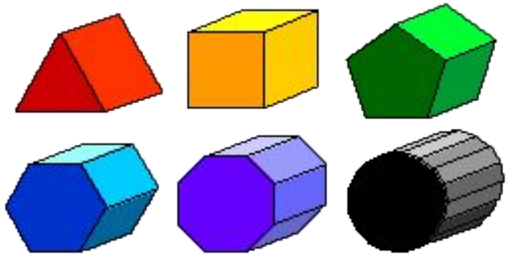


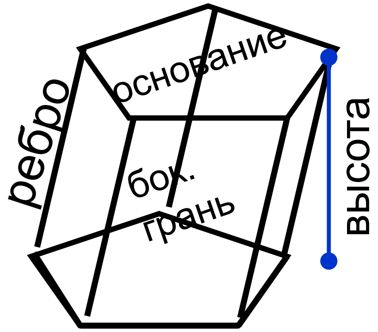
Практикум по решению стереометрических задач (базовый уровень)

Многогранники

невыпуклые

выпуклые

Призма



$$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$$

$$S_{бок} = P_{осн} \cdot h$$

$$S_{бок} = P_{\perp сеч} l$$

$$V = S_{осн} \cdot h$$

*__Наклонная__

* __Прямая__

** __Правильная__

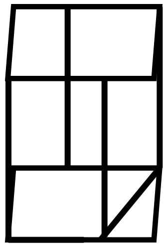
основание – прав. мн-к,

бок. ребра пер-ны осн-ию

*__Параллелепипед__

грани – парал-мы

**__Прямой__

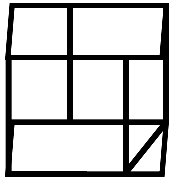


**__Прямоугольный__

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$S_{полн} = 2(ab + bc + ac)$$

$$V = abc$$



**__Куб__

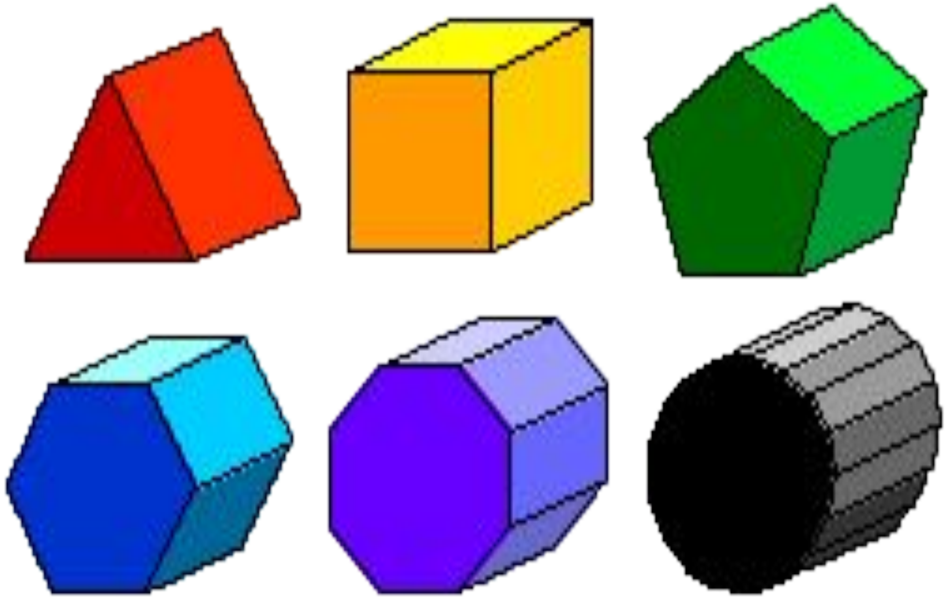
$$d^2 = 3a^2$$

$$S_{полн} = 6a^2$$

$$V = a^3$$

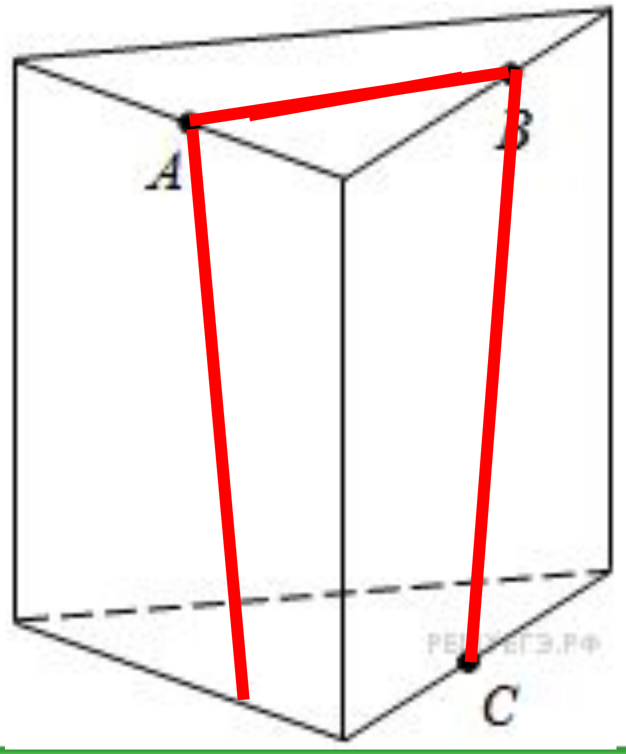
Пирамида

Призма в заданиях ЕГЭ



Задача №1

Плоскость, проходящая через три точки A, B и C, разбивает правильную треугольную призму на два многогранника. Сколько рёбер у многогранника, у которого больше вершин?



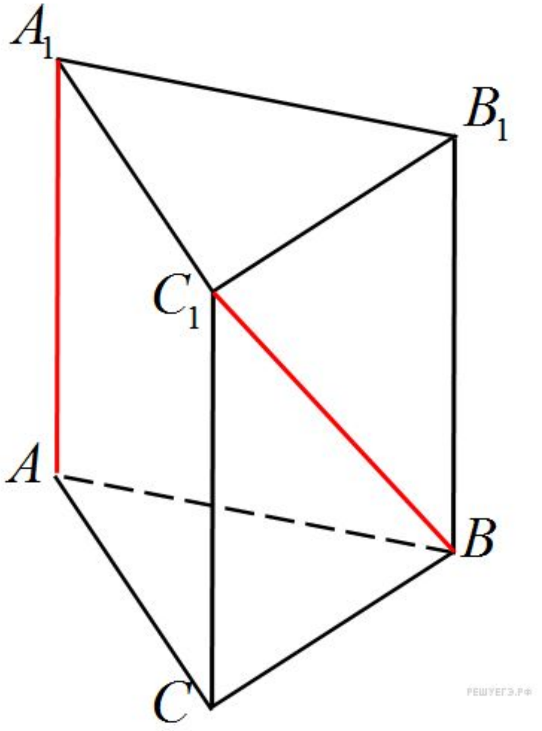
Плоскость делит призму на две призмы: треугольную, имеющую **6 вершин** и четырёхугольную, имеющую **8 вершин**.

