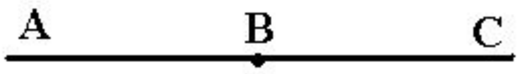
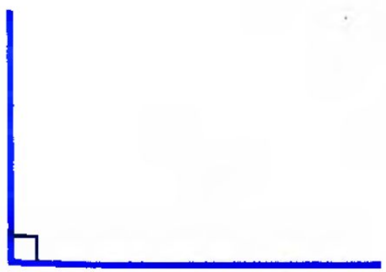
Теоретический материал по геометрии за курс 7-9 классов

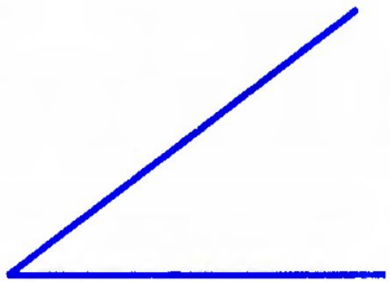
УГЛЫ



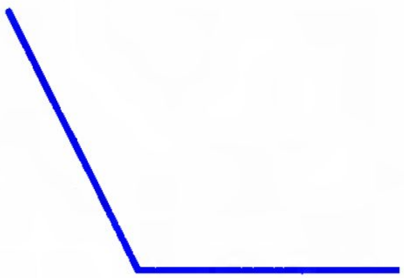
∠ABC -развернутый



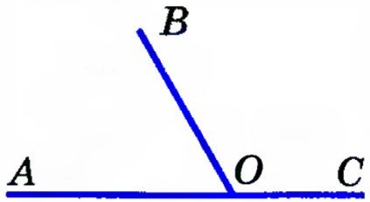
Прямой угол



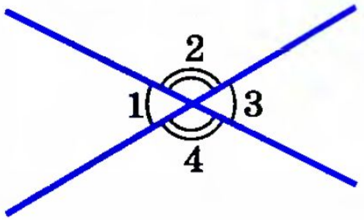
Острый угол



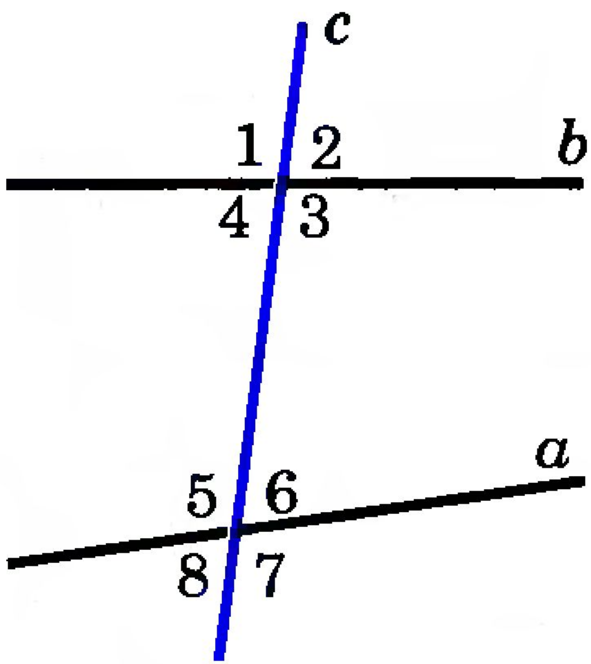
Тупой угол



∠AOB и ∠BOC смежные ∠AOB + ∠BOC=180°



∠1 и ∠3; ∠2 и ∠4 – вертикальные
∠1 = ∠3; ∠2 = ∠4

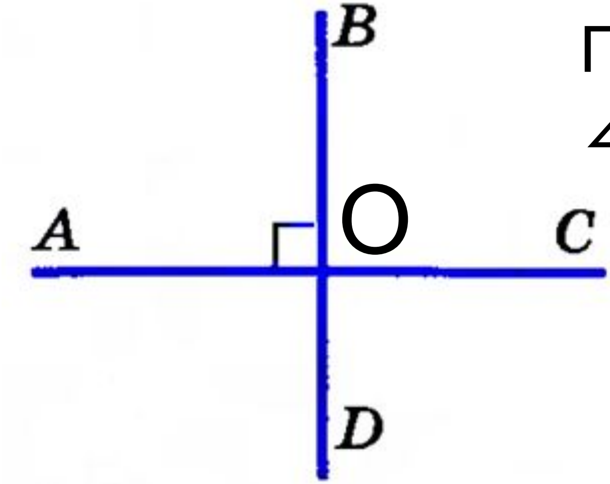


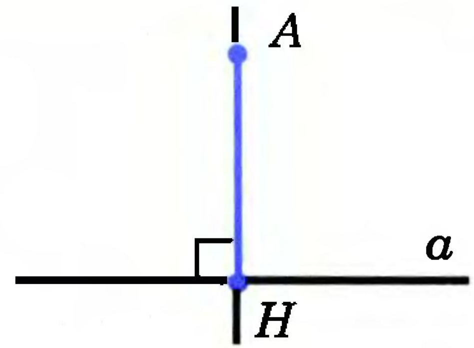
накрест лежащие углы: 3 и 5, 4 и 6; односторонние углы: 4 и 5, 3 и 6; соответственные углы: 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7.

ПРЯМЫЕ

Прямые АС и BD перпендикулярны АС ⊥

∠AOB =90°



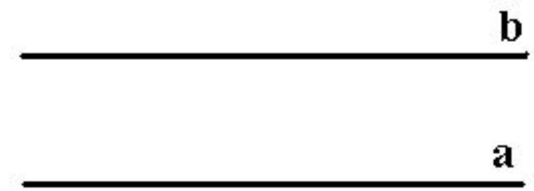


Отрезок АН – перпендикуляр к прямой а

Определение

Две прямые на плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Параллельность прямых a и b обозначают так: $a \parallel b$.



Признаки параллельности прямых

Теорема

Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Теорема

Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

Теорема

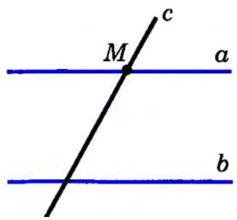
Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Аксиома параллельных прямых

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

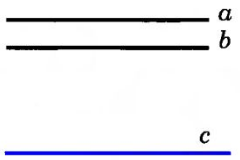
Следствия из аксиомы параллельных прямых

1^0. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.



Если a||b, c пересекает a, то c пересекает b.

2^0. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.



Если a||c, b||c, то a||b.

Свойства параллельных прямых

Теорема

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

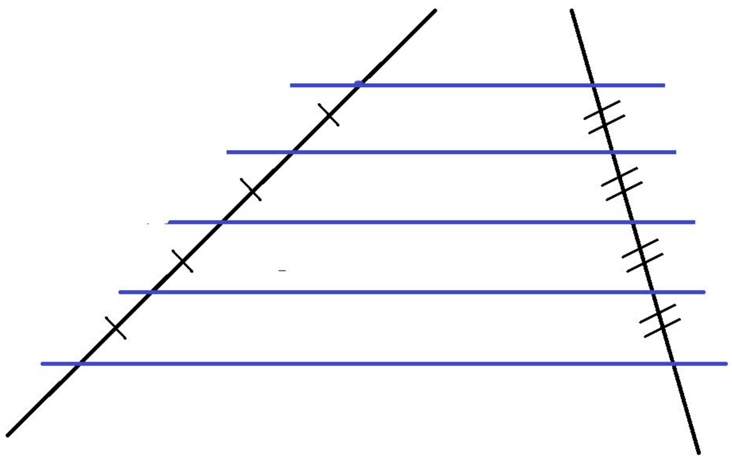
Теорема

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.

