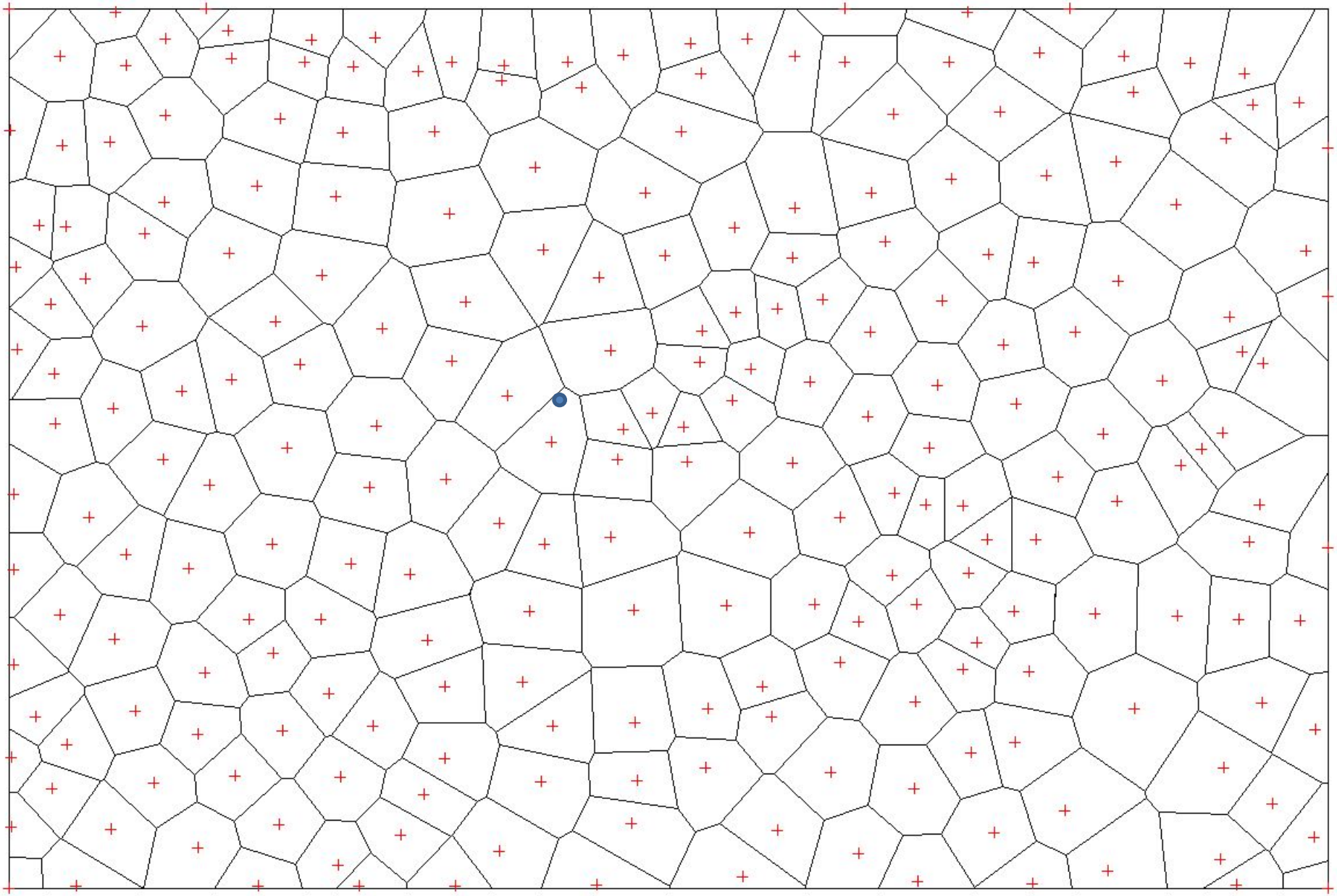
Диаграмма Вороного



Области применения:

Основное использование – построение зон тяготения, например, так называемая «задача почтовых отделений»





Другая область применения – использование весовых диаграмм.