Четырёхугольная призма имеет по 4 ребра в каждом из оснований и 4 боковых ребра, всего **12 рёбер**.

Ответ: 12.

Задача №2

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 3, найдите угол между прямыми AA_1 и BC_1. Ответ дайте в градусах.



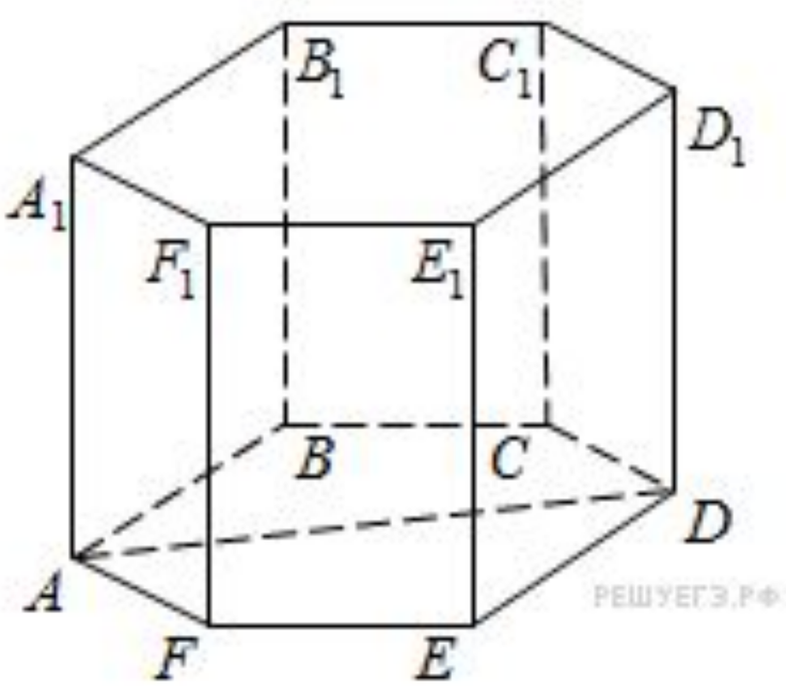
Отрезки A_1A и BB_1 лежат на параллельных прямых, поэтому искомый угол между прямыми A_1A и BC_1 равен углу между прямыми BB_1 и BC_1.

Боковая грань CBB_1C_1 — квадрат, поэтому угол между его стороной и диагональю равен **45°.**

Ответ: 45

Задача №3

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол DAB. Ответ дайте в градусах.



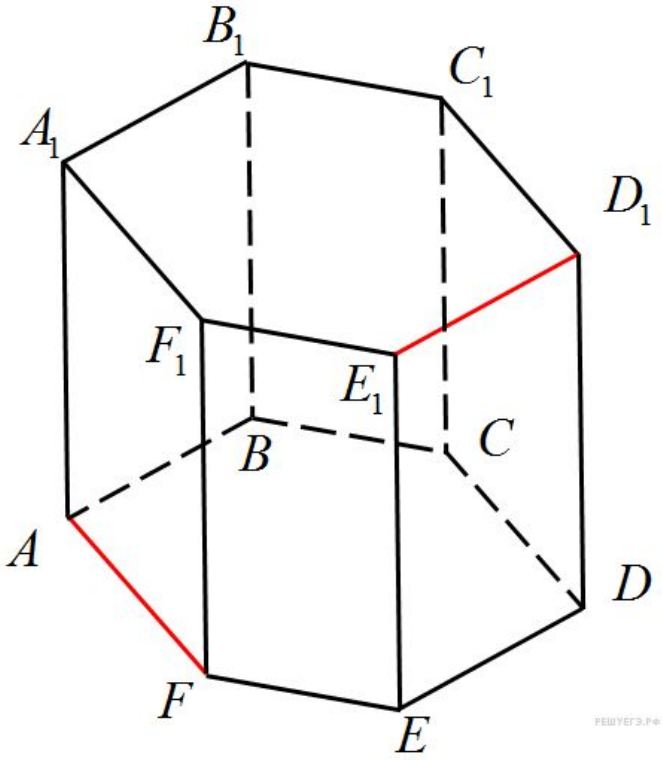
В правильном шестиугольнике углы между сторонами равны **120°** значит,

$$\angle DAB = \frac{1}{2}\angle FAB = \frac{1}{2}\cdot 120^\circ = 60^\circ.$$

Ответ: 60

Задача №4

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 8. Найдите угол между прямыми FA и D_1E_1. Ответ дайте в градусах.



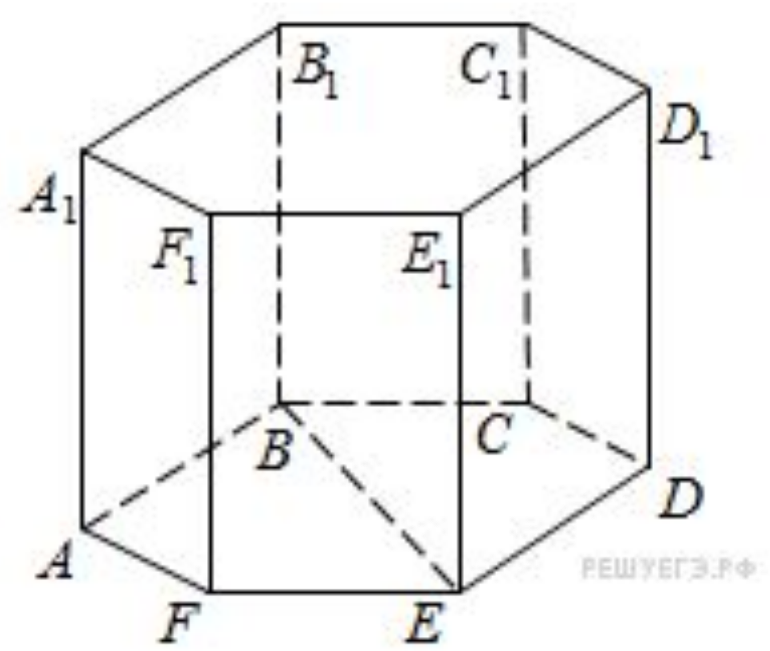
Отрезки $\boldsymbol{D_1E_1}$, $\boldsymbol{DE}$ и $\boldsymbol{AB}$ лежат на параллельных прямых, поэтому искомый угол между прямыми $\boldsymbol{FA}$ и $\boldsymbol{E_1D_1}$ равен углу между прямыми FA и $\boldsymbol{AB}$.

