

# Практическое занятие 5

## Гидростатика.

### Поверхностные явления.

#### Гидромеханика идеальной и вязкой жидкости.

Давление силы на поверхность

$$p = \frac{F_n}{S}$$
$$[p] = \frac{Н}{м^2} = Па$$

Сила давления на  
поверхность  
независимо от  
природы силы:

*перпендикулярна*  
*поверхности тела*  
в любой точке тела

$$F_{\partial} = pS$$

Действует на тело  
«снаружи»

# Закон Паскаля

Давление, производимое на поверхность жидкости (газа), передается во все точки жидкости (газа) без изменения

Абсолютное давление (следствие) складывается из «внутренних» давлений, обусловленных свойствами системы (внутренние причины) и внешнего атмосферного давления (внешняя причина)

$$P_{абс.} = P_0 + \sum P_{вн.}$$

Суммарное «внутреннее» давление —  
*избыточное над атмосферным.*

Измеряется манометром.

$$P_{изб.} = \sum P_{вн.}$$

Часто составляющие абсолютного давления измеряются  
во внесистемных единицах:

$$1 \text{ мм рт.ст.} = 13600 \cdot 9,81 \cdot 10^{-3} = 133 \text{ Па}$$

$$1 \text{ мм вод.ст.} = 1000 \cdot 9,81 \cdot 10^{-3} = 9,81 \text{ Па}$$

Атмосферное давление измеряется барометром

Нормальное атмосферное давление:

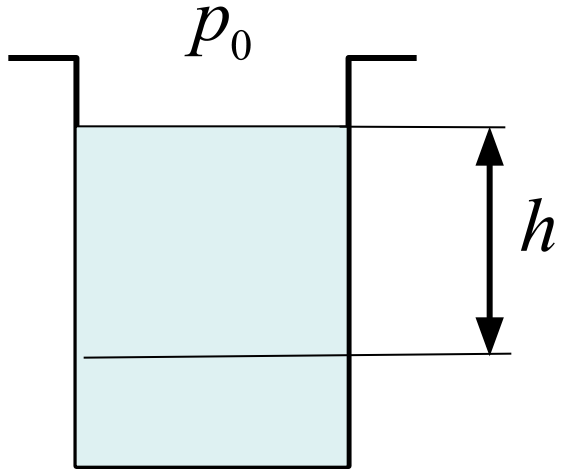
$$P_0 = 10^5 \text{ Па} \quad \text{или} \quad 760 \text{ мм рт.ст.}$$

Абсолютное давление:

$$P_{абс.} = P_0 + P_{изб.}$$

Пример:

абсолютное давление  
на глубине  $h$  в водоеме



«Внутреннее» гидростатическое  
давление:  $p_{\text{вн.}} = p_{\text{ГС}} = \rho gh$

«Внешнее» атмосферное  
давление:  $p_0$

Абсолютное давление  
(основное уравнение  
гидростатики):

$$p_{\text{абс.}} = p_0 + \rho gh$$

На какой глубине в водоеме давление в 2 раза больше нормального (атмосферного)?

Атмосферное давление:

$$p_0 = 10^5 \text{ Па}$$

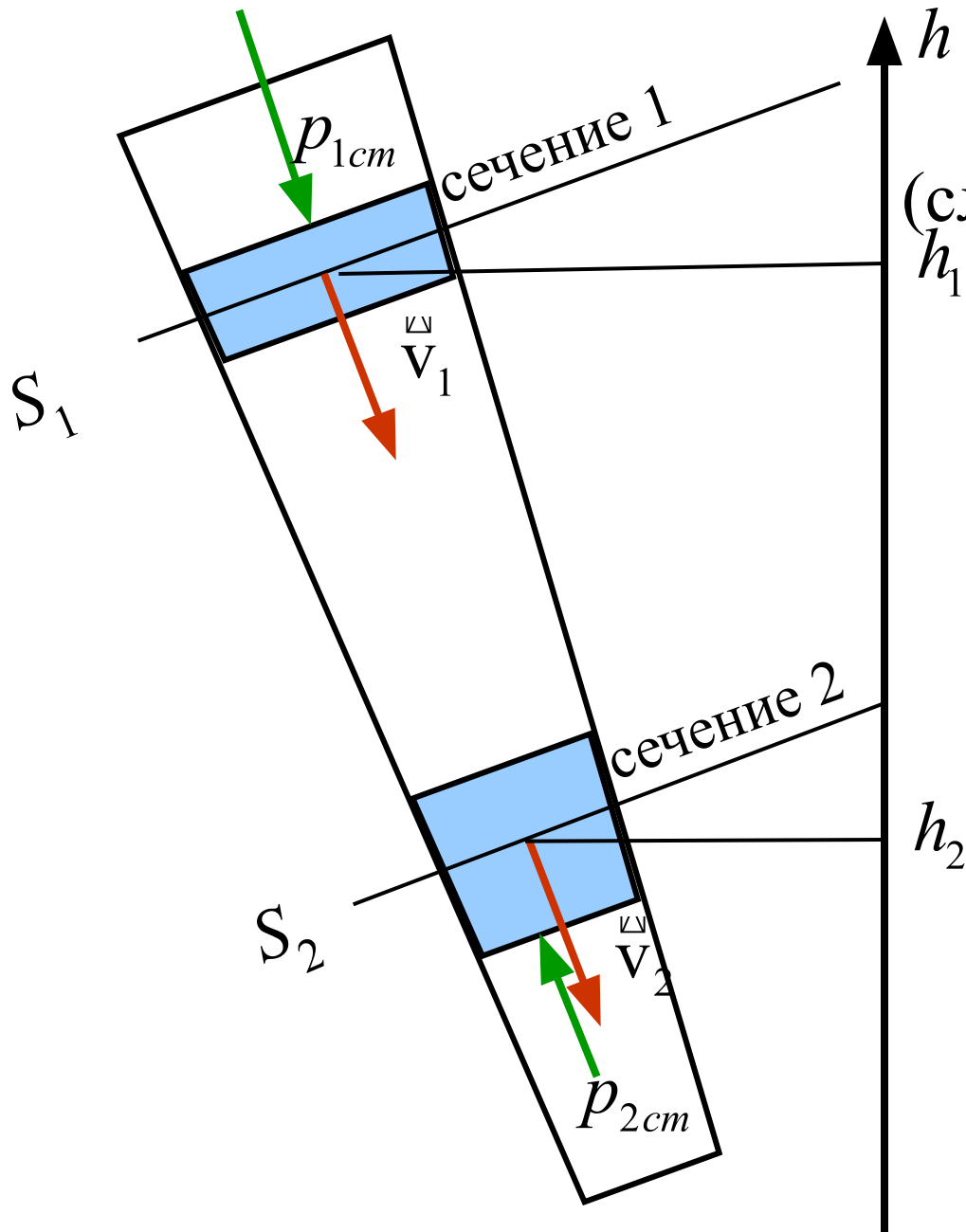
Абсолютное давление на глубине  $h$ :

$$p_{\text{абс.}} = p_0 + \rho gh$$

$$\frac{p_{\text{абс.}}}{p_0} = \frac{p_0 + \rho gh}{p_0} = 1 + \frac{\rho gh}{p_0} = 2$$

$$h = \frac{p_0}{\rho g} = \frac{10^5}{10^3 \cdot 10} = 10$$

# Участок трубы с идеальной жидкостью



Уравнение  
неразрывности струи  
(следствие несжимаемости):

$$Q_V = Sv = const$$

$$Q_m = \rho Sv = const$$

$S$  – площадь сечения

$v$  – скорость жидкости  
в данном сечении

$h$  – высота сечения  
относительно  
условного «0»

Составляющие абсолютного давления:

$$p_{абс.} = p_0 + p_{изб.}$$

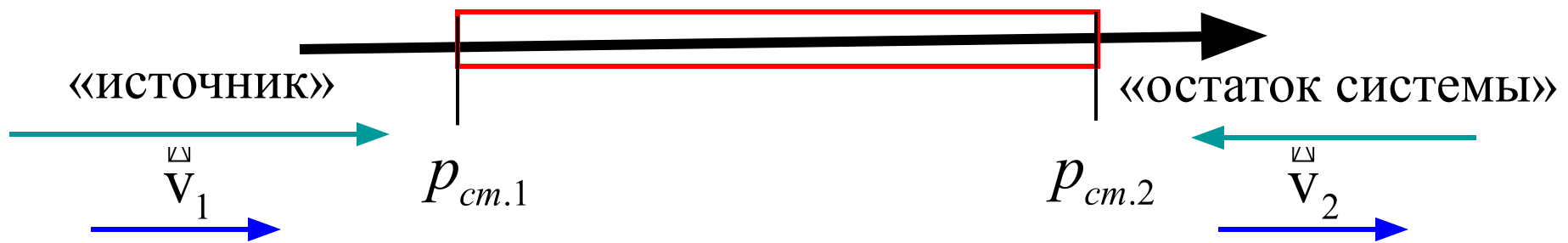
Атмосферное давление:

$$p_{01} = p_{02} = p_0$$

Составляющие избыточного давления:

