Ряды

- Определение числового ряда, суммы ряда. Свойства рядов.
- Необходимый признак сходимости ряда.

РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

- Признак сравнения. Предельный признак сравнения. Эталонные ряды для сравнения.
- Признак Д'Аламбера.
- Радикальный / интегральный признак Коши.

ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ / ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

- Признак Лейбница
- Достаточный признак сходимости
- Абсолютная и условная сходимость
- Общий признак Д'Аламбера

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

- Степенные ряды. Теорема Абеля.
- Ряд Маклорена. Разложение в ряд Маклорена некоторых функций.

- Применение рядов для приближенных вычислений

Числовые ряды

Определение

Выражение вида $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1)

называется числовым рядом, если множество $\{a_n\}$ образует последовательность, каждый член которой есть функция целочисленного аргумента, то есть

$$\forall n \in N \quad a_n = f(n)$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются членами ряда, а член a_n - общим или n-ым членом ряда

Числовые ряды

Пример числового ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{4}+\frac{8}{5}+\frac{16}{6}+\ldots+\frac{2^n}{n+2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+2}$$

Числовые ряды

Определение

Величина $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ называется n-ой частичной суммой ряда (1).

Для ряда (1) можно построить последовательность n-ых частичных сумм $\{S_n\}$,которая, как всякая последовательность, может быть сходящейся или расходящейся

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Числовые ряды

Определение

Ряд называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \neq \infty$

S – сумма ряда

Определение

Ряд называется расходящимся, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или бесконечен

Числовые ряды

Пример:

1. $0+0+0+0+\ldots+0+\ldots$

$S_n = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0 \Longrightarrow$ ряд сходится и его сумма S=0

2. $1+1+1+1+\ldots+1+\ldots$

$S_n = n$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty \Longrightarrow$ ряд расходится

Геометрический ряд

Вид геометрического ряда

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

При $q \neq 1$ $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$ сумма n членов геометрической прогрессии

$$|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

ряд сходится

$$|q| > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$ ряд расходится

Геометрический ряд

$q = 1 \Rightarrow$ ряд примет вид $a + a + a + \ldots + a + \ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a = \infty$ ряд расходится

$q = -1 \Rightarrow$ ряд примет вид $a - a + a - \ldots + (-1)^{n-1} a + \ldots$

$S_n = 0,$ при n-четном; $S_n = a,$ при n-нечетном

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует ряд расходится

Таким образом

$|q| < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ сходится и $S = \dfrac{a}{1-q}$

$|q| \geq 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ расходится

Основные свойства рядов

Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы соответственно равны A и B, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, представляющий сумму данных рядов также сходится
и его сумма равна A+B

Доказательство:

Пусть $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n;$ $\quad B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \qquad \lim_{n\to\infty} B_n = B$$

$$S_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = A_n + B_n$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n = A + B$$

Основные свойства рядов

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходятся и имеет сумму S, то и ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$, полученный умножением данного ряда на

число k также сходится и имеет сумму kS

Доказательство:

Пусть $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad \lim_{n\to\infty} A_n = S$

$$S_n = ka_1 + ka_2 + \ldots + ka_n = kA_n$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} kA_n = k \lim_{n\to\infty} A_n = kS$$

Основные свойства рядов

Определение

Остатком ряда (1) после n-ого члена называется ряд, который получается из данного ряда, если в
нем отбросить первые n членов

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m} + \ldots = \sum_{m=1}^{\infty} a_{n+m} \quad (2)$$

Если ряд (1) сходятся, то сходится и ряд,полученный из данного путем отбрасывания (или приписывания) конечного числа членов, то есть для $\forall n$ ряд (2) сходится

Для того, чтобы ряд (1) сходился необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$ остаток ряда при $n \to \infty$ стремился к нулю, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$

Основные свойства рядов

Необходимый признак сходимости

Если ряд (1) сходится,то предел его общего члена a_n при $n \to \infty$ равен нулю, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Доказательство:

Выразим n-ый член ряда через частные суммы $a_n = S_n - S_{n-1}$

Так как ряд (1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

Следствие

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд (1) расходится

Предположим противное. Пусть ряд (1) сходится. Тогда по необходимому признаку сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, что противоречит условию.