Поскольку $\angle \boldsymbol{FAB}$ между сторонами правильного шестиугольника равен **120°**, смежный с ним угол между прямыми $\boldsymbol{FA}$ и $\boldsymbol{AB}$ равен **60°.**

Ответ: 60

Задача №5

*В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны **1**. Найдите расстояние между точками B и E.*



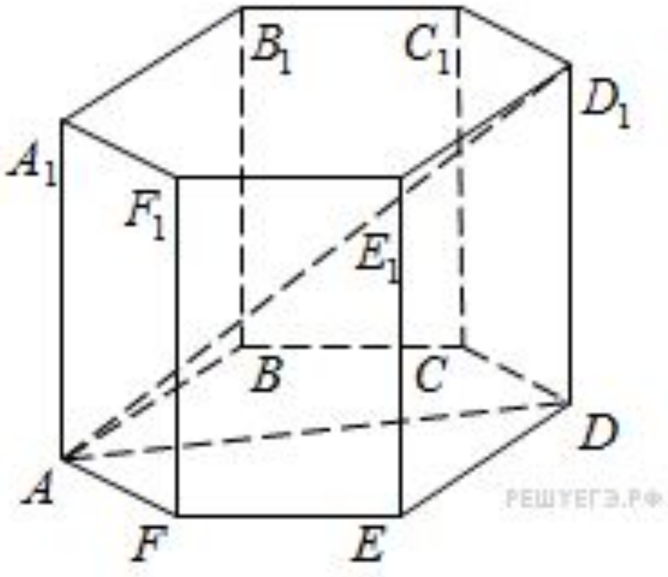
Длина большей диагонали правильного шестиугольника равна его удвоенной стороне. Поэтому

$$BE = 1 \cdot 2 = 2$$

Ответ: 2

Задача №6

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите тангенс угла AD_1D.



Рассмотрим прямоугольный ΔAD_1D катет которого является большей диагональю основания. Длина большей диагонали правильного шестиугольника равна его удвоенной стороне: **AD=2**. Т.к. $D_1D=1$ имеем:

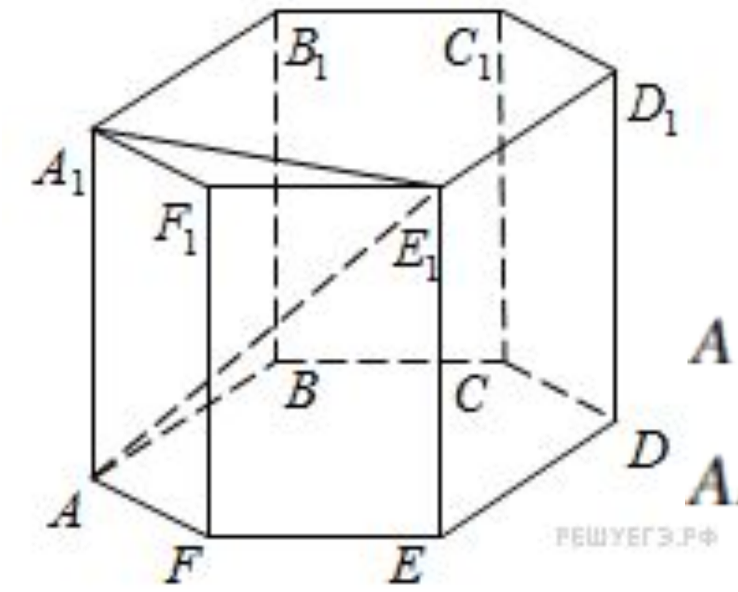
$$\operatorname{tg}\angle AD_1D = \frac{AD}{DD_1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Ответ: 2

Задача №7

*В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны **1**. Найдите расстояние между точками A и E_1.*

По теореме Пифагора $AE_1 = \sqrt{AA_1{}^2 + A_1E_1{}^2}.$



Угол между сторонами правильного шестиугольника равен 120°. По теореме косинусов

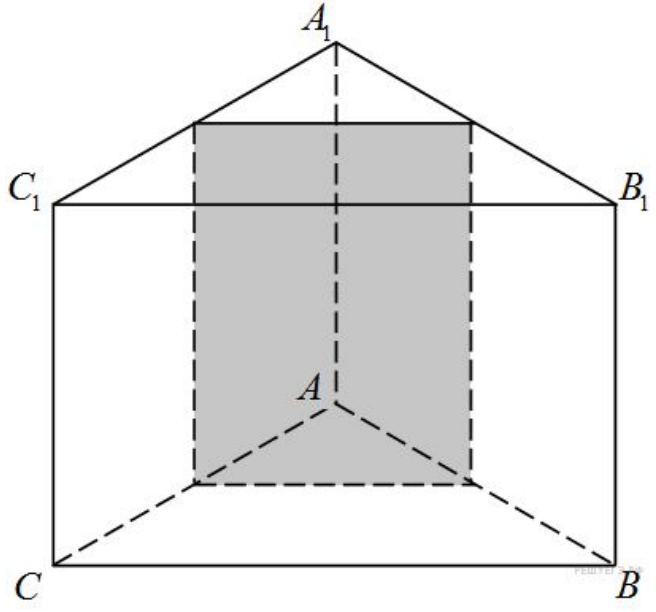
$$A_1E_1 = \sqrt{A_1F_1{}^2 + F_1E_1{}^2 - 2A_1F_1 \cdot F_1E_1 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{3}.$$

$$AE_1 = \sqrt{1+3} = 2.$$

Ответ: 2

Задача №8

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны ***2****, боковые рёбра равны* ***5****. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.*