1.  $p_{ст.}$  – статическое давление на выделенное сечение «снаружи», связанное с работой по перемещению объема жидкости против сил давления

# Трубопровод



$p_{ст.1}$  – статическое давление со стороны «источника»

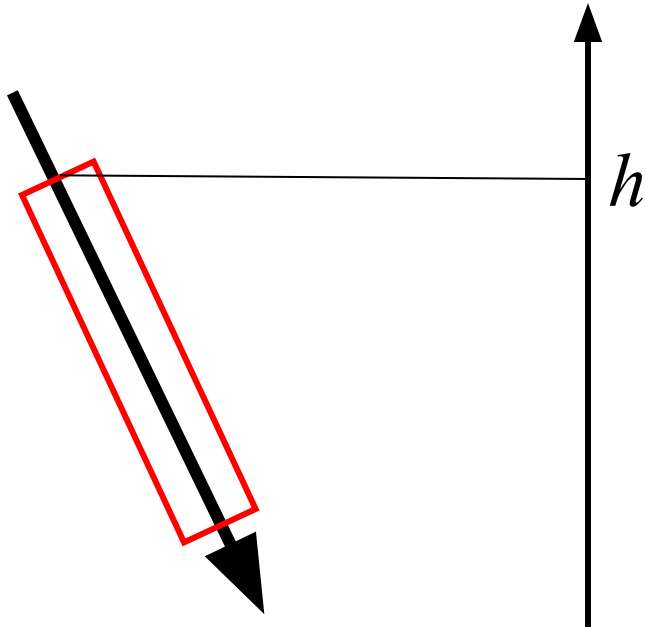
$p_{ст.2}$  – статическое давление со стороны  
«остальной» части системы (противодавление)

2.  $p_{дин.}$  – динамическое давление связанное с движением  
(кинетической энергией движения) жидкости:

$$p_{дин.} = \frac{\rho v^2}{2} \quad \left( K = \frac{mv^2}{2} \right)$$



3.  $p_{ГС}$  – гидростатическое давление, связанное с положением сечения относительно условного «0» (потенциальной энергией положения):

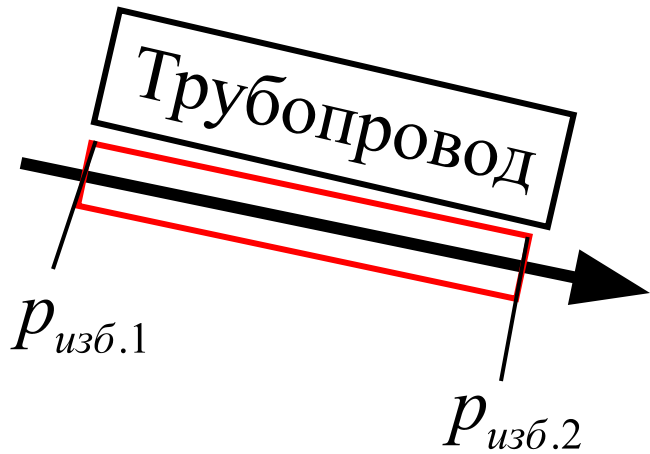


$$p_{ГС} = \rho gh$$

$$(\Pi = mgh)$$

Суммарное *избыточное* давление в данном сечении:

$$p_{избГС} = p \sum p_{вн.} = \text{ст.} + \text{дин.} +$$



Жидкость идеальная →  
→ нет потерь давления:

$$p_{изб.1} = p_{изб.2} = const$$

Уравнение Бернулли (закон сохранения энергии):

$$p_{cm.1} + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_{cm.2} + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 = const$$

Система кровообращения человека обладает  
минимальным сечением

в области аорты, равным примерно  $8 \text{ см}^2$ ,  
и максимальным сечением в области капилляров.

Оцените примерную суммарную  
площадь сечения капилляров в теле человека  
и общее их количество, если скорость  
течения крови уменьшается от  $0,5 \text{ м/с}$   
в аорте до  $0,001 \text{ м/с}$  в капиллярах.

Диаметр капилляра считать равным  $10^{-5} \text{ м}$ .

Эластичностью сосудов пренебречь.

СИ:

$$Q_A = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$v_A = 0,5 \text{ м/с}$$

$$v_K = 0,001 \text{ м/с}$$

$$d_K = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

Уравнение неразрывности:

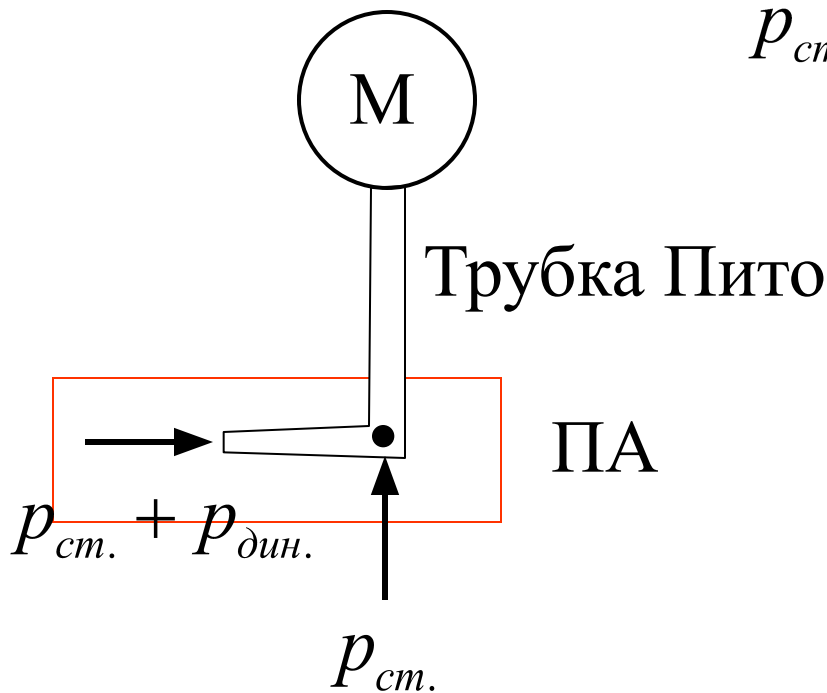
$$v_A S_A = v_K S_{\Sigma K} \quad S_{\Sigma K} = \frac{v_A S_A}{v_K}$$

$$S_{\Sigma K} = \frac{0,5 \cdot 8 \cdot 10^{-4}}{0,001} = 0,4 \text{ м}^2$$

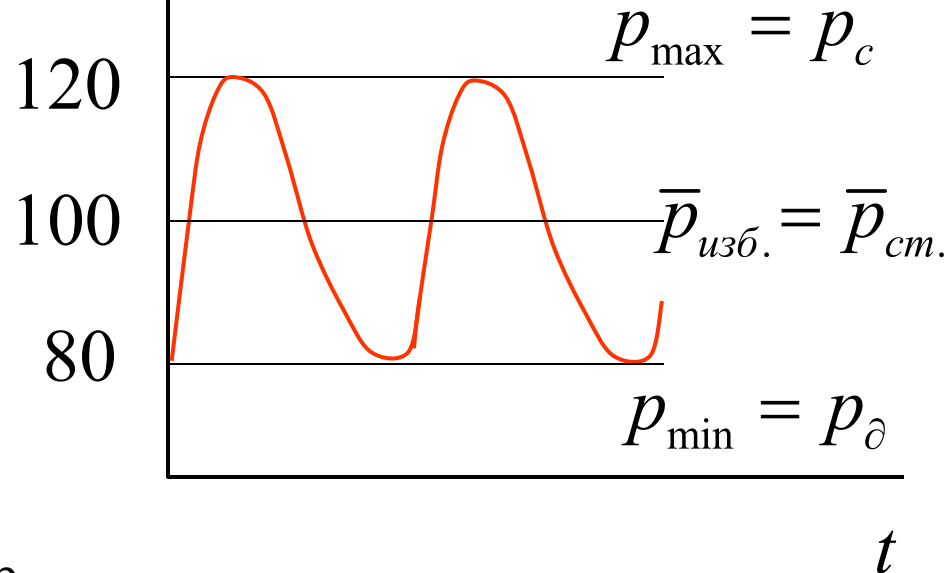
$$N_K = \frac{S_{\Sigma K}}{\frac{\pi d_K^2}{4}} = \frac{4 S_{\Sigma K}}{\pi d_K^2}$$