Примеры

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \frac{n}{n+2} = \left| \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \right. \neq 0 \Longrightarrow$ ряд расходится

2. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармонический ряд

Необходимый признак сходимости выполнен

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

Докажем, что этот ряд расходится

Гармонический ряд

Доказательство:

Запишем сумму первых 2n и n членов ряда:

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \qquad S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

Так как $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}; \frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}; \ldots$, то

$$S_{2n} - S_n > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Предположим противное. Пусть гармонический ряд сходится

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$$

Переходя к пределу в неравенстве, имеем

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0 > \frac{1}{2}$$ Противоречие

Признак сравнения

Пусть даны два ряда с положительными членами:

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \forall n \in N, \quad a_n \geq 0$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \forall n \in N, \quad b_n \geq 0$

Если, начиная с некоторого номера k, для членов ряда (3) и (4) выполняется $0 \leq a_n \leq b_n$ для $n \geq k$, то

1) если ряд (4) сходится, то (3) – сходится;
2) если ряд (3) расходится, то (4) – расходится

Признак сравнения

Доказательство:

1. Пусть $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n; \quad B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$

По условию ряд (4) сходится $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$ и $B_n \le B$ так как члены ряда (4) положительны.

Рассмотрим последовательность частичных сумм $\{A_n\}$ ряда (3)

Эта последовательность является: возрастающей (с ростом n увеличивается сумма n положительных слагаемых) и ограниченной

$A_n \le B_n \le B \Rightarrow$ на основании признака существования предела последовательность $\{A_n\}$ имеет предел, то есть ряд (3) сходится.

2. Ряд (3) расходится. Используем метод от противного. Предположим что ряд (4) сходится. Тогда согласно доказанному пункту 1 и ряд (3) сходится, что противоречит условию.

Предельный признак сравнения

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - ряды с положительными членами и существует конечный предел отношения их общих членов $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$, то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Эталонные ряды для сравнения

Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

$\alpha > 1$ ряд сходится

$\alpha \leq 1$ ряд расходится

Геометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

$0 < q < 1$ ряд сходится

$q \geq 1$ ряд расходится

Примеры

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ $\qquad n>\ln n \Rightarrow \frac{1}{n}<\frac{1}{\ln n} \qquad \forall n\geq 2$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится $\Longrightarrow$ ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ расходится

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2+4}$ $\qquad \sin^2 n\leq 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 n}{n^2+4}\leq\frac{1}{n^2+4}\leq\frac{1}{n^2} \qquad \forall n\geq 1$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится $\Longrightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2+4}$ расходится

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6-4n^2}{n^3+5}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{6-4n^2}{n^3+5}\div\frac{1}{n}=-4\neq 0$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится $\Longrightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6-4n^2}{n^3+5}$ расходится

Признак Д'Аламбера

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($\forall n \in N,\ a_n \geq 0$) $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

Тогда, если l<1, то ряд сходится;

если l>1, то ряд расходится;

если l=1, то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным

Доказательство:

По определению предела числовой последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon \text{ или } l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$$

а) Пусть $l < 1$. Возьмем $\varepsilon > 0$ таким образом, чтобы $q = l + \varepsilon < 1$

то есть $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \Rightarrow a_{n+1} < q a_n,\ \forall n > N$ то есть для

$$n = N+1, N+2, \ldots$$

Признак Д'Аламбера

$$a_{N+2} < qa_{N+1}; a_{N+3} < qa_{N+2} < q^2 a_{N+1}; \ldots; a_{N+k} < qa_{N+k-1} < \ldots < q^k a_{N+1}$$

Таким образом члены ряда $a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots + a_{N+k} + \ldots$ меньше

чем члены ряда $qa_{N+1} + q^2 a_{N+1} + \ldots + q^{k-1} a_{N+1} + \ldots$ - сходящийся

геометрический ряд при q<1 $\Longrightarrow$ по признаку сравнения ряд

$a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots + a_{N+k} + \ldots$ сходится $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходящийся,

который отличается от полученного на (N+1) членов

б) Пусть $l > 1$. Возьмем $\varepsilon > 0$ Таким образом $l - \varepsilon > 1$.