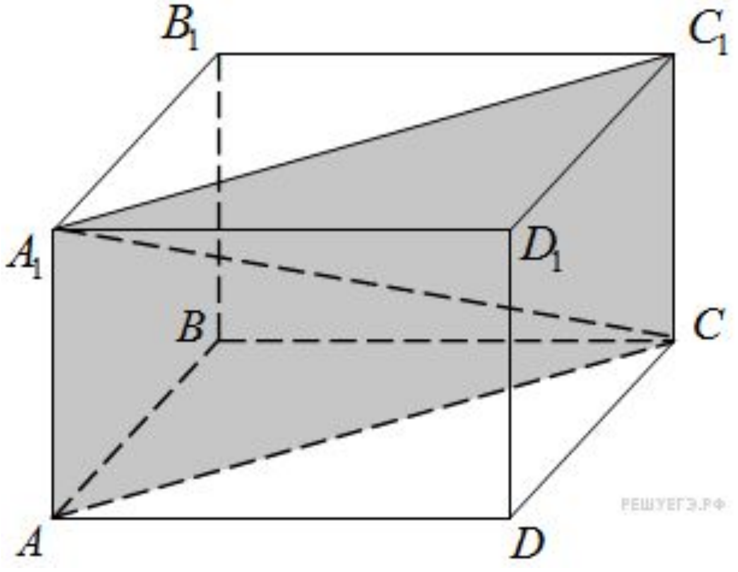


Противоположные стороны сечения являются соответственно средними треугольников, лежащих в основании, и прямоугольников, являющихся боковыми гранями призмы. Значит, сечение представляет собой прямоугольник со сторонами **1** и **5**, площадь которого равна **5.**

Ответ: 5

Задача №9

*В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AA_1 равно **15**, а диагональ BD_1 равна **17**. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A, A_1 и C.*



Диагональное сечение прямой призмы — прямоугольник AA_1C_1C. Диагонали правильной четырёхугольной призмы равны: $BD_1 = A_1C$. По теореме Пифагора получаем:

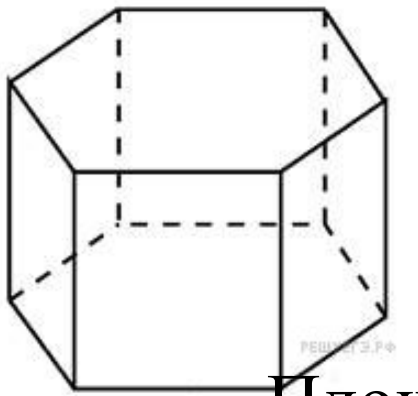
$$AC = \sqrt{A_1C^2 - AA_1{}^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8.$$

$$S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC = 120.$$

Ответ: 120

Задача №10

*Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна **5**, а высота – **10**.*



Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра ее основания на высоту $S_{бок.пр} = P_{осн} h$.

$$S_{бок} = 6 \cdot 5 \cdot 10 = 300$$

Другой способ:

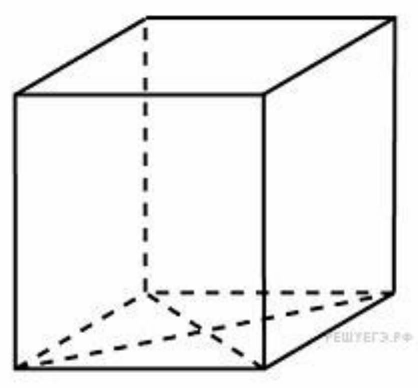
Площадь боковой поверхности фигуры равна сумме площадей всех боковых граней

$$S_{бок} = 6S_{гр} = 6 \cdot 5 \cdot 10 = 300$$

Ответ: 300

Задача №11

Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными ***6 и 8****, и боковым ребром, равным* ***10****.*



Площадь полной поверхности призмы равна сумме площади боковой поверхности и площади основания $S_{призмы}=S_{бок.}+2S_{осн}$. Площадь ромба $S_P=\frac{1}{2}d_1d_2=24.$

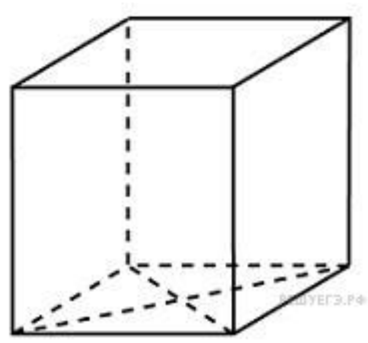
Сторону основания вычислим по теореме Пифагора $a=\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2}=5$

$$S=2S_{осн}+S_{бок}=2S_P+4aH=48+4\cdot5\cdot10=248.$$

Ответ: 248

Задача №12

В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными ***6 и 8.*** *Площадь ее поверхности равна* ***248.*** *Найдите боковое ребро этой призмы.*



Площадь полной поверхности призмы равна сумме площади боковой поверхности и площади основания $S_{призмы}=S_{бок.}+2S_{осн}$. Площадь ромба

$$S_P=\frac{1}{2}d_1d_2=24$$

Сторону основания вычислим по теореме Пифагора

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2}=5$$

$$S_{бок}=4\cdot 5\cdot h=20h$$

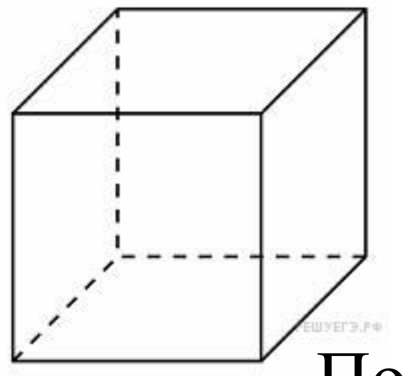
$$2\cdot 24+20h=248$$

$$h=\frac{248-48}{20}=10$$

Ответ: 10

Задача №4

*Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания равна **20**, а площадь поверхности равна **1760**.*



Площадь поверхности правильной четырехугольной призмы выражается через сторону ее основания **a** и боковое ребро **H** как $S = 2a^2 + 4aH$.