$$N_K = \frac{4 \cdot 0,4}{3,14 \cdot (1 \cdot 10^{-5})^2} = 5 \cdot 10^9$$

# Зависимость избыточного давления крови в плечевой артерии от времени:



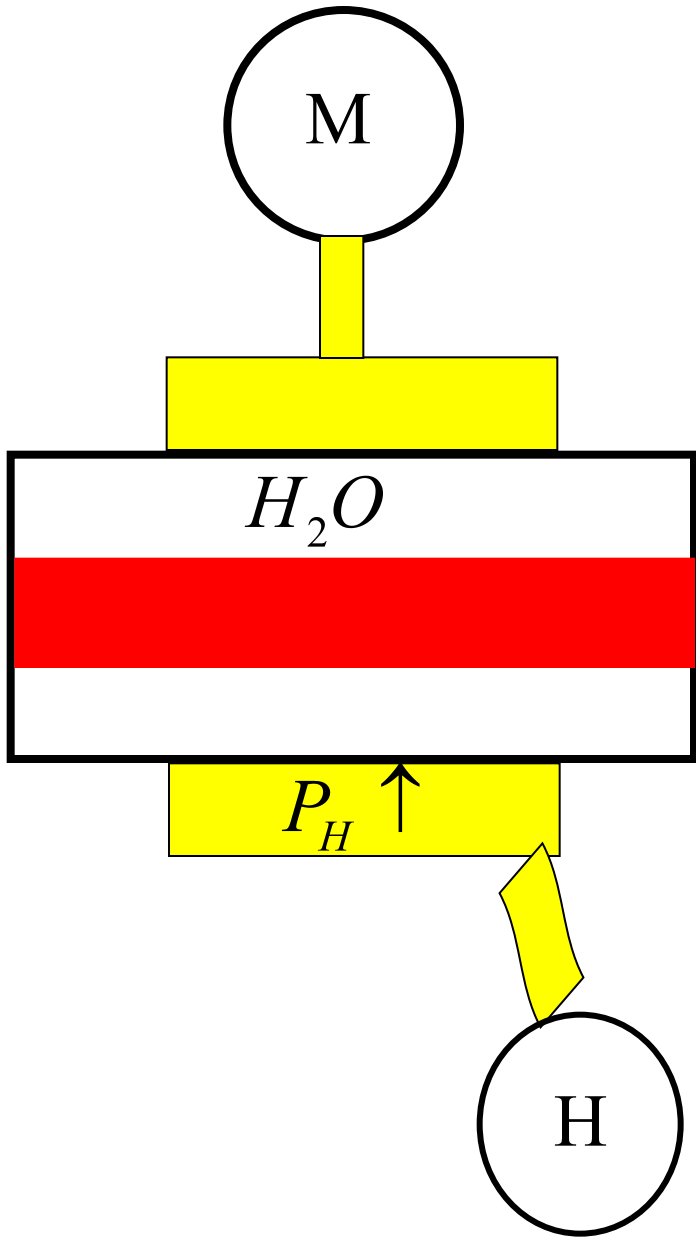
$p_{ст.} + p_{дин.}, \text{ мм рт. ст.}$



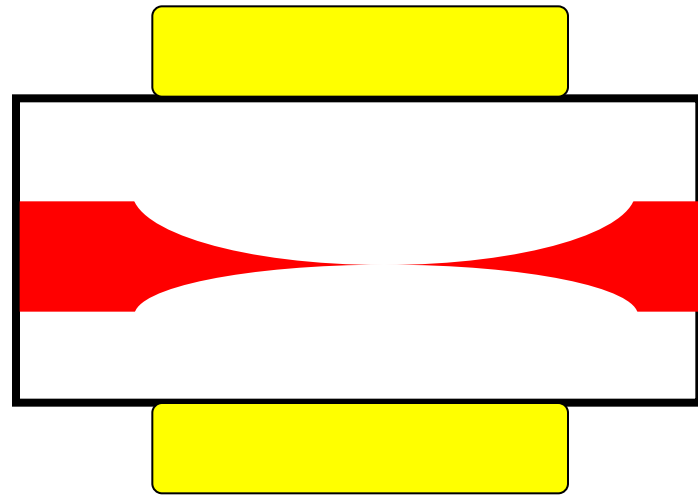
$$p_{дин.} = \frac{\rho v^2}{2} = \frac{1050 \cdot 0,5^2}{2} = 130 \quad = 1 \quad . \quad . \quad .$$

$$p_{ГС} = \rho g h = 0$$

$$\bar{p}_{доc.} = p_0 + \bar{p}_{изб.} = 760 + 100 = 860 \quad . \quad . \quad .$$



$$P_M \approx P_{TK} \approx P_{APT}$$



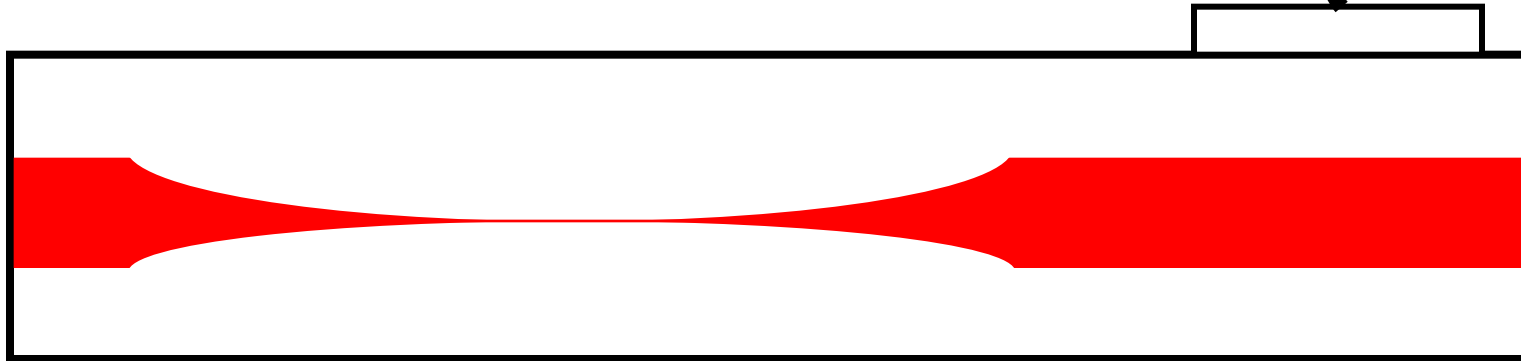
$$v_K = 0$$

Давление в манжете плавно уменьшается

Врач

Приемник  
звука

Звукопровод



$$p = p_{\max} = p_C \Rightarrow v_K \approx 0 \Rightarrow \text{начало шумов}$$

Фиксируется давление, соответствующее началу шумов:  $p_C$

Давление в манжете плавно уменьшается

Врач

Приемник  
звука

Звукопровод



$p = p_{\min} = p_{\partial}$  прекращение шумов

Фиксируется давление, соответствующее  
прекращению шумов:  $p_{\partial}$



Вода вытекает из сосуда в виде параллелепипеда размерами  $a \times b \times c$  через трубку с наконечником радиуса  $r = 1$  мм. Уровень наконечника на  $l = 1$  м ниже нижней грани сосуда. Наконечник погружен в водоем на глубину  $h_2 = 25$  см. Оценить за какое время вода вытечет из сосуда?