Тогда $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > l - \varepsilon > 1 \Longrightarrow a_{n+1} > a_n$ Члены ряда возрастают,

начиная с номера N+1, поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow$ ряд расходится

Радикальный признак Коши

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (\forall n \in N, a_n \geq 0\ ) \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

Тогда, если l<1, то ряд сходится;

если l>1, то ряд расходится;

если l=1, то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным

Примеры

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2 \cdot n!} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$ - ряд сходится

Признак Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{6^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n+1} = 0 < 1$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{3n})^{6n^2}$ - ряд расходится

Радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{3n})^{6n} = \lim_{n\to\infty} ((1 + \frac{1}{3n})^{3n})^2 = e^2 > 1$$

Интегральный признак Коши

Если $a_n = f(n)$, где f(x) – функция положительная, монотонно убывающая и непрерывная при $x \geq a \geq 1$,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$

сходятся или расходятся одновременно

Доказательство:

Возьмем в качестве a=1

Рассмотрим ряд $\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \ldots + \int_n^{n+1} f(x)dx + \ldots$

Его n-ой частичной суммой будет:

$$S_n = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \ldots + \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_1^{n+1} f(x)dx$$

Интегральный признак Коши

Сходимость интеграла $\int_1^{\infty} f(x)dx$ означает существование предела:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}(\int_1^{n+1} f(x)dx) = \lim_{n\to\infty} S_n$$

В силу монотонности функции f(x) на отрезке [n;n+1]

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1) \quad \text{или} \quad a_n \geq f(x) \geq a_{n+1}$$

проинтегрируем на отрезке [n;n+1]

$$\int_n^{n+1} a_n dx \geq \int_n^{n+1} f(x)dx \geq \int_n^{n+1} a_{n+1} dx \quad \text{или} \quad a_n \geq \int_n^{n+1} f(x)dx \geq a_{n+1}$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то из 1 неравенства по признаку сравнения сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)dx$, а значит и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$

Интегральный признак Коши

Обратное утверждение: Если сходится интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$

то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)dx$, то согласно 2 неравенству по признаку сравнения сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$, а следовательно и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ - ряд расходится

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} \frac{dx}{x} = \lim_{a\to\infty} \ln x \Big|_1^{a} = \lim_{a\to\infty} \ln a = \infty$$ - расходится

Знакочередующиеся ряды

Определение

Ряд называется знакочередующимся, если любые два его соседних члена имеют разные знаки, то есть

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad a_n > 0$$

Признак Лейбница

Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится, а его сумма не превосходит первого члена $S < a_1$

Доказательство:

Рассмотрим последовательность частичных сумм четного числа членов при n=2m

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

Эта последовательность возрастающая (так как в скобках положительные слагаемые) и ограничена (так как $S_{2m} < a_1$)

Признак Лейбница

На основании признака существования предела последоват.

$$\exists \lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$$

Переходя к пределу в неравенстве $S_{2m} < a_1$ получим $S \le a_1$

Пусть n=2m+1

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(S_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S + 0 = S$$

Таким образом, для любого n (четного или нечетного)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S < a_1$$

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$ - ряд сходится

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Знакопеременные ряды

Определение

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется знакопеременным,

если любые его члены a_n могут быть как положительными так и отрицательными.

Достаточный признак сходимости

Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Доказательство:

S_n^+, S_n^- - суммы абсолютных величин членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, входящих в него со знаком " + " и " - ".