Теорема

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.

Теорема Фалеса : если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.



ТРЕУГОЛЬНИКИ

Треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, последовательно соединяющих эти точки.

Точки A, B, C — **вершины** ΔABC.

Отрезки AB, BC и AC — **стороны**, $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ — **углы**. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Стороны треугольника часто обозначают малыми буквами (рис. 13):

$$AB = c,\ \ BC = a,\ \ AC = b.$$

$P = a + b + c$ — **периметр** треугольника.

Треугольник, у которого все углы острые, называется **остроугольным** (рис. 13).

Треугольник, у которого угол прямой, называется **прямоугольным** (рис. 14).

Стороны, образующие прямой угол, называются **катетами** (a и b), а сторона, лежащая против прямого угла, — **гипотенузой** (c).

Треугольник с тупым углом называется **тупоугольным** (рис. 15).

Треугольник, у которого две стороны равны, называется **равнобедренным** (рис. 16).

Равные стороны называются **боковыми**, а третья сторона — **основанием** равнобедренного треугольника.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним** (рис. 17).

Каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

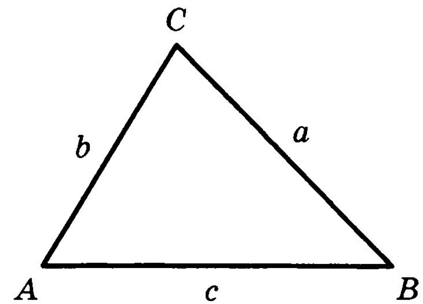


Рис. 13

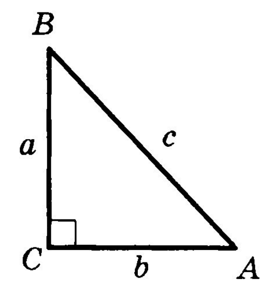


Рис. 14

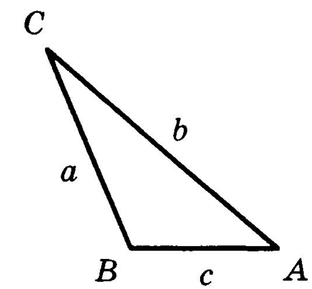


Рис. 15

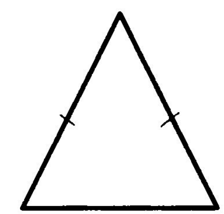


Рис. 16

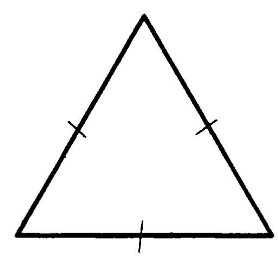


Рис. 17

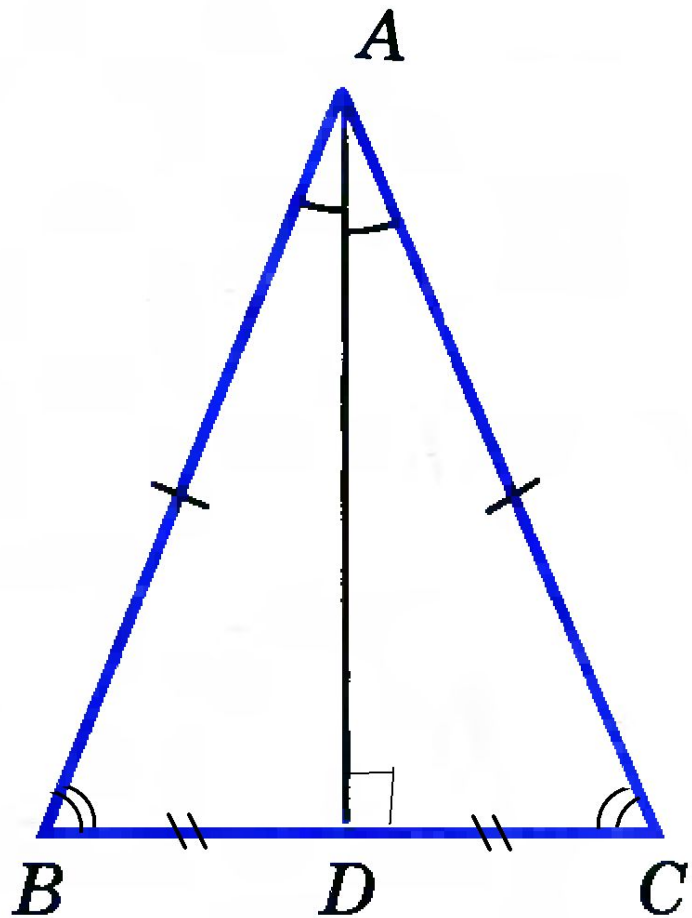
Свойства равнобедренного треугольника:

1. Углы при основании равны.

2. Биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно медианой и высотой.

3. Высота, проведенная к основанию, является одновременно медианой и биссектрисой.

4. Медиана, проведенная к основанию, является одновременно высотой и биссектрисой.



Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника (рис. 18).

$\angle CBD$ — внешний угол треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним (рис. 18): $\angle CBD = \angle A + \angle C$.

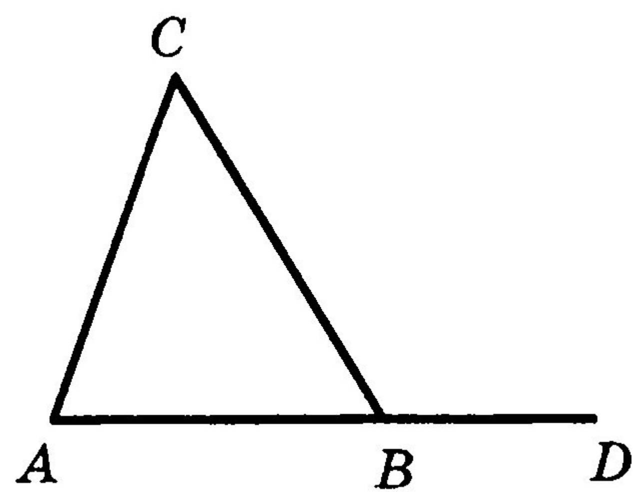


Рис. 18

Отрезок, соединяющий середины двух сторон, называется **средней линией** треугольника (рис. 19).