**СИ:**

$$l = 1 \text{ м}$$

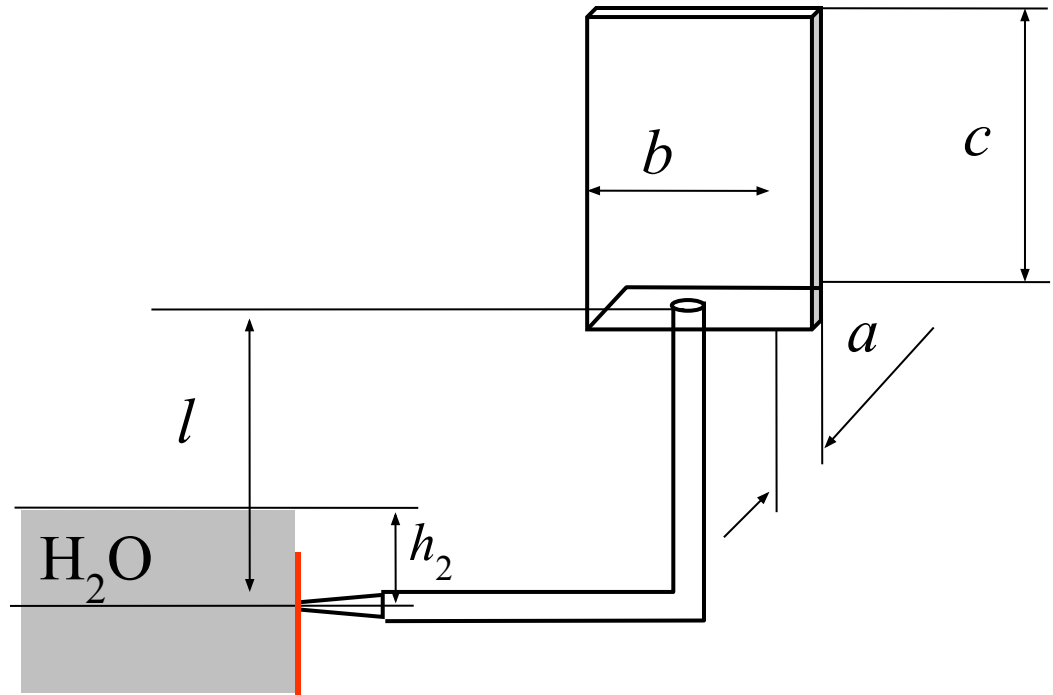
$$r = 1 \text{ мм} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$h_2 = 25 \text{ см} = 0,25 \text{ м}$$

$$a = 2 \text{ см} = 0,02 \text{ м}$$

$$b = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$$

$$c = 25 \text{ см} = 0,25 \text{ м}$$



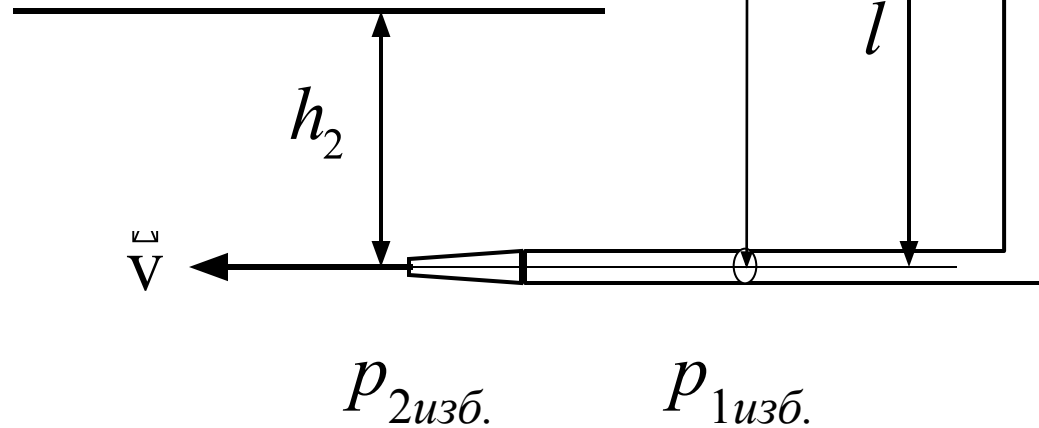
Для момента времени  $t$ :

$$p_{1\text{изб.}} = \rho g h \quad p_{2\text{изб.}} = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h_2$$

Уравнение Бернулли:

$$\rho g h = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h_2$$

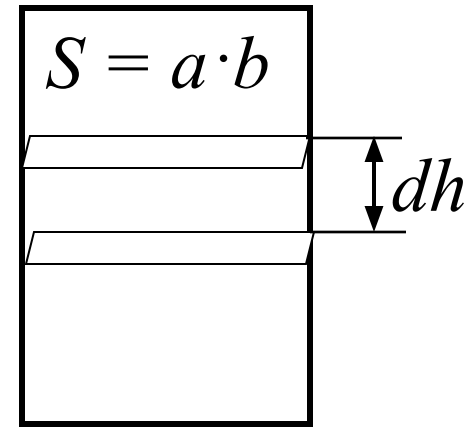
Уровень водоема



Скорость вытекания воды из наконечника при уровне воды в сосуде  $h$ :

$$v = \sqrt{2g(h - h_2)}$$

За время  $dt$ :



1. Из наконечника вытечет объем воды:

$$\begin{aligned} dQ &= \pi \cdot r^2 dt = \\ &= \sqrt{2g(h - h_2)} \cdot r^2 dt \end{aligned}$$

2. Уровень воды в сосуде опустится на  $dh$ :

$$\begin{aligned} dh &= \frac{dQ}{a \cdot b} \\ dQ &= a \cdot b \cdot dh \end{aligned}$$

$$\sqrt{2g(h - h_2)} \cdot r^2 dt = a \cdot b \cdot dh$$

Разделение переменных:

$$\frac{\sqrt{\alpha g} \cdot r^2}{a \cdot b} dt = \frac{dh}{\sqrt{(h - h_2)}}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha g} \cdot r^2}{a \cdot b} \int_0^t dt = \int_l^{l+c} \frac{dh}{\sqrt{(h - h_2)}}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha g} \cdot r^2}{a \cdot b} t = 2 \sqrt{(h - h_2)} \Big|_l^{l+c} = 2 \left( \sqrt{(l + c - h_2)} - \sqrt{(l - h_2)} \right)$$

$$t = \frac{2a \cdot b \cdot \left( \sqrt{(l + c - h_2)} - \sqrt{(l - h_2)} \right)}{\sqrt{\alpha g} \cdot r^2}$$

$$t = \frac{\sqrt{2} \cdot 0,02 \cdot 0,2 \cdot \left( \sqrt{(1 + 0,25 - 0,25)} - \sqrt{(1 - 0,25)} \right)}{\sqrt{10} \cdot 3,14 \cdot 10^{-6}} = 80 \text{ c}$$

20

*Поверхность* жидкости ведет себя подобно пленке из упругого материала, стремящейся максимально уменьшить площадь поверхности жидкости

$$p_{\Pi} = \frac{F_{\Pi}}{S}$$

Характеристика поверхностных свойств жидкости — коэффициент поверхностного натяжения:

$$\sigma = \frac{F_{\Pi}}{l}$$

Сила  $F$  поверхностного натяжения, действующая на участок (контур), ограничивающий поверхность жидкости

Масса 110 капель сыворотки крови, вытекающей из капилляра 1,45 г. Определить коэффициент поверхностного натяжения сыворотки, если диаметр шейки капли в момент отрыва 1,00 мм.

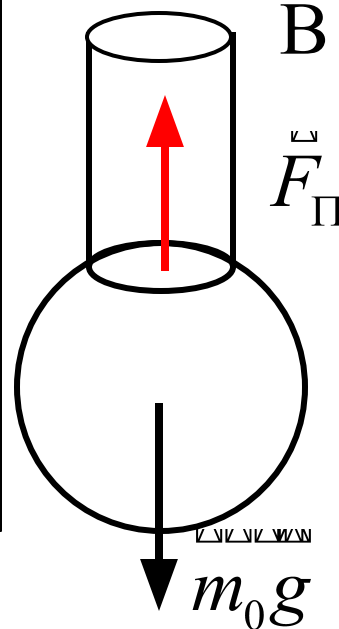
**СИ:**

$$m = 1,45 \text{ г} = 1,45 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$d = 1,00 \text{ мм} = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$N = 100$$

$$\rho = 1030 \text{ кг/м}^3$$



В момент отрыва капли:

$$m_0 g = F_{\Pi} = \sigma l$$

$$m_0 = \frac{m}{N} \pi \quad l = d$$

$$\sigma = \frac{mg}{\pi N d}$$

$$\sigma = \frac{1,45 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81}{3,14 \cdot 110 \cdot 1,00 \cdot 10^{-3}} = 0,0412 \text{ Н/м} = 41,2 \text{ мН/м}$$

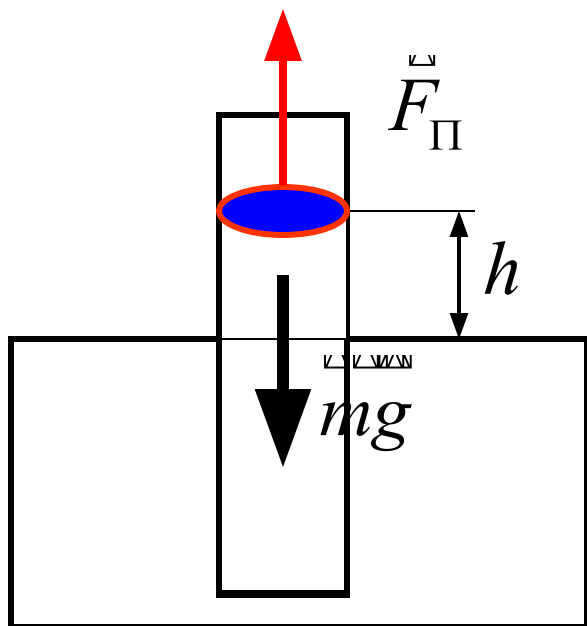
Уровень плазмы в капилляре диаметром 1,0 мм поднялся на 18 мм. Определить коэффициент поверхностного натяжения плазмы. Плотность плазмы 1030 кг/м<sup>3</sup>.