$S_{n_1} = S_n^+ - S_n^-$ - частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$S_{n_2} = S_n^+ + S_n^-$ - частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Достаточный признак сходимости

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится $\Rightarrow \exists \lim_{n_2\to\infty} S_{n_2} = S$

Последовательности S_n^+, S_n^- являются возрастающими и

Ограниченными $(S_n^+ \le S, S_n^- \le S) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n^+$ и

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n^- \Rightarrow \exists \lim_{n_1\to\infty} S_{n_1} = \lim_{n\to\infty} S_n^+ - \lim_{n\to\infty} S_n^-$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

Достаточный признак сходимости

Утверждение обратное достаточному признаку сходимости неверно

Например:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

сходится по признаку Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

расходится как гармонический ряд

Знакопеременные ряды

Определение 1:

Ряд называется абсолютно сходящимся, если

сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Определение 2:

Ряд называется условно сходящимся, если ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - расходится

Знакопеременные ряды

Сходимость

абсолютная

члены быстро убывают

условная

положительные и отрицательные слагаемые уничтожают друг друга

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3}$$

Составим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^3}$ Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

$\forall n \in N \quad \frac{|\cos n|}{n^3} \le \frac{1}{n^3}$, так как $|\cos n| \le 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ - сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^3}$ - сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3}$ - сходится

Общий признак Д'Аламбера

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (5) таков, что $\exists \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$

Тогда, если l<1, то ряд абсолютно сходится;

если l>1, то ряд расходится

Доказательство:

а) Пусть $l < 1$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (6). Так как ряд (6) положителен,можем применить к нему признак Д'Аламбера.$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ряд (6) сходится $\Rightarrow$ Ряд (5) абсолютно сходится

б) Пусть $l > 1$. При $n \to \infty$ $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to l > 1$, то есть $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$

или $|a_{n+1}| > |a_n|$ $\Rightarrow$ абсолютные величины членов ряда (5) растут, то есть удаляются от 0 $\Rightarrow$нарушается необходимый признак сходимости ($a_n \to 0$) и ряд расходится

Функциональные ряды

Определение

Функциональным рядом называется ряд вида

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),$$

где $\forall n\in N \quad u_n(x)=f(n,x)$

Множество значений аргумента x, для которых функциональный ряд сходится называется областью сходимости функционального ряда.

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)$$

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$ - сумма ряда

$$R_n(x)=S(x)-S_n(x)$$ - остаток ряда

Степенные ряды

Степенной ряд $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ (6)

является частным случаем функционального ряда

Общий вид степенного ряда

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad (7)$$

(6) – частный случай (7), так как при $x - a = \bar{x}$ ряд (7) превратится в ряд:

$$c_0 + c_1\bar{x} + c_2\bar{x}^2 + \ldots + c_n\bar{x}^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \bar{x}^n$$

Теорема Абеля

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

1. сходится в точке $x_1 \Rightarrow$ он сходится абсолютно при $\forall x : |x| < |x_1|$
2. расходится в точке $x_2 \Rightarrow$ расходится $\forall x : |x| > |x_2|$

Доказательство:

1) По условию ряд (6) сходится в точке $x = x_1 \Rightarrow$ выполняется необходимый признак сходимости, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n x_1^n = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ последовательность $\{c_n x_1^n\}$ ограничена, то есть $\exists M > 0, \forall n$ $|c_n x_1^n| < M$

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (6):

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = |c_0| + |c_1 x_1| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right| + |c_2 x_1^2| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^2 + \ldots + |c_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n + \ldots \quad (8)$$

Теорема Абеля

Члены ряда (8) меньше соответствующих членов ряда:

$$M + M\cdot\left|\frac{x}{x_1}\right| + M\cdot\left|\frac{x}{x_1}\right|^2 + \ldots + M\cdot\left|\frac{x}{x_1}\right|^n + \ldots \qquad (9)$$

Ряд (9) – геометрический ряд, который сходится при $q = \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$