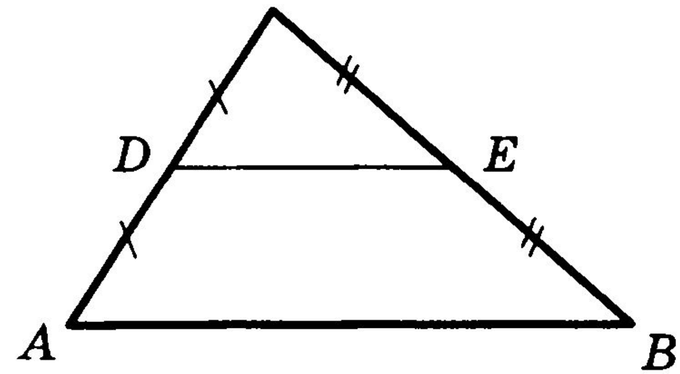


Рис. 19

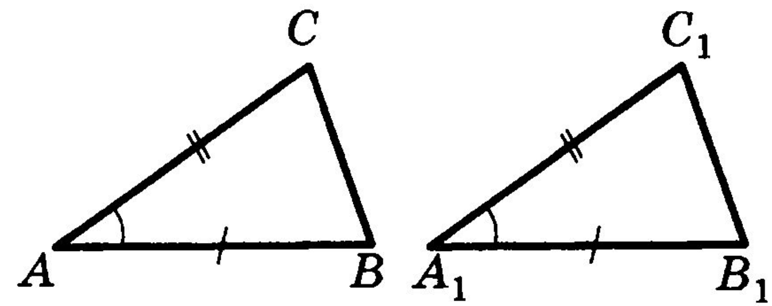
$DE || AB$

$$DE = \frac{AB}{2}$$

Признаки равенства треугольников

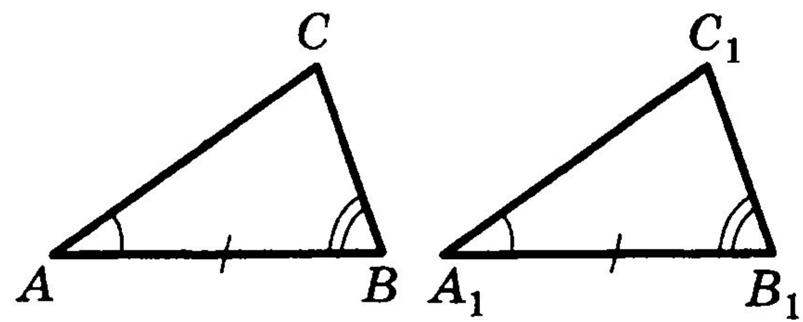
Теорема *(I признак)*

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



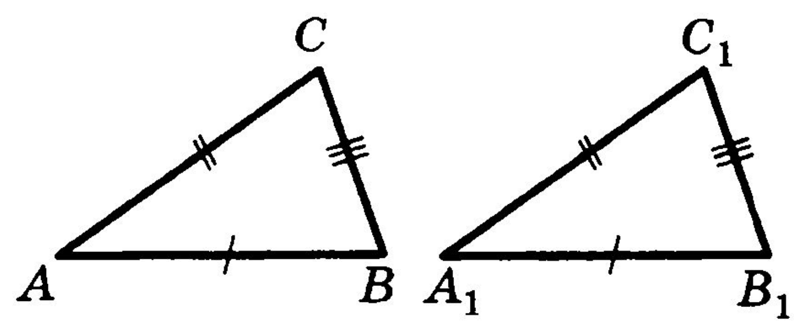
Теорема *(II признак)*

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



Теорема *(III признак)*

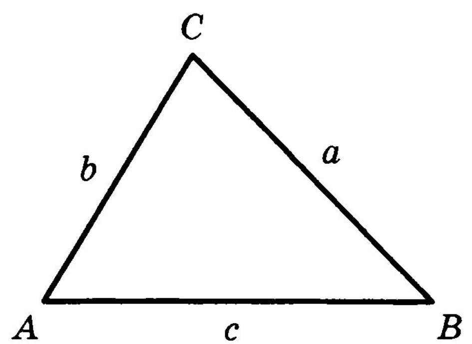
Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.



Неравенство треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон:

$$a < b + c,\ b < a + c,\ c < a + b.$$



Теорема

В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол; 2) обратно, **против большего угла лежит большая сторона.**

Прямоугольный треугольник

1) Сумма острых углов равна 90° (рис. 23).

$$\angle A + \angle B = 90°.$$

2) Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы (рис. 24).

$$a = \frac{1}{2}c.$$

3) Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° (рис. 24).

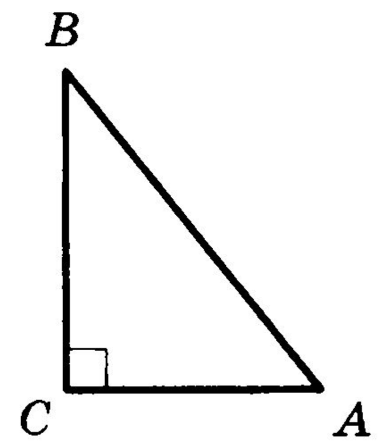


Рис. 23

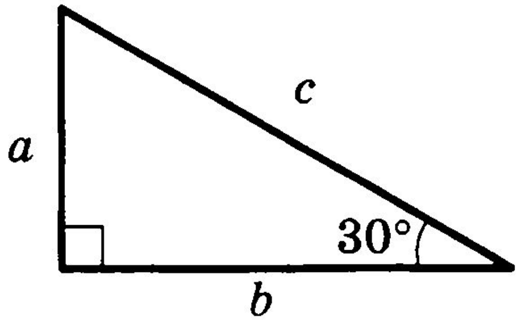
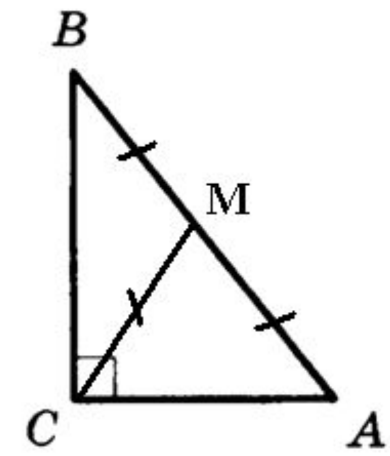


Рис. 24

4) В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.



(Теорема Пифагора)

Теорема

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

(Теорема обратная теореме Пифагора)

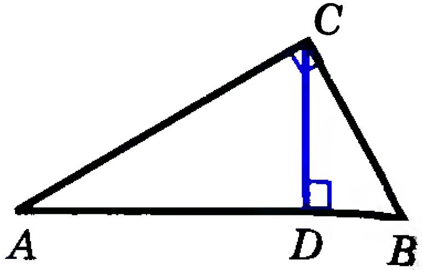
Теорема

Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

1^0. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой.

$$CD = \sqrt{AD \bullet DB}$$



2^0. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключенного между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.

$$AC = \sqrt{AD \bullet AB}$$

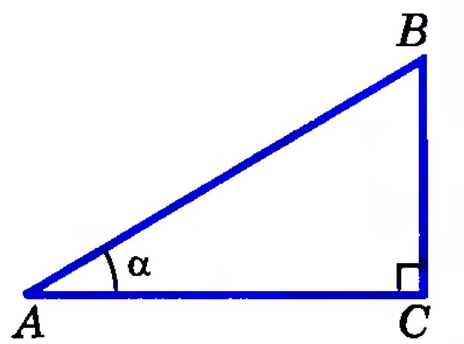
$$BC = \sqrt{BD \bullet AB}$$

$$CD = \frac{AC \bullet CB}{AB}$$

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.



$$\sin A = \frac{BC}{AB},$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}.$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A},$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Основное тригонометрическое

тождество

$$\sin A = \cos B$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{1}{\operatorname{ctg} A}$$

4 замечательные точки треугольника

С каждым треугольником связаны 4 точки:

1) точка пересечения медиан;
2) точка пересечения биссектрис;
3) точка пересечения высот (или их продолжений);
4) точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

Эти четыре точки называются **замечательными точками треугольника.**

Высотой треугольника называется длина перпендикуляра, опущенного из любой его вершины на противолежащую сторону или ее продолжение.