**СИ:**

$$h = 18 \text{ мм} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$d = 1,0 \text{ мм} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\rho = 1030 \text{ кг/м}^3$$



$$mg = F_{\Pi}$$

$$m = \rho V = \rho \pi r^2 h \quad F_{\Pi} = \sigma l = \sigma 2\pi r$$

$$\rho \pi r^2 h g = \sigma 2\pi r$$

$$\rho r h g = 2\sigma$$

$$\sigma = \frac{\rho r h g}{2} = \frac{\rho d h g}{4}$$

$$\sigma = \frac{1030 \cdot 1,0 \cdot 10^{-3} \cdot 18 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81}{4} =$$

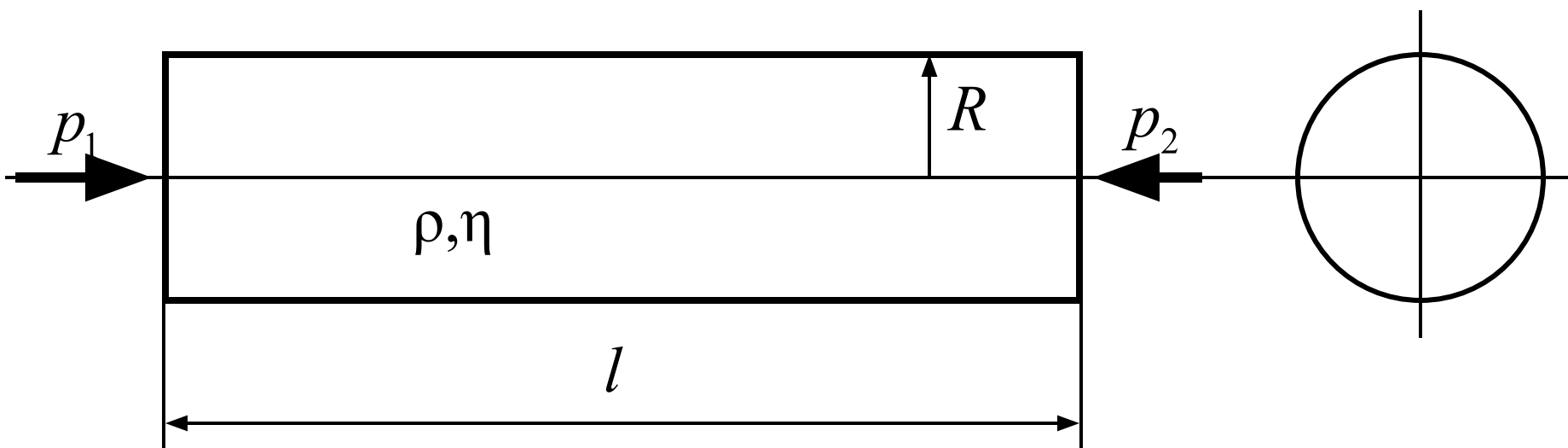
$$= 0,045 \text{ Н/м} = 45 \text{ мН/м}_{23}$$

# Течение ньютоновской вязкой жидкости по круглой гладкой трубе с жесткими стенками

Заданы: длина трубы  $l$ ; радиус трубы  $R$ ;

свойства жидкости: плотность  $\rho$  и вязкость  $\eta$ ;

перепад давлений на торцах трубы:  $p_1 - p_2$



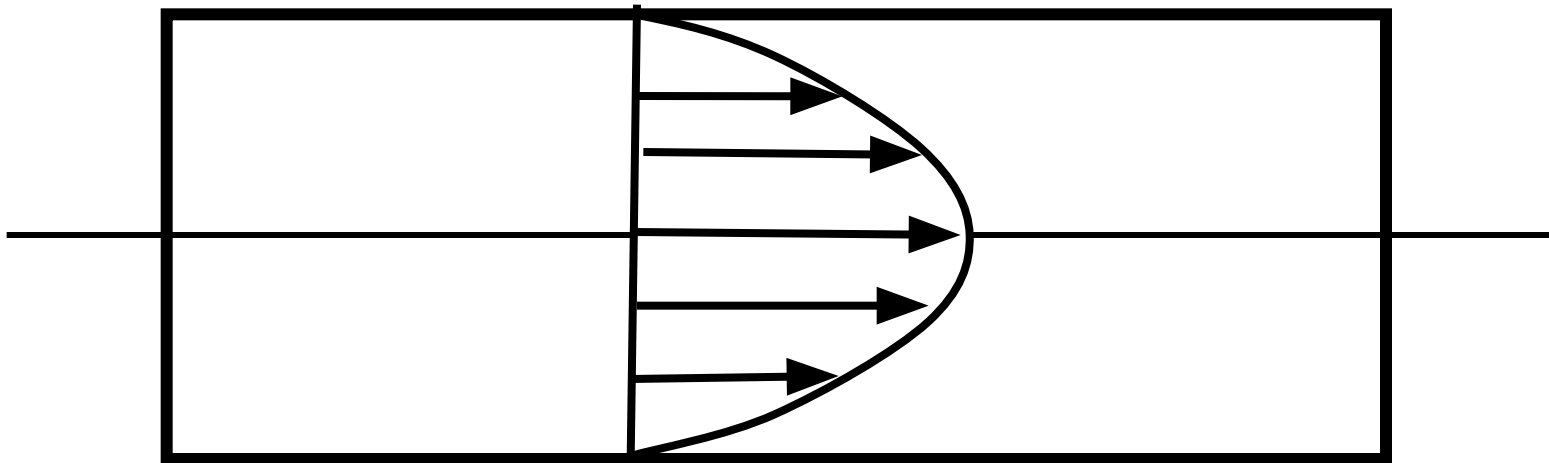


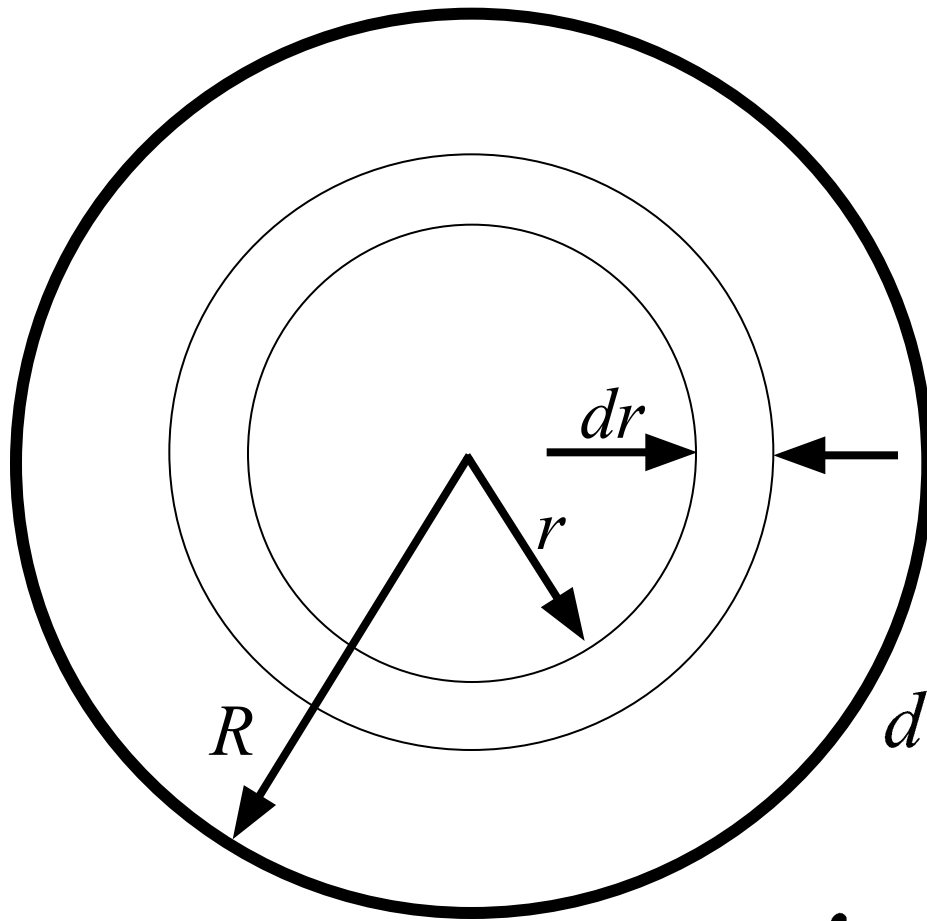
## Задачи:

1. Описать распределение скоростей частиц жидкости по сечению трубы
2. Определить расход жидкости через трубу

1.