то есть при $|x| < |x_1|$ $\Rightarrow$ по признаку сравнения ряд (6) сходится

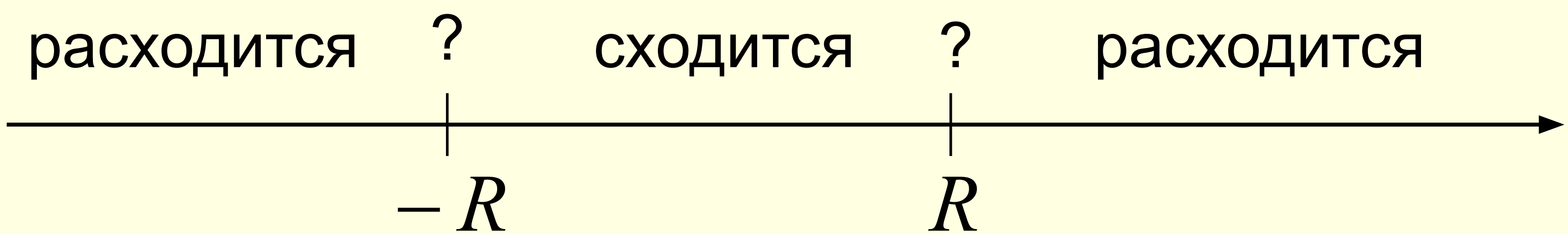
2) По условию ряд (6) расходится при $x = x_2$. Покажем, что он расходится $\forall x : |x| > |x_2|$. Предположим противное, то есть при $|x| > |x_2|$ ряд сходится. Тогда из доказанного он сходится при $x = x_2$, так как $|x_2| < |x|$. Противоречие, так как при $|x| > |x_2|$ ряд (6) расходится.

Ч.Т.Д.

Следствие из теоремы Абеля

$\exists R \geq 0:$

- $|x| < R$ ряд сходится
- $|x| > R$ ряд расходится
- $x = R$, $x = -R$ нужны специальные исследования



R – радиус сходимости

(-R;R) – интервал сходимости

Для некоторых рядов: R=0 или $R = \infty$

Радиус сходимости степенного ряда

Признак Д' Аламбера

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

Признак Коши

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$$

Применим к ряду из абсолютных величин признак Д’Аламбера

$$|c_0| + |c_1 x| + |c_2 x^2| + \ldots + |c_n x^n| + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1 \Rightarrow |x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|, \quad c_n \neq 0$$

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|,}$$

Найти интервал сходимости

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}| \cdot |n+1|}{|n+2| \cdot |x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = |x| < 1$$

R=1 $\Rightarrow$ ряд сходится на интервале (-1;1)

x=-1 $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ - сходится по признаку Лейбница

x=1 $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ - расходится по признаку сравнения

Область сходимости : [-1; 1)

Свойства степенных рядов

Пусть функция f(x) является суммой степенного ряда:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

где (-R;R) – интервал сходимости этого ряда.

Говорят, что функция f(x) на интервале (-R;R) разлагается в степенной ряд.

f(x) непрерывна для $\forall x \in [a, b] \subset (-R, R)$

1. Степенной ряд можно почленно интегрировать на отрезке [a, b] $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b c_0 dx + \int_a^b c_1 x dx + \ldots + \int_a^b c_n x^n dx + \ldots$

2. Степенной ряд можно почленно дифференцировать на отрезке [a, b] $f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots$

Ряд Маклорена

Пусть функция f(x) определенная и n раз дифференцируемая в окрестности точки x=0 разложена в степенной ряд:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + ...$$

Найдем коэффициенты этого ряда. Для этого найдем производные функции f(x):

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + ... + nc_n x^{n-1} + ...$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3 x + 4\cdot 3c_4 x^2 + ... + n\cdot(n-1)c_n x^{n-2} + ...$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2c_3 + 4\cdot 3\cdot 2c_4 x + ... + n\cdot(n-1)\cdot(n-2)c_n x^{n-3} + ...$$

....

$$f^{(n)}(x) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot ...\cdot 3\cdot 2\cdot c_n + ...$$

Ряд Маклорена

При x=0:

$$f(0)=c_0,\, f'(0)=c_1,\, f''(0)=2\cdot 1\cdot c_2=2!c_2,$$
$$f'''(0)=3\cdot 2\cdot 1\cdot c_3=3!c_3,\dots,\, f^{(n)}(0)=n!c_n \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{c_0=f(0), c_1=f'(0), c_2=\frac{f''(0)}{2!}, c_3=\frac{f'''(0)}{3!},\dots, c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\dots}$$