В *тупоугольном треугольнике* (рис. 29) две высоты падают на продолжение сторон и лежат вне треугольника, а третья внутри.

В *остроугольном треугольнике* (рис. 30) все три высоты лежат внутри треугольника.

В *прямоугольном треугольнике* катеты одновременно служат и высотами (рис. 31).

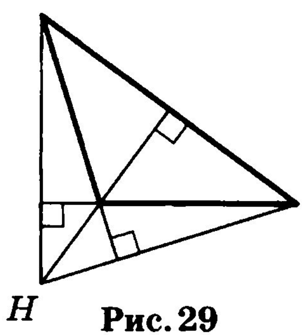


Рис. 29

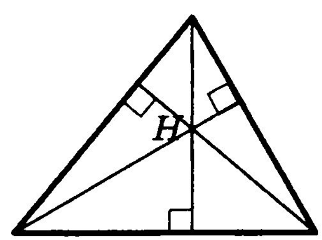


Рис. 30

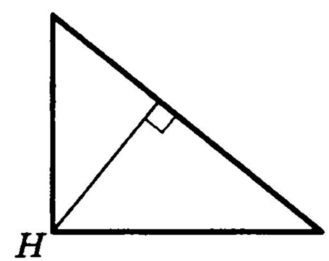


Рис. 31

Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке, называемой **ортоцентром.** В тупоугольном треугольнике ортоцентр лежит вне треугольника. В прямоугольном треугольнике он совпадает с вершиной прямого угла.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

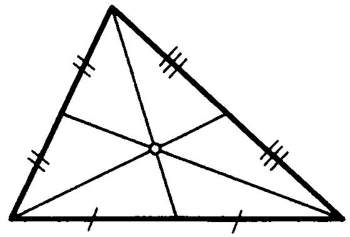


Рис. 32

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром тяжести треугольника** (рис. 32).

Эта точка делит каждую медиану в отношении 2 : 1 (считая от соответствующей вершины).

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла от вершины до пересечения с противолежащей стороной.

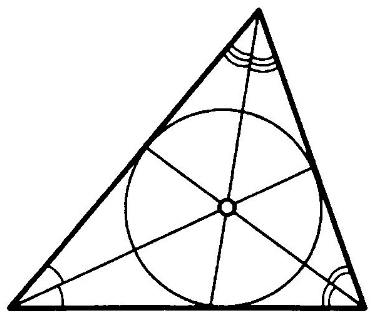


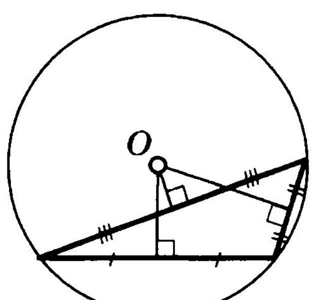
Рис. 33

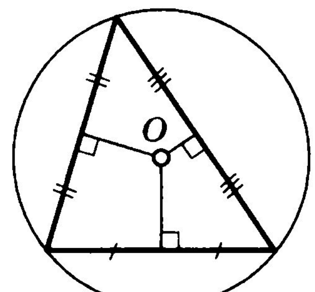
Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром вписанного круга** (рис. 33).

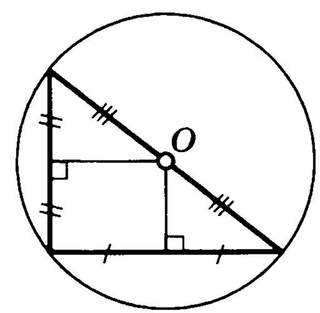
Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины (рис. 34, 35, 36), пересекаются в одной точке, которая является **центром описанной окружности.**

В тупоугольном треугольнике (рис. 34) эта точка лежит **вне** треугольника, в остроугольном (рис. 35) — **внутри**, в прямоугольном — **на середине** гипотенузы.

Ортоцентр, центр тяжести, центр вписанной и описанной окружностей совпадают друг с другом только в **равностороннем** треугольнике.



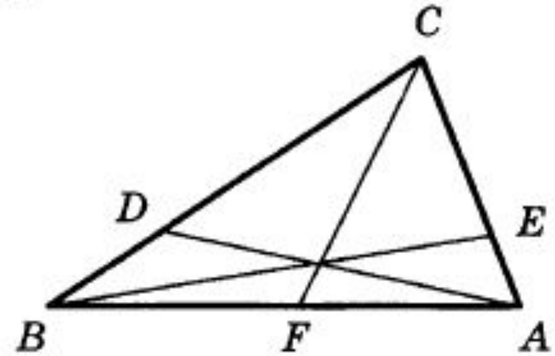




Теорема Чевы

Для того чтобы прямые BE, AD и CF пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

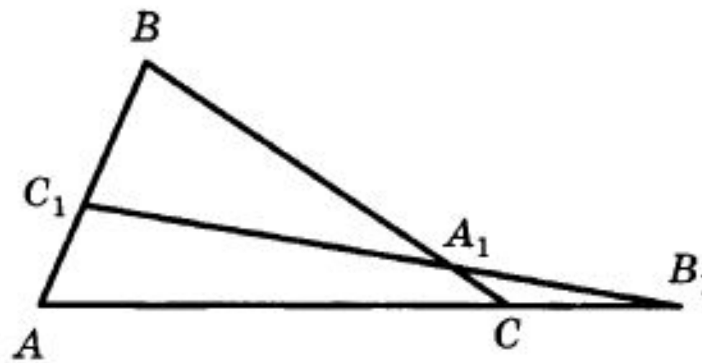
$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1.$$



Теорема Менелая

Если на сторонах BC, AB и продолжении стороны AC ΔABC за точку C отмечены соответственно точки A_1, C_1 и B_1, лежащие на одной прямой, то

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$



Теорема синусов

Во всяком треугольнике стороны относятся как синусы противолежащих углов:

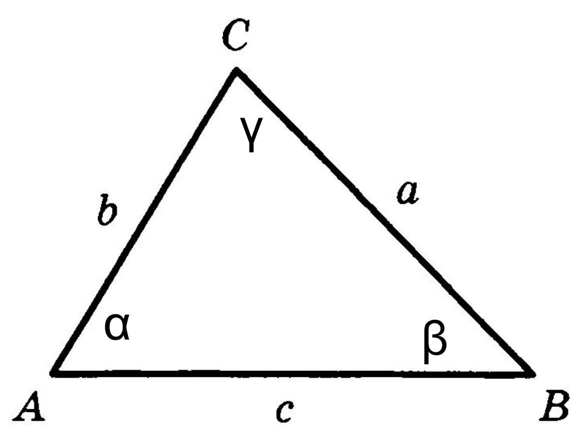
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