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$





$$dQ = \rho v dS = \rho v 2\pi r \cdot dr$$

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

$$dQ = \rho \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) 2\pi r \cdot dr$$

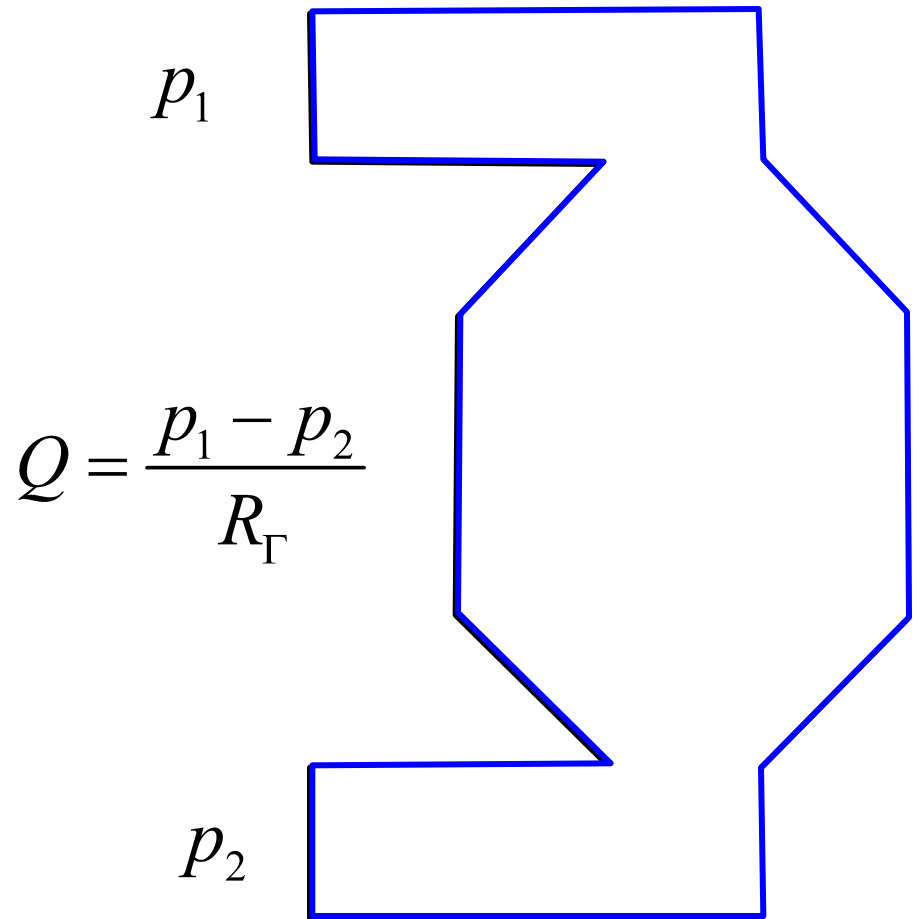
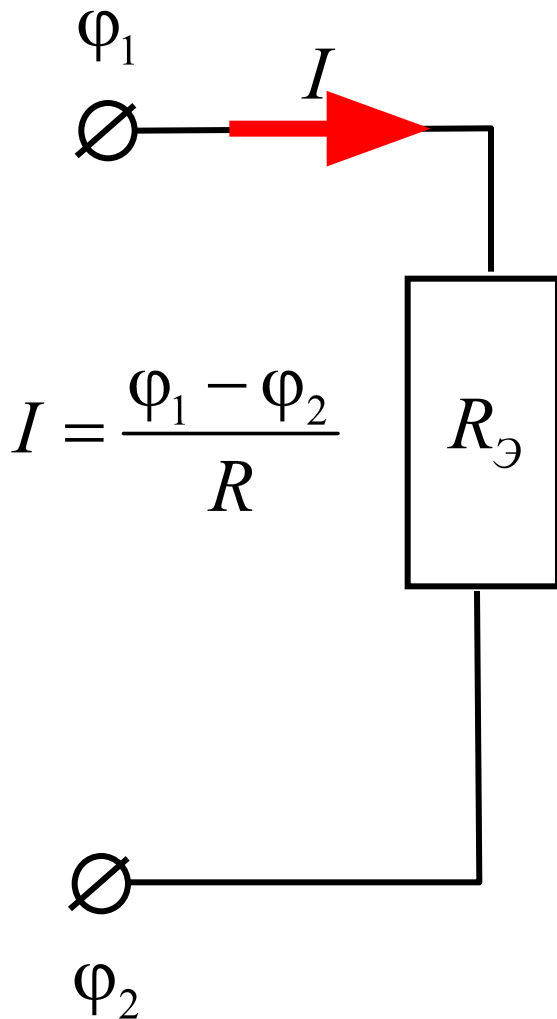
$$Q = \int dQ = 2\pi\rho \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r \cdot dr$$

Уравнение Пуазейля:

$$Q = \pi\rho \frac{p_1 - p_2}{8\eta l} R^4$$

# Следствие из уравнения Пуазейля:

Электрическая аналогия по принципу передачи энергии:



$$Q \rightarrow I$$

$$p_1 - p_2 \rightarrow \varphi_1 - \varphi_2$$

$$Q = \pi\rho \frac{p_1 - p_2}{8\eta l} R^4 \rightarrow$$

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_\vartheta} \rightarrow$$

$$\rightarrow R_\Gamma = \frac{p_1 - p_2}{Q}$$

$$\rightarrow R_\vartheta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I}$$

$$R_\Gamma = \frac{8\eta l}{\pi\rho R^4}$$

$$[R_\Gamma] = \frac{[p]}{[Q]} = \frac{\frac{\text{Pa}}{c}}{\frac{\text{kg}}{c}} = \frac{\text{Pa} \cdot c}{\text{kg}}$$

Оцените гидравлическое сопротивление кровеносного сосуда длиной 1,2 см и радиусом 1,0 мм.

Коэффициент вязкости крови примите равным 5,0 мПа·с.

Плотность крови 1050 кг/м<sup>3</sup>.

**СИ:**

$$l = 1,2 \text{ см} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$r = 1,0 \text{ мм} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\rho = 1050 \text{ кг/м}^3$$

$$\eta = 5,0 \text{ мПа} \cdot \text{с} = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$$

Оценка по Пуазейлю:

$$R_{\Gamma} = \frac{8\eta l}{\pi r R^4}$$

$$\begin{aligned} R_{\Gamma} &= \frac{8 \cdot 5,0 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2 \cdot 10^{-2}}{3,14 \cdot 1050 \cdot (1,0 \cdot 10^{-3})^4} = \\ &= 1,5 \cdot 10^5 \frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\text{к}2} \end{aligned}$$

При нормальной частоте сокращений сердца полный кругооборот крови происходит за 60 с.

Считая объём крови равным 5,0 л, определите общее гидравлическое сопротивление кровотоку.

Перепад давления в сердце принять равным 13,3 кПа.

Плотность крови 1050 кг/м<sup>3</sup>.