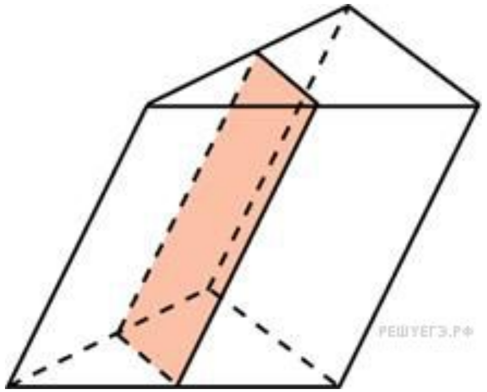
Подставим значения **a** и **S**: $1760 = 2 \cdot 20^2 + 4 \cdot 20 \cdot H$

$H = 12.$

Ответ: 12

Задача №10

*Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы равна **8**. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.*



Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра основания на высоту боковой грани.

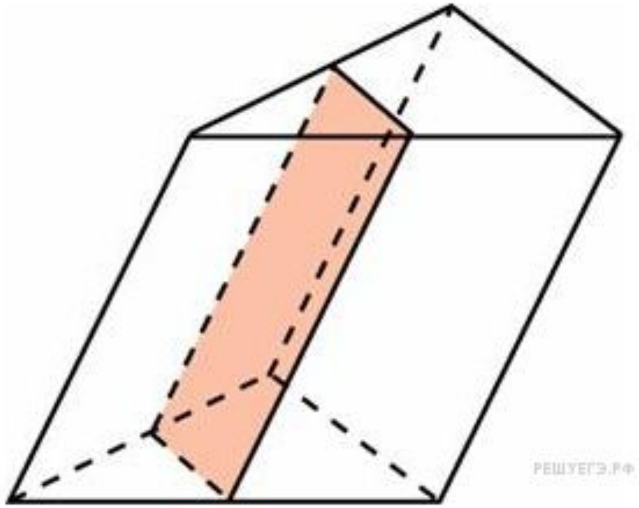
Высота боковой грани у исходной призмы и отсеченной призм совпадает. Поэтому площади боковых граней относятся как периметры оснований. Треугольники в основании исходной и отсеченной призм подобны, все их стороны относятся как **1:2.** Поэтому периметр основания отсеченной призмы вдвое меньше исходного. Значит, площадь боковой поверхности исходной призмы равна **16.**

Ответ: 16

Задача №13

Через среднюю линию основания треугольной призм

*площадь боковой поверхности которой равна **24**, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы.*

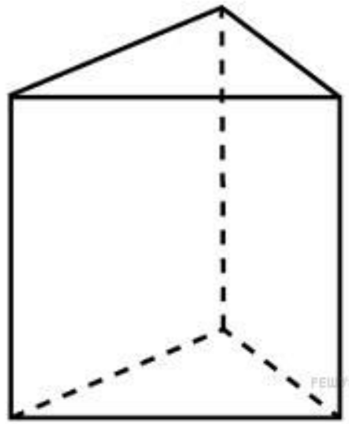


Площадь боковых граней отсеченной призмы вдвое меньше соответствующих площадей боковых граней исходной призмы. Поэтому площадь боковой поверхности отсеченной призмы вдвое меньше площади боковой поверхности исходной, т.е равна **12**.

Ответ: 12

Задача №14

*Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами **6 и 8**, высота призмы равна **10**. Найдите площадь ее поверхности.*



Площадь полной поверхности призмы равна сумме площади боковой поверхности и площади основания $S_{призмы} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$ Площадь прямоугольного треугольника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} 6 \cdot 8 = 24.$$

Третья сторона треугольника в основании равна 10

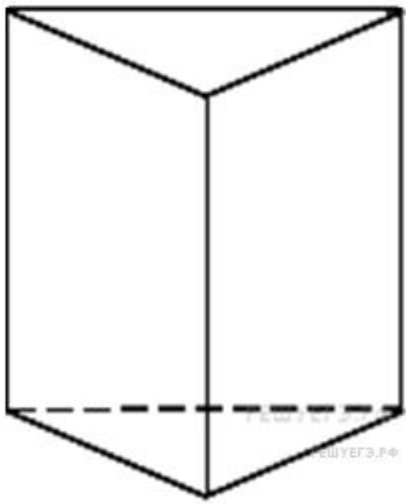
$$S_{бок} = Ph = 24 \cdot 10 = 240$$

$$S = 2S_{\Delta} + S_{бок} = 48 + 240 = 288.$$

Ответ: 288.

Задача №15

*Площадь поверхности правильной треугольной призмы равна **6**. Какой будет площадь поверхности призмы, если все ее ребра увеличить в **три** раза?*



Площади подобных тел относятся как квадрат коэффициента подобия.

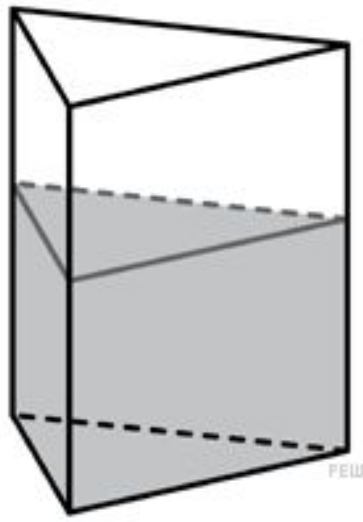
$$\frac{S_1}{S_2} = k^2, \qquad k - \textit{коэффициент} \qquad \textit{подобия}$$

Поэтому если все ребра увеличить **в три раза**, площадь поверхности увеличится **в 9 раз**. Значит, она станет равна **54**.

Ответ: 54.

Задача №16

В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает ***80 см****. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания* ***в 4 раза*** *больше, чем у первого? Ответ выразите в см.*



Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту $V_{призмы}=S_{осн}h$.