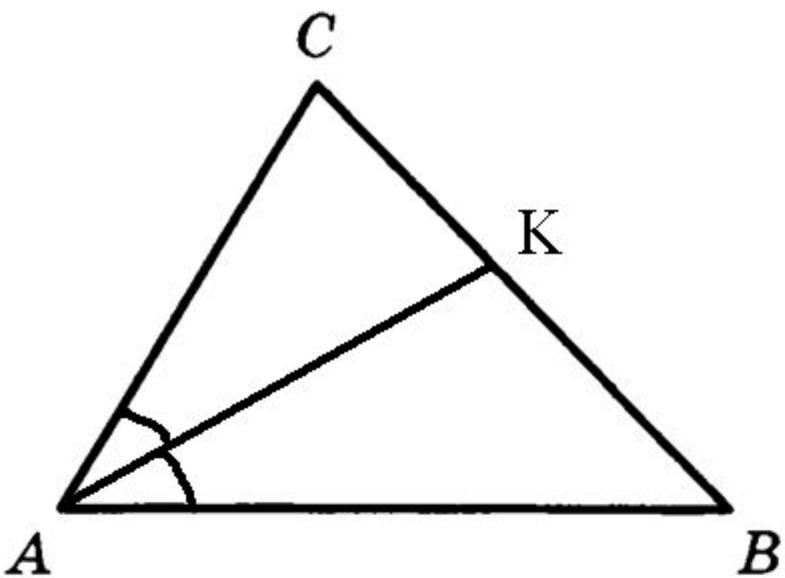
Теорема косинусов

Квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

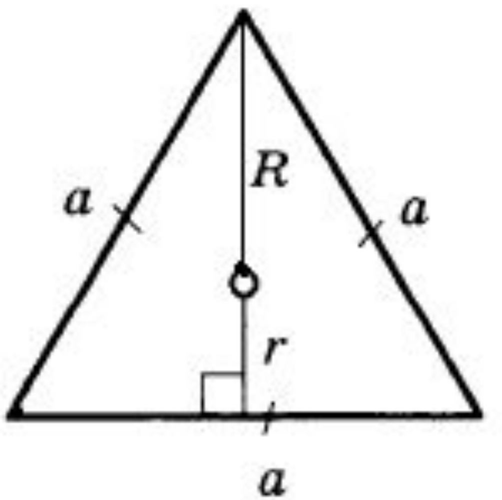
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$



Свойство биссектрисы треугольника

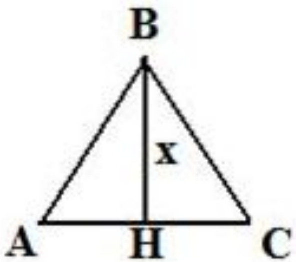


$$\frac{CK}{AC} = \frac{KD}{AB}$$



В равностороннем треугольнике r=1/3 h, R=2/3 h

Как найти высоту (медиану, биссектрису) равностороннего треугольника, если известна сторона



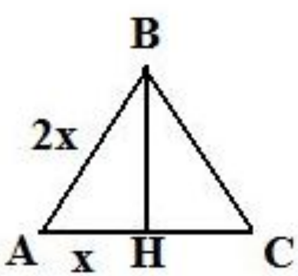
$AB^2=(\frac{AB}{2})^2+x^2$

$AB^2=\frac{AB^2}{4}+x^2$

$\frac{3AB^2}{4}=x^2$

$x=\sqrt{\frac{3AB^2}{4}}$

Как найти сторону равностороннего треугольника, если известна высота (медиана, биссектриса)



$(2x)^2=x^2+BH^2$

$4x^2=x^2+BH^2$

$3x^2=BH^2$

$x^2=BH^2:3$

$x=\sqrt{BH^2:3}$

Подобные треугольники

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого (рис. 41).

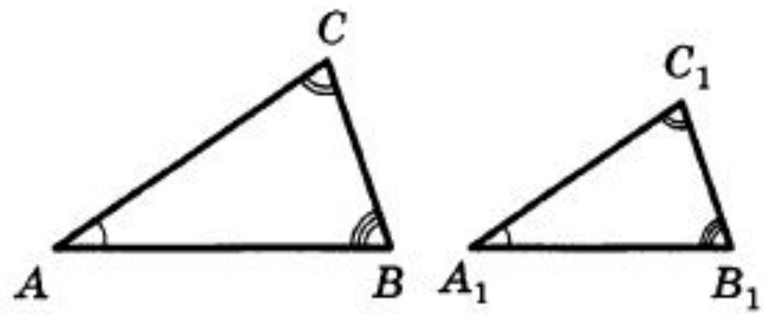


Рис. 41

AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 — сходственные стороны.

Из подобия треугольников следует:

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1.$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k,$$

где k — коэффициент подобия.

Обозначение: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Если два треугольника подобны, то отношение их площадей равно k^2, т. е. $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta A_1B_1C_1} = k^2$.

Признаки подобия

I признак: если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны (рис. 42).

$$\angle A = A_1, \angle B = B_1.$$

II признак: если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключенные между ними, равны, то такие треугольники подобны (рис. 43).

$$\angle A = \angle A_1,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

III признак: если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны (рис. 44).

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

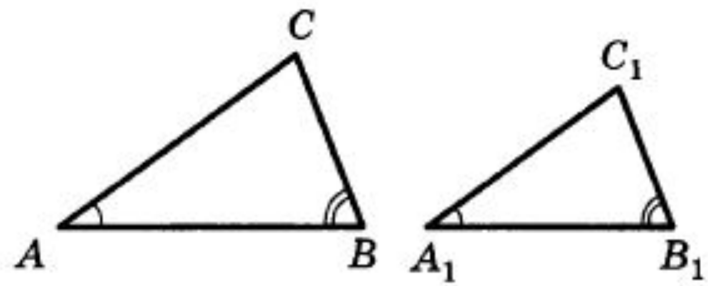


Рис. 42

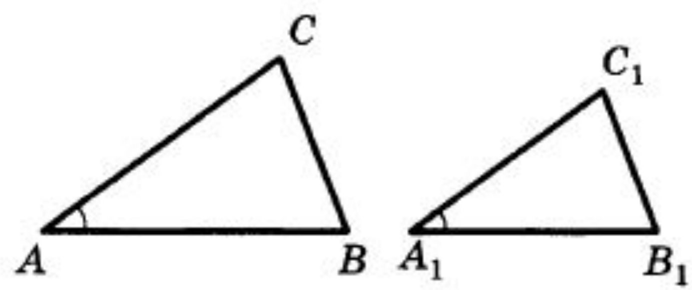


Рис. 43

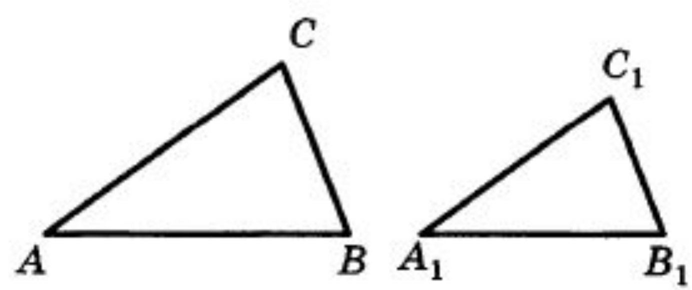


Рис. 44

1. Около всякого треугольника можно описать окружность; центром окружности является точка пересечения перпендикуляров, проведенных к сторонам через их середины (рис. 60).

2. Во всякий треугольник можно вписать окружность; центром окружности является точка пересечения биссектрис (рис. 61).