**СИ:**

$$M_K = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$\Delta p = 13,3 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

$$t = 60 \text{ с}$$

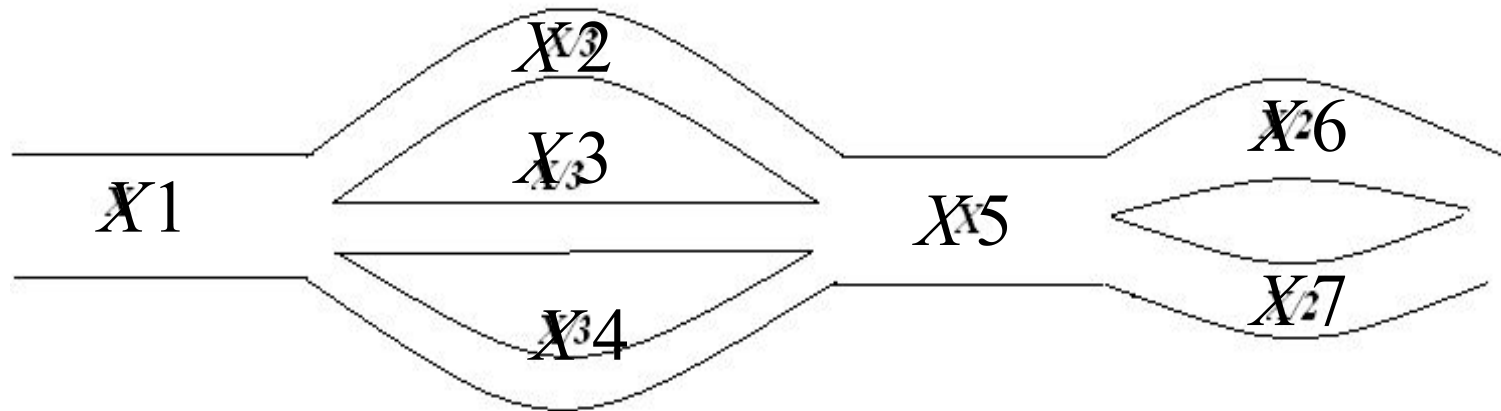
$$Q = \frac{\Delta p}{R_{\Gamma}} \Rightarrow R_{\Gamma} = \frac{\Delta p}{Q}$$

$$Q = \frac{m_K}{t} = \frac{\rho V_K}{t}$$

$$R_{\Gamma} = \frac{\Delta p \cdot t}{m_K} = \frac{\Delta p \cdot t}{\rho \cdot V_K}$$

$$R_{\Gamma} = \frac{13,3 \cdot 10^3 \cdot 60}{1050 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 1,5 \cdot 10^5 \frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\text{кг}}$$

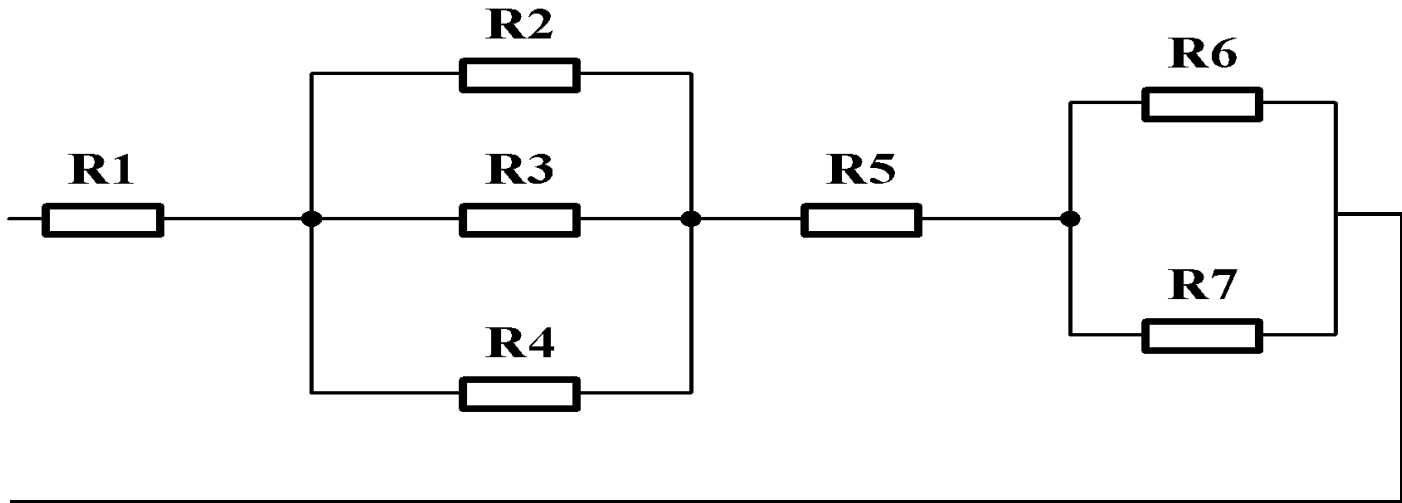
Оцените общее гемодинамическое сопротивление участка системы сосудов ( $R_{\Gamma} = X$ ).



Описание соединения сосудов:

$$X = X_1 + (X_2 \parallel X_3 \parallel X_4) + X_5 + (X_6 \parallel X_7)$$

# Электрическая аналогия:



$$\frac{1}{R_{(2-4)}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

$$\frac{1}{X_{(2-4)}} = \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \frac{1}{X_4}$$

$$\frac{1}{R_{(6-7)}} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}$$

$$\frac{1}{X_{(6-7)}} = \frac{1}{X_6} + \frac{1}{X_7}$$

$$X = X_1 + X_{(2-4)} + X_5 + X_{(6-7)}$$

Для девочек – не забудь, солнышко, перевернуть! 32

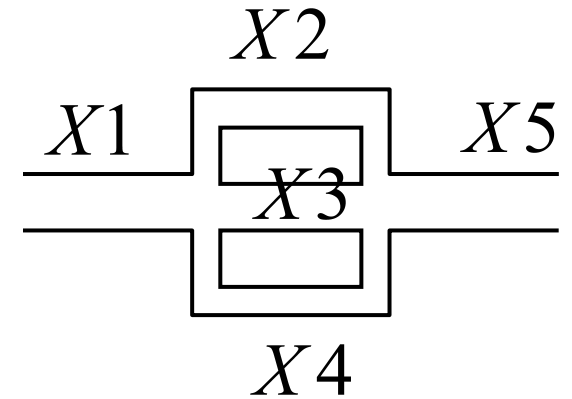


Казалось бы сложная задача ( $R_{\Gamma} = X$ ). :

.Перепад давлений на участке из пяти сосудов равен 1500 Па.

$$X_1 = 1; X_2 = 2; X_3 = 4; X_4 = 6; X_5 = 1,5$$

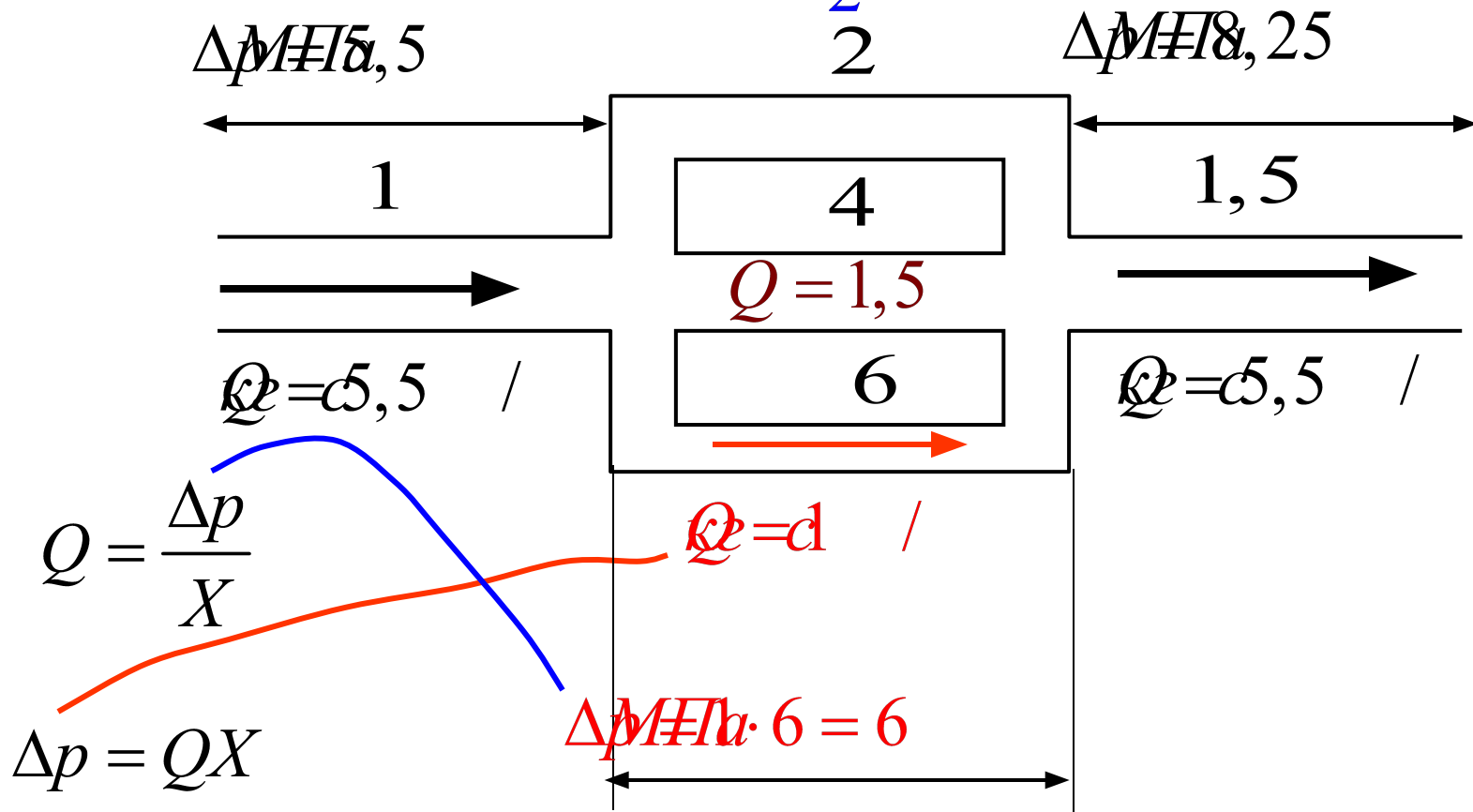
$$X = \left[ \frac{\text{МПа} \cdot \text{с}}{\text{кг}} \right]$$