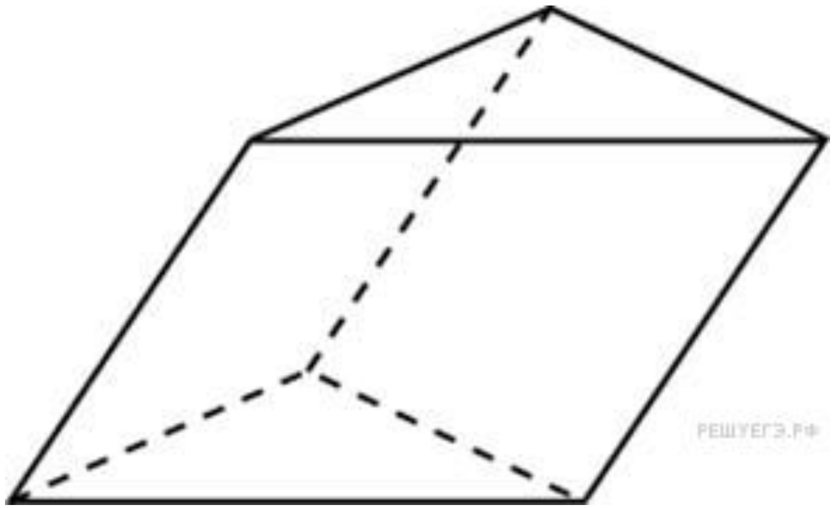
$$\frac{S_1}{S_2}=k^2, \quad k-коэффициент \quad подобия$$

Поэтому при увеличении стороны основания в **4 раза** площадь основания увеличится в **16 раз**, объем воды при этом остается неизменным. Следовательно, высота уменьшится в **16 раз** и будет равна **5 см**.

Ответ: 5

Задача №29

В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны. Их общее ребро равно 10 и отстоит от других боковых ребер на 6 и 8. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.

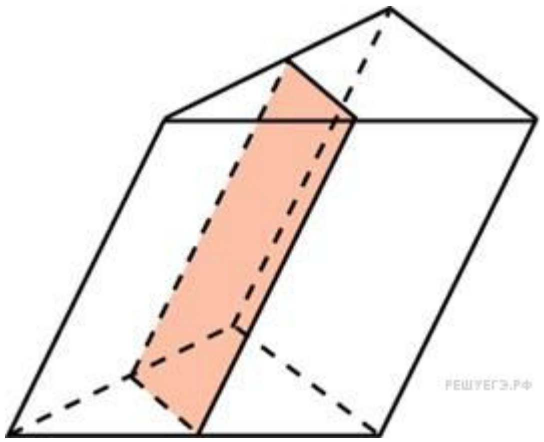


$$S_{бок} = l \cdot P_{\perp} = 10 \cdot (10+6+8) = 240$$

Ответ: 240

Задача №16

*Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объем отсеченной треугольной призмы равен **5**. Найдите объем исходной призмы.*

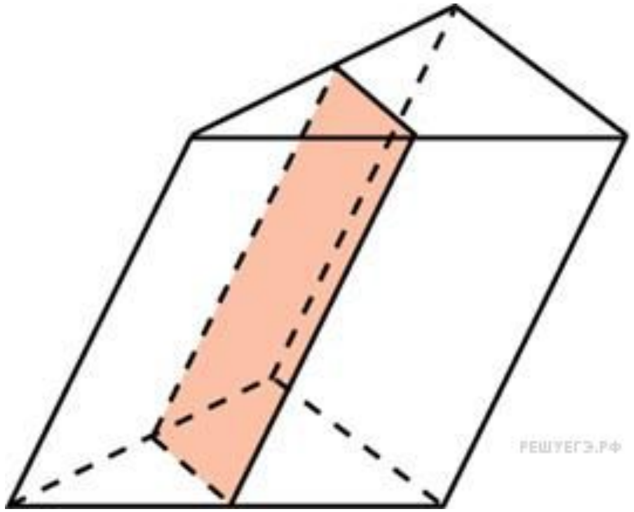


Площадь основания отсеченной части меньше площади основания всей призмы **в 4 раза** (т.к. стороны треугольника уменьшились в 2 раза). Высоты обеих частей одинаковы, поэтому объем отсеченной части в **4 раза** меньше объема целой призмы, который равен **20**.

Ответ: 20

Задача №17

*Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен **32**, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.*

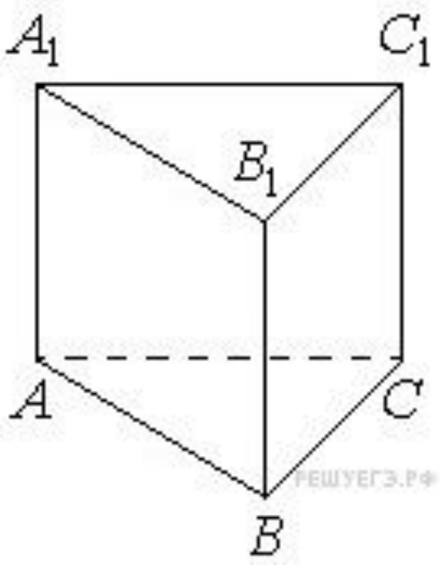


Площадь основания отсеченной части меньше площади основания всей призмы **в 4 раза** (т.к. стороны треугольника уменьшились в 2 раза). Высота осталась прежней, значит, объем уменьшился в **4 раза**.

Ответ: 8

Задача №18

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 3, а высота этой призмы равна $4\sqrt{3}$. Найдите объём призмы $ABCA_1B_1C_1$.



Объём правильной треугольной призмы вычисляется по формуле:

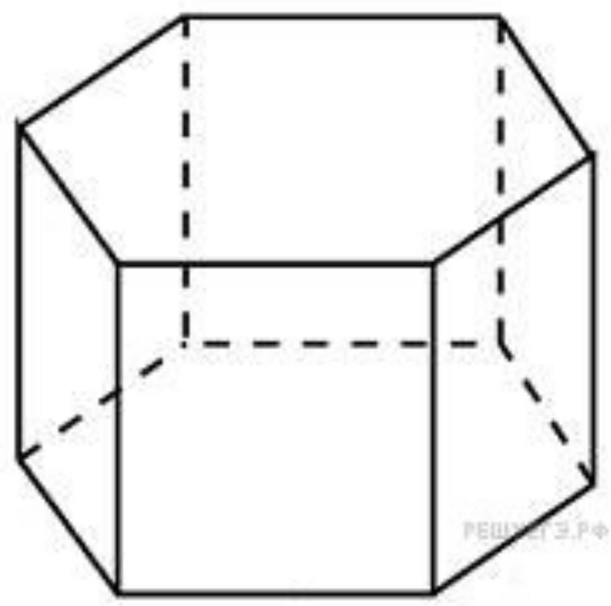
$$V = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}_{\text{Площадь правильного треугольника}} \cdot h,$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3^2 \cdot 4\sqrt{3} = 27.$$

Ответ: 27.