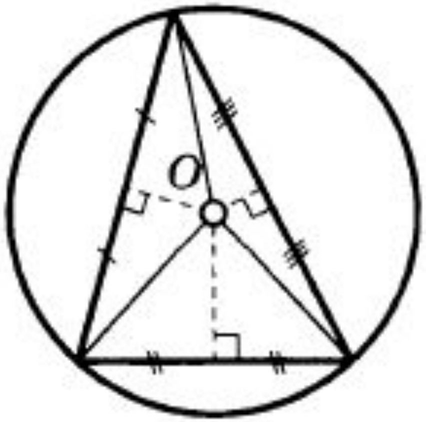


Рис. 60

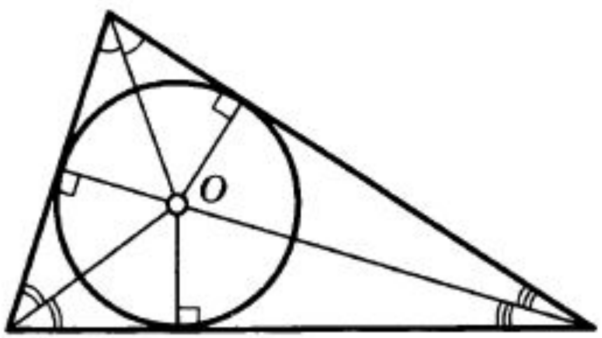
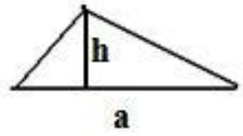


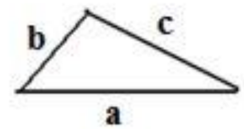
Рис. 61

Формулы площадей треугольников

$$S_{\text{треугольника}} = \frac{1}{2}ah$$

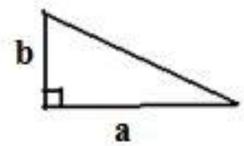


$$S_{\text{треугольника}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

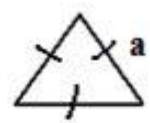


Формула Герона

$$S_{\text{прямоугольного треугольника}} = \frac{1}{2}ab$$



$$S_{\text{равностороннего треугольника}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



$$S_{\text{треугольника}} = \frac{abc}{4R}$$

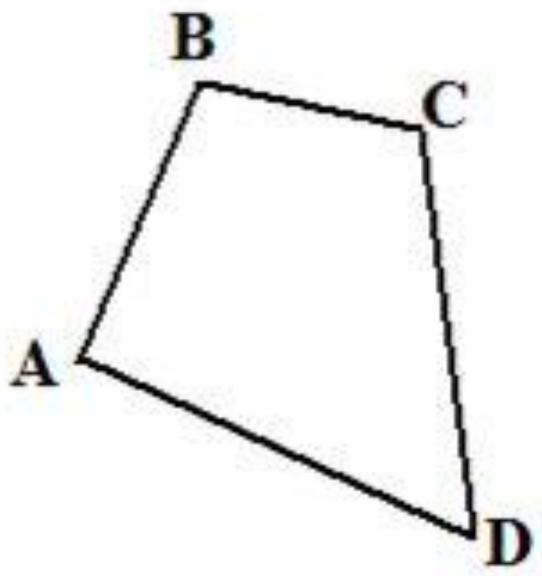
(через R - радиус описанной окружности)

$$S_{\text{треугольника}} = \frac{1}{2}Pr$$

(через r - радиус вписанной окружности)

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬН
ИКИ

Сумма углов выпуклого четырехугольника

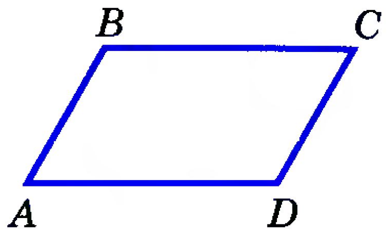


$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$$

Параллелограмм

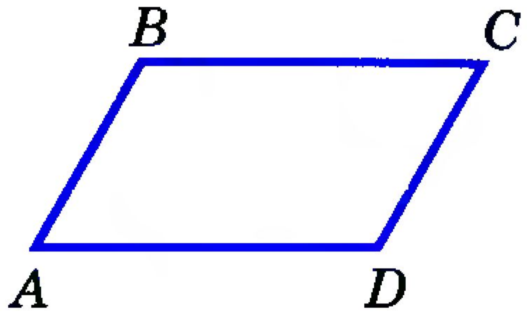
Определение

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.



Свойства параллелограмма:

1. В параллелограмме противоположные стороны равны.
2. В параллелограмме противоположные углы равны.
3. В параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам.
4. Сумма двух углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°.
5. Биссектриса угла параллелограмма отсекает равнобедренный треугольник.
6. Биссектрисы двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, взаимно перпендикулярны.
7. Биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны или совпадают.
8. В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон.



Признаки параллелограмма

1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны ($AB = DC$, $AB \parallel CD$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны ($AB = DC$, $AD = DC$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

3. Если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны ($\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

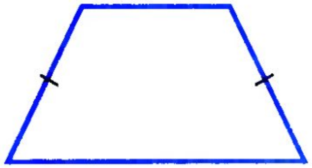
4. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник — параллелограмм.

Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются ее **основаниями**, а две другие стороны — **боковыми сторонами** (рис. 161).

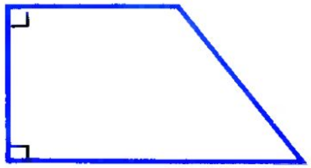
Трапеция называется **равнобедренной**, если ее боковые стороны равны (рис. 162, *а*). Трапеция, один из углов которой прямой, называется **прямоугольной** (рис. 162, *б*).

Рис. 161



Равнобедренная трапеция

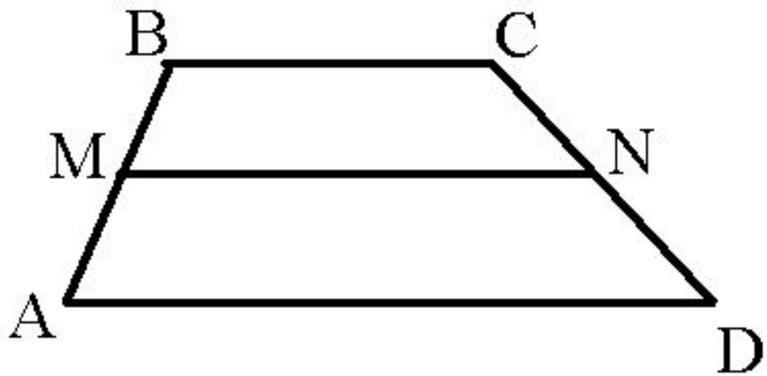
а)



Прямоугольная трапеция

б)