Определить расходы крови в каждом сосуде:

$$X = \left[ \frac{MПа \cdot c}{кг} \right]$$

$$Q = \frac{6}{2} = 3$$



Итого по перепаду давления:

$$\sum \Delta p = 5,5 + 6 + 8,25 = 19,75 \text{ МПа} = 19,75 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

По условию:  
 $\Delta p = 1500 \text{ Па}$

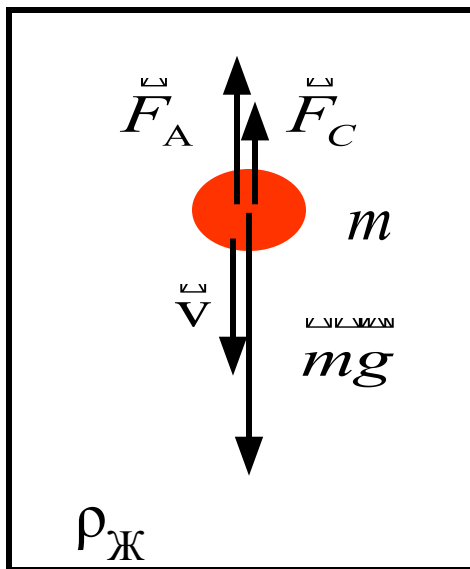
Коэффициент пересчета:

$$k = \frac{1500}{19,75 \cdot 10^6} = 7,6 \cdot 10^{-5}$$

Все «потолочные» цифры умножаются на коэффициент.

$$Q = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow Q = 3 \cdot 7,6 \cdot 10^{-5} = 23 \cdot 10^{-5} \quad /c$$

$$\Delta p_{\text{МЭП}} \cdot 6 = 6 \quad a \rightarrow \Delta p = 6 \cdot 10^6 \cdot 7,6 \cdot 10^{-5} = 460 \text{ Па}$$



Сила Стокса:

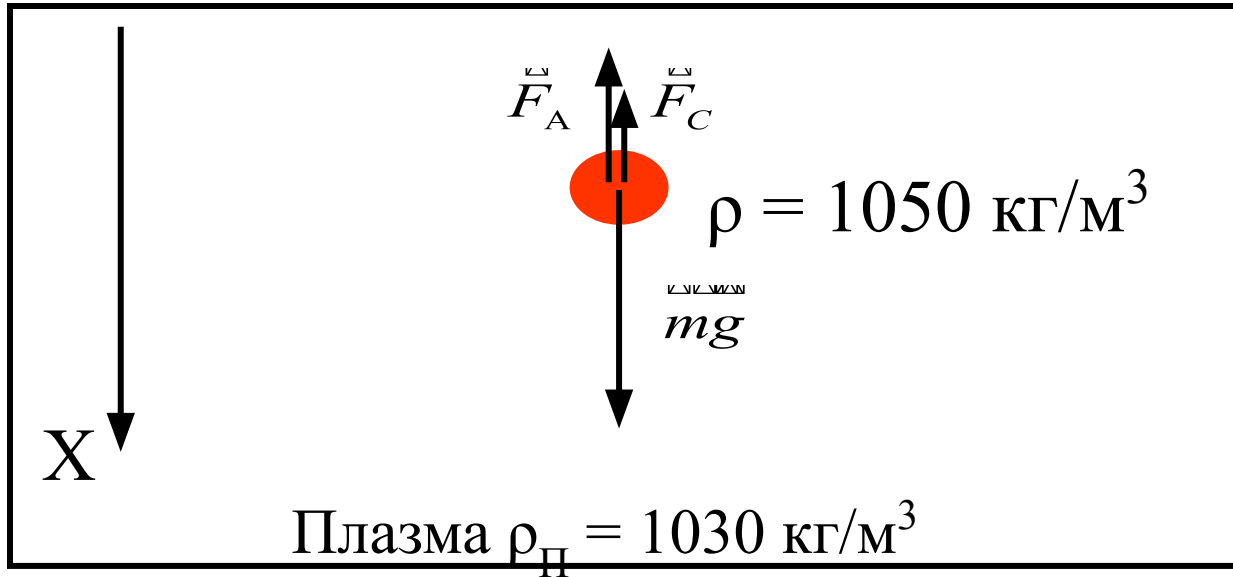
$$\vec{v} = const \quad \vec{F}_C \uparrow \downarrow \vec{v}$$

Для шарика радиуса  $r$ :

$$F_C = 6\pi \eta r v$$

Определите скорость оседания эритроцитов в плазме крови (в мм/ч)

исходя из предположения, что они имеют форму шариков диаметром 7 мкм и не склеиваются между собой. Вязкость крови 5 мПа·с, плотность крови 1050 кг/м<sup>3</sup>, плотность плазмы крови 1030 кг/м<sup>3</sup>.



$$\vec{v} = \text{const}$$

$$\sum \vec{F}_i = \vec{mg} + \vec{F}_A + \vec{F}_C = 0$$

$$mg - F_A - F_C = 0$$

$$mg = \rho V g = \rho \frac{1}{6} \pi d^3 g$$

$$F_A = \rho_{\text{П}} V g = \rho_{\text{П}} \frac{1}{6} \pi d^3 g$$

$$F_C = 6\pi \eta v \Rightarrow 3\pi \eta d$$

$$\rho \frac{1}{6} \pi d^3 g - \rho_{\Pi} \frac{1}{6} \pi d^3 g - 3\pi \eta d v = 0 \quad \times \frac{6}{\pi d}$$

$$\rho d^2 g - \rho_{\Pi} d^2 g - 18\eta v = 0$$

$$v = \frac{(\rho - \rho_{\Pi}) d^2 g}{18}$$

$$[v] = \frac{m}{c} = \frac{10^3 \text{ мм}}{\frac{1}{3600} \text{ час}} = 3,6 \cdot 10^6 \frac{\text{мм}}{\text{час}}$$

При атеросклерозе критическое число Рейнольдса в некоторых сосудах становится равным 1060.

Оцените скорость, при которой возможен переход ламинарного течения крови в турбулентное в сосуде диаметром 15 мм.

$$d = 15 \cdot 10^{-3}$$

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta}$$

$$v = \frac{Re \cdot \eta}{\rho \cdot d}$$

$$\eta = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$$

$$\rho = 1050 \text{ кг/м}^3$$

# Методы измерения вязкости

1. Капиллярный. Основан на уравнении Пуазейля:  
определяется время протекания жидкости  
заданного объема через капилляр известных  
размеров при фиксированном перепаде давления

$$Q = \pi \rho \frac{p_1 - p_2}{8 \eta l} R^4$$

$$\frac{\rho V}{\Delta t} = \pi \rho \frac{p_1 - p_2}{8 \eta l} R^4$$

$$\eta = \pi \frac{p_1 - p_2}{8 l V} R^4 \Delta t$$



2. Метод падающего шарика. Основан на измерении скорости *равномерного* падения шарика известного радиуса в исследуемой жидкости.

$$mg - F_A - F_C = 0$$

$$F_C = 6\pi \eta v$$

3. Ротационный. Основан на измерении вращающего момента одного из соосных цилиндров при равномерном вращении его. В пространство между цилиндрами заливается исследуемая жидкость. Измеряется не только вязкость, но и зависимость вязкости от градиента скорости (неньютоновские жидкости).

На зачетное занятие  
«Математика. Механика и гидромеханика»

иметь:

1. Чистая бумага;
2. Авторучки;
3. Калькулятор

Не иметь (даже в мыслях):

1. Полиграфия;
2. Гаджеты

Тема следующего практического занятия:

Электрическое поле и его характеристики.

Поле диполя. Диполь в электрическом поле.

Иметь при себе распечатанные выдачи лекции №4