Определение

Степенной ряд

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$$

называется рядом Маклорена

Ряд Маклорена

$S_n(x)$ - n-ая частичная сумма ряда

$R_n(x)$ - n-ый остаток ряда

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

Необходимое и достаточное условие сходимости

Для того, чтобы ряд Маклорена сходился к функции f(x) необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in (-R, R)$$

Ряд Маклорена является частным случаем ряда Тейлора

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Разложение в ряд Маклорена некоторых функций

$$\boxed{y = e^x}$$

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots}$$

Область сходимости: $(-\infty; +\infty)$

Разложение в ряд Маклорена некоторых функций

$$\boxed{y = \sin x}$$

$$f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x,\ f^{(5)}(x) = \cos x,\ f^{(6)}(x) = -\sin x,\ f^{(7)}(x) = -\cos x$$

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0 \ldots \Rightarrow$$

$$f^{(2n)}(0) = 0,\ f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n+1},\ n = 1,2,3\ldots$$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots}$$

Область сходимости: $(-\infty; +\infty)$

Разложение в ряд Маклорена некоторых функций

$$y = \cos x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Область сходимости: $(-\infty; +\infty)$

Разложение в ряд Маклорена некоторых функций

$$\boxed{y=(1+x)^m}$$

m –любое действительное число

$$f(x)=(1+x)^m,\ f'(x)=m(1+x)^{m-1},\ f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},...$$
$$...,\ f^{(n)}(x)=m(m-1)...(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

$$f(0)=1,\ f'(0)=m,\ f''(0)=m(m-1),...,\ f^{(n)}(0)=m(m-1)...(m-n+1)$$

$$\boxed{(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n+...}$$

Область сходимости: $(-1;1)$

При $x=\pm1$ **сходимость ряда зависит от конкретных m**

Разложение в ряд Маклорена некоторых функций

$$\boxed{y = \ln(1+x)}$$

Рассмотрим геометрический ряд со знаменателем q=-x

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

Проинтегрируем почленно в интервале (0;x), где /x/<1

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln|t+1|\Big|_0^x = \ln(1+x)$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \ldots}$$

Область сходимости: $(-1;1)$

Разложение в ряд Маклорена некоторых функций

$$\boxed{y=\ln\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+\ldots$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots)-$$
$$-(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots)=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots)$$

Область сходимости: $(-1;1)$

Применение рядов для приближенных вычислений

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx, \quad \varepsilon = 0{,}001$$

Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, заменяя x на $(-x^2)$

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots$$

$$\int_0^t e^{-x^2}dx = \int_0^t \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots\right)dx =$$

$$\left(x - \frac{x^3}{1!\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3} + \frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5} - \frac{1}{3!\cdot 7\cdot 4^7} + \ldots$$

Применение рядов для приближенных вычислений

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\,dx, \quad \varepsilon = 0{,}001$$

Так как $\dfrac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3} \approx 0{,}0052\ldots > 0{,}001$, а $\dfrac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5} < 0{,}001$,

то с точностью до 0,001 имеем

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0{,}245$$

Применение рядов для приближенных вычислений

$$\ln 0{,}8 \quad \varepsilon = 0{,}0001$$

$$\ln 0{,}8 = \ln(1-0{,}2) = -0{,}2 - \frac{(0{,}2)^2}{2} - \frac{(0{,}2)^3}{3} - .. - \frac{(0{,}2)^n}{n} - .. =$$

$$= -(0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}00266 + 0{,}0004 + \ldots)$$

Если в качестве ln 0,8 взять первые четыре члена, то мы допустим погрешность

$$|r_n| = \frac{(0{,}2)^5}{5} + \frac{(0{,}2)^6}{6} + .. + \frac{(0{,}2)^n}{n} + .. < \frac{(0{,}2)^5}{5} + \frac{(0{,}2)^6}{5} + .. + \frac{(0{,}2)^n}{5} + .. =$$

$$= \frac{(0{,}2)^5}{5}(1 + 0{,}2 + \ldots + (0{,}2)^{n-5} + \ldots) = \frac{(0{,}2)^5}{5} \cdot \frac{1}{1-0{,}2} = 0{,}00008 <$$

$$< 0{,}0001$$