Задача №19

*Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны **1**, а боковые ребра равны **√3**.*



Площадь правильного шестиугольника со стороной а, лежащего в основании, задается формулой:

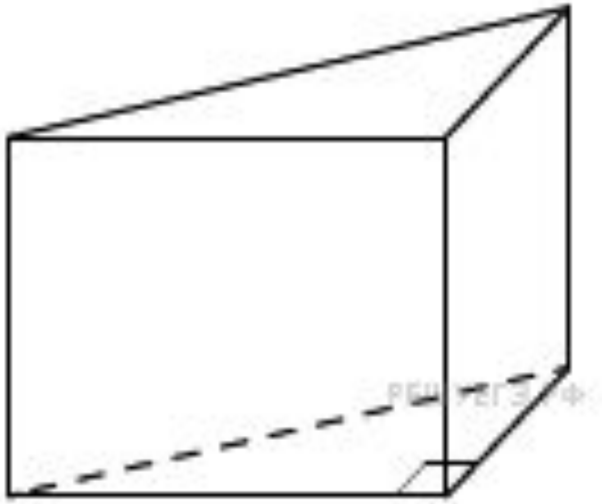
$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 1^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$V = Sh = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 4,5$$

Ответ: 4,5

Задача №20

*В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен **2**, а гипотенуза равна **√53**. Найдите объём призмы, если её высота равна **3**.*



$$b=\sqrt{(\sqrt{53})^2-2^2}=\sqrt{53-4}=\sqrt{49}=7.$$

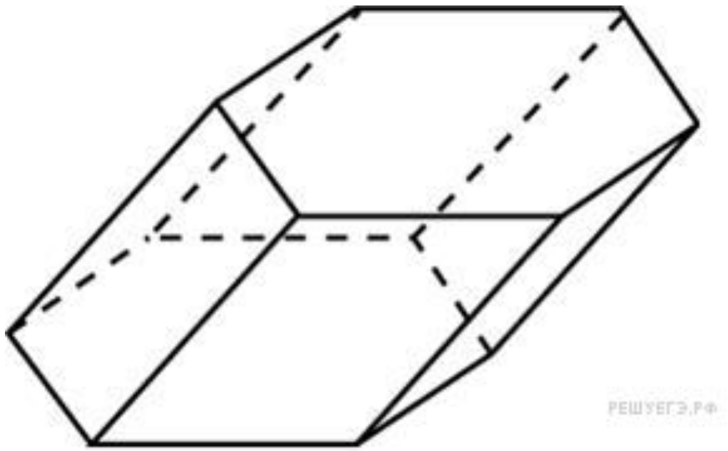
$$S_{\text{осн}}=\frac{1}{2}ab\Leftrightarrow\frac{2\cdot7}{2}=7.$$

$$V_{\text{пр.}}=S_{\text{осн}}\cdot h\Leftrightarrow V_{\text{пр.}}=7\cdot3=21.$$

Ответ: 21

Задача №21

*Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами **2**, а боковые ребра равны **$2\sqrt{3}$** и наклонены к плоскости основания под углом **$30°$** .*



Объем призмы $V = S_{oc.} \cdot h = S_{oc.} \cdot L\sin\alpha$ где **S**– площадь основания, а **L** – длина ребра, составляющего с основанием угол **α**. Площадь правильного шестиугольника со стороной **a** равна

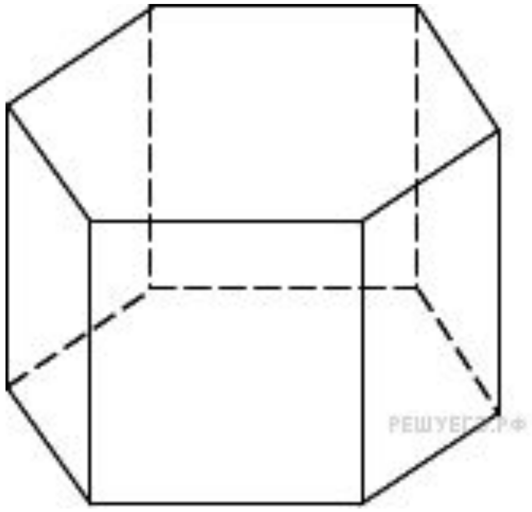
$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 18$$

Ответ: 18

Задача №22

Найдите объем правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны $\sqrt{3}$.



Объем призмы равен произведению площади основания на высоту. Высотой правильной призмы является ее боковое ребро. Основание призмы — правильный шестиугольник. Площадь правильного шестиугольника со стороной **a** вычисляется по формуле

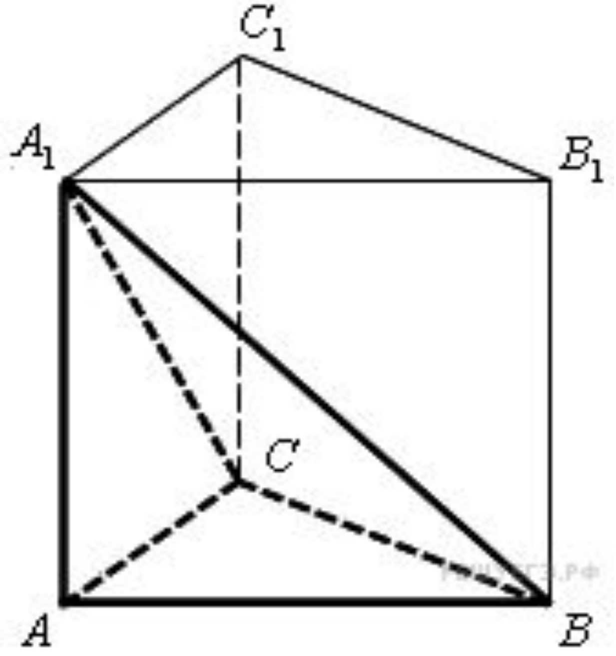
$$S = 1,5\sqrt{3}a^2$$

$$V = S_{осн}H = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{9}{2}a^2 = \frac{27}{2} = 13,5.$$

Ответ: 13,5

Задача №23

*Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна **2**, а боковое ребро равно **3**.*

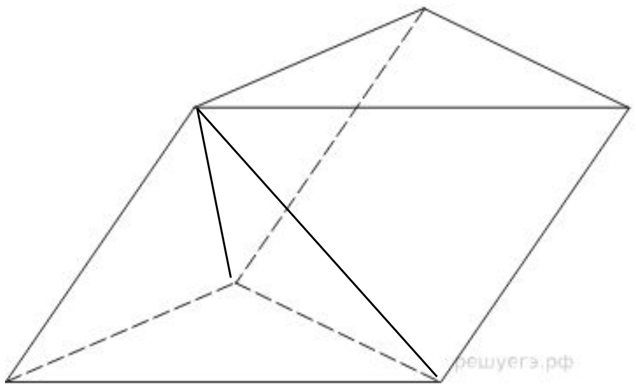


Требуется найти объём пирамиды, основание и высота которой совпадают с основанием и высотой данной треугольной призмы. Поэтому

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пир}}h_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пр}}h_{\text{пр}} = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 3 = 2.$$

Задача №24

От треугольной призмы, объем которой равен **6**, *отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объем оставшейся части.*



Объем призмы равен $V_{призмы} = S_{осн}h$.

Объем призмы равен $V_{пирамиды} = 1/3 S_{осн}h$.

$$V_{отсеч.пир.} = \frac{1}{3} V_{призмы}$$

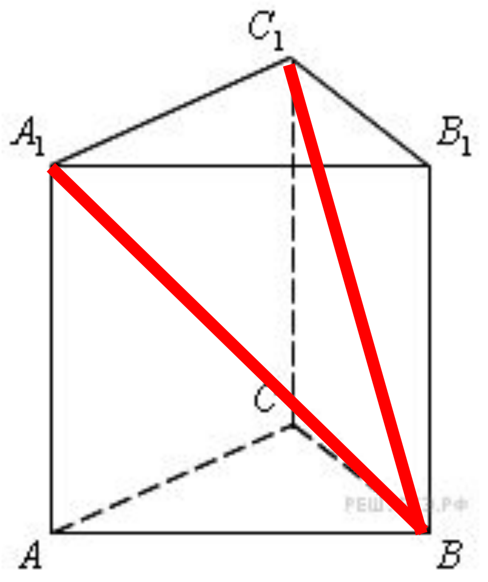
$$V_{отсеч.пир.} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$$

$$V_{остав.части.} = V_{призмы} - V_{отсеч.пир.} = 6 - 2 = 4$$

Ответ: 16

Задача №25

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна ***3****, а боковое ребро равно* ***2****.*



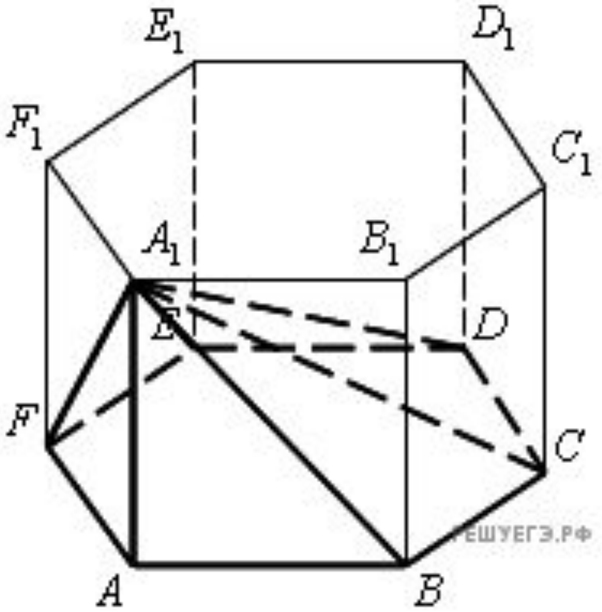
Искомый объём многогранника равен разности объёмов призмы **$ABCA_1B_1C_1$** и пирамиды **$BA_1B_1C_1$,** основания и высоты которых совпадают.

$$V_{\text{мног}} = S_{\text{пр}} h_{\text{пр}} - \frac{1}{3} S_{\text{пир}} h_{\text{пир}} = 3 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2 = 4.$$

Ответ: 4

Задача №26

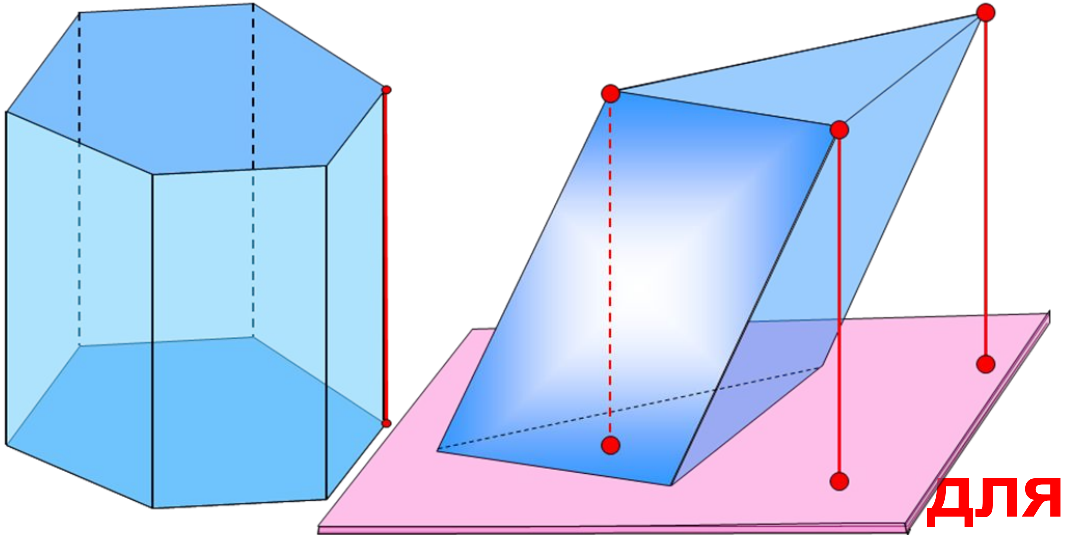
Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна ***4****, а боковое ребро равно* ***3****.*



Основание пирамиды такое же, как основание правильной шестиугольной призмы, и высота у них общая. Поэтому

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{пир}} h_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{пр}} h_{\text{пр}} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 = 4.$$

Ответ: 4



2018 ЕГЭ

Задачи для самостоятельного решения