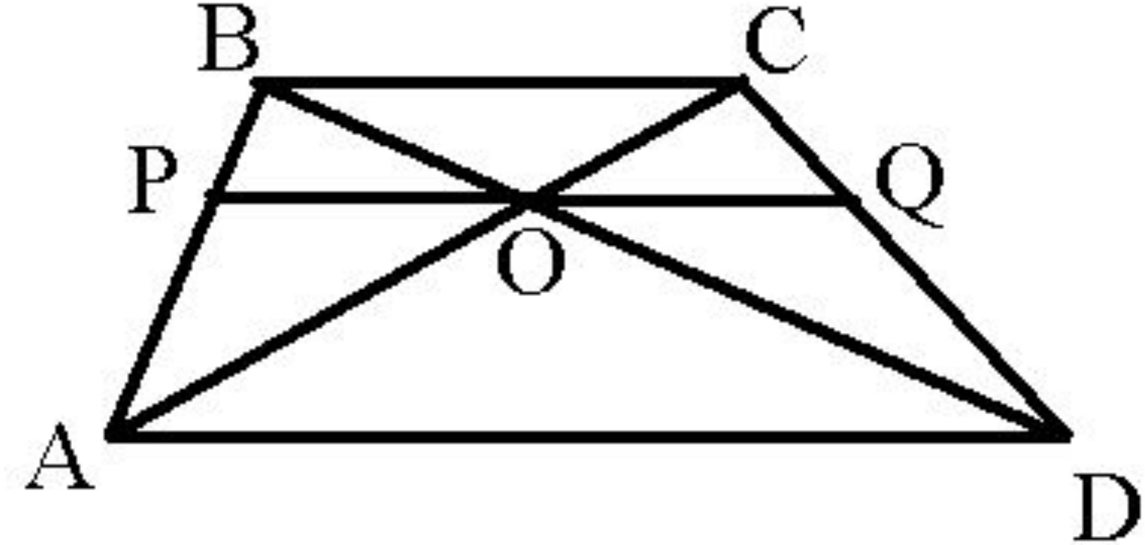
Рис. 162



MN – средняя линия трапеции

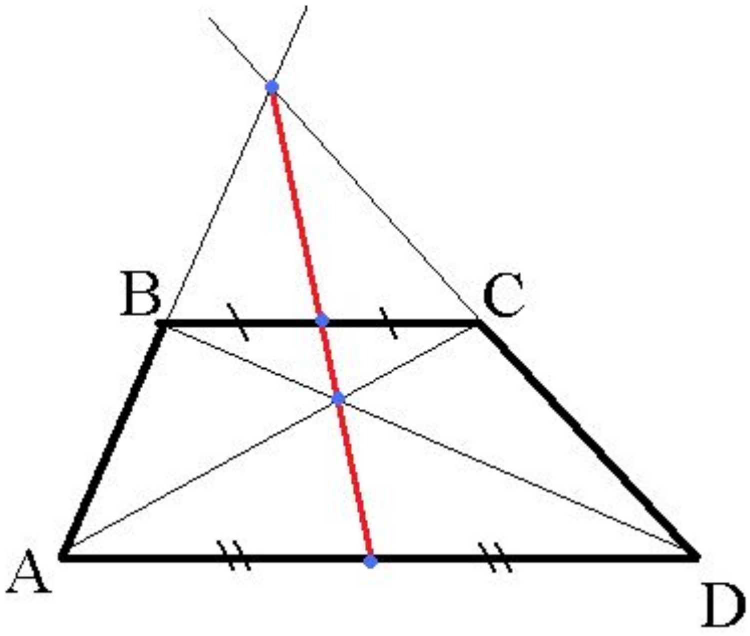
MN||BC||AD

$$MN = \frac{BC + AD}{2}$$



Отрезок PQ, параллельный основаниям трапеции и проходящий через точку пересечения диагоналей, есть среднее гармоническое оснований трапеции.

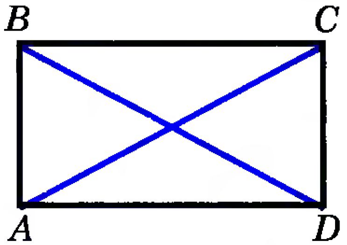
$$PQ = \frac{2 \cdot BC \cdot AD}{BC + AD}$$



В трапеции точка пересечения продолжений боковых сторон, точка пересечения диагоналей и середины оснований лежат на одной прямой.

Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые



Диагонали прямоугольника равны.

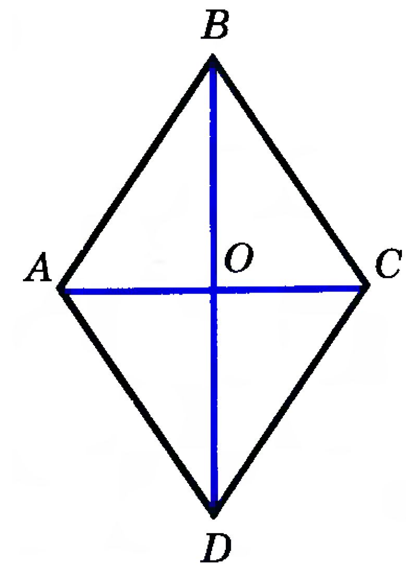
Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма.

Ромб

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

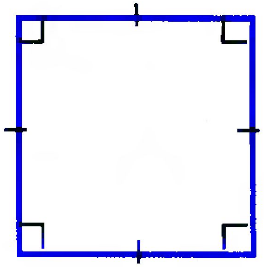


Квадрат

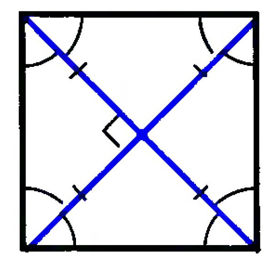
Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

1. Все углы квадрата прямые

2. Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам



а)



б)

Свойства квадрата

1. Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных углов была равна 180° (рис. 62).

$$\alpha + \beta = 180°.$$

2. Для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны (рис. 63).

$$a + c = b + d.$$

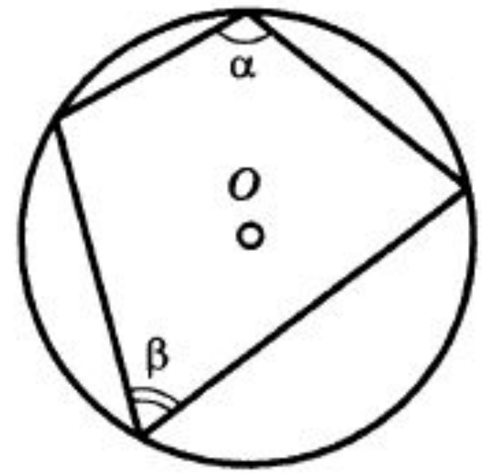


Рис. 62

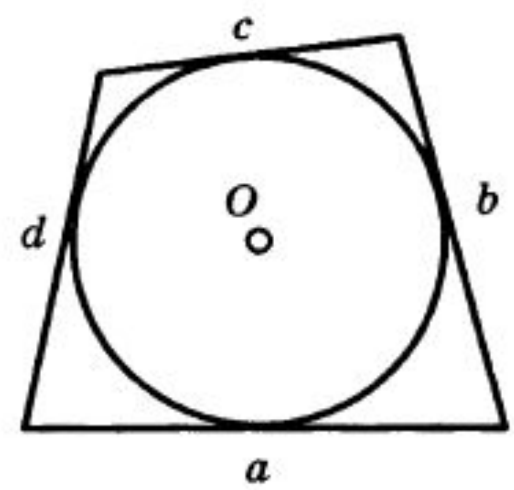
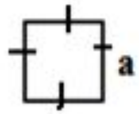


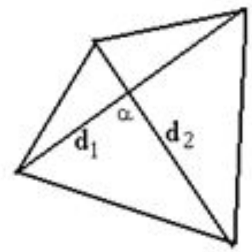
Рис. 63

Формулы площадей

$$S_{\text{квадрата}} = a^2$$

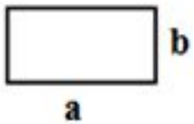


$$S_{\text{квадрата}} = \frac{1}{2} d^2$$

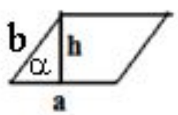


$$S_{\text{4-хугольника}} = d_1 d_2 \cdot \sin\alpha$$

$$S_{\text{прямоугольника}} = ab$$



$$S_{\text{параллелограмма}} = ah$$



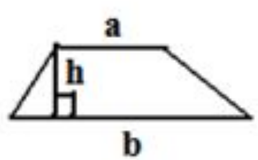
$$S_{\text{параллелограмма}} = ab \cdot \sin\alpha$$

$$S_{\text{ромба}} = ah$$

$$S_{\text{ромба}} = a^2 \sin\alpha$$

$$S_{\text{ромба}} = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

$$S_{\text{трапеции}} = \frac{(a+b)h}{2}$$



ОКРУЖНОСТЬ

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки (центра) (рис. 58).

Отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности, называется **радиусом**.

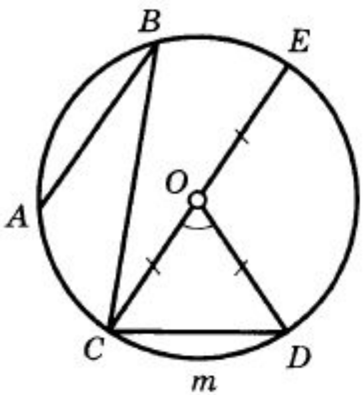


Рис. 58

Обозначение: r или R.

На рисунке $OC = OE = OD = R$.

Часть окружности (например, CmD) называется **дугой**.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**, а хорда, проходящая через центр, — **диаметром**.

AB, BC, CD и CE — хорды окружности. CE — наибольшая из хорд — диаметр.

Обозначение: d или D.

$$D = 2R.$$

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом**.

Часть круга, ограниченная дугой (CmD) и стягивающей ее хордой (CD), называется **сегментом**.

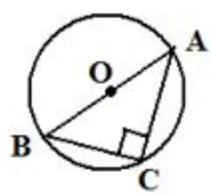
Часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой, называется **сектором**.

Угол, образованный двумя радиусами, называется **центральным** ($\angle COD$ на рис. 58).

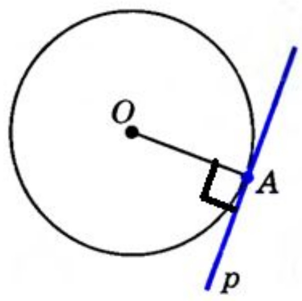
Угол, у которого вершина лежит на окружности, а стороны являются хордами, называется **вписанным** (например, $\angle ABC$).

Расстояние от центра до хорды – это отрезок соединяющий центр окружности с серединой хорды

Если треугольник вписан в окружность и его сторона проходит через центр,



то треугольник прямоугольный

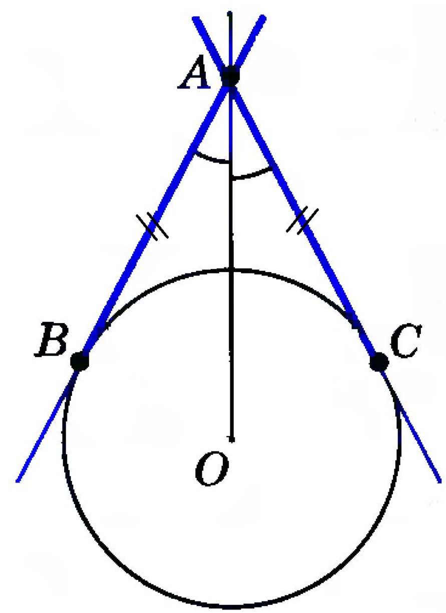


Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности.

Теорема

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.



Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается (рис. 64).

$$\angle AOB = \cup AmB.$$

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рис. 65).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AmC.$$

Угол между хордой и касательной измеряется половиной дуги, заключенной внутри него (рис. 66).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC.$$

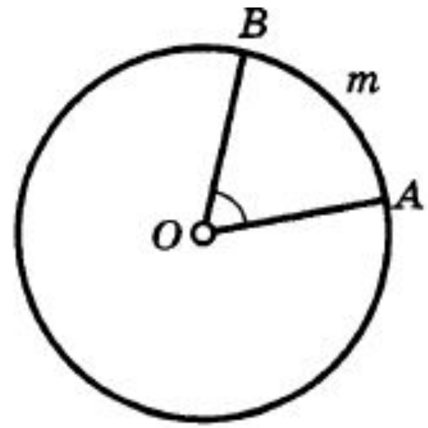


Рис. 64

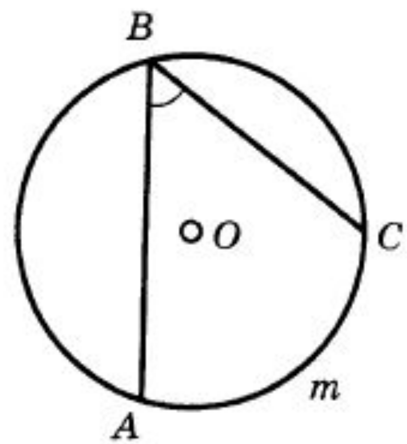


Рис. 65

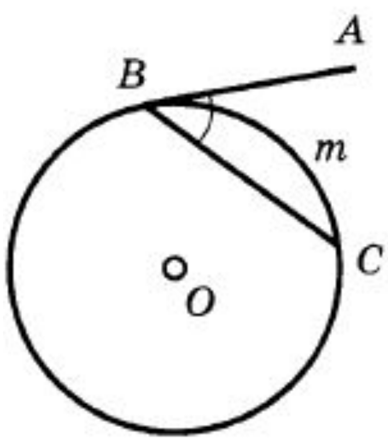


Рис. 66

Угол между двумя касательными измеряется полуразностью дуг (рис. 67).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup AnC).$$

Угол между двумя хордами измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается (рис. 68).

$$\angle AEC = \frac{1}{2}(\cup AmC + \cup BnD).$$

Угол между секущими измеряется полуразностью дуг между ними (рис. 69).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup EnD).$$

Угол между касательной и секущей измеряется полуразностью отсекаемых ими дуг, прилежащих к касательной (рис. 70).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup CnD).$$

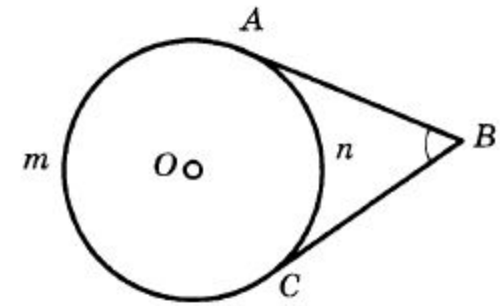


Рис. 67

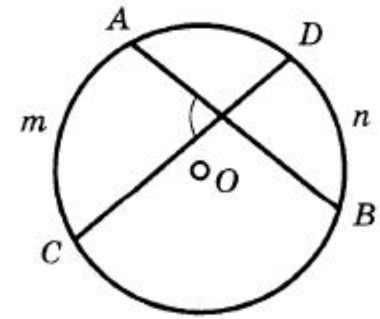


Рис. 68

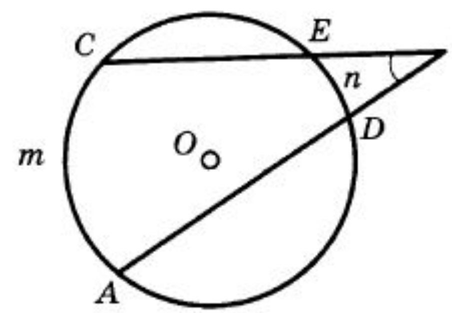


Рис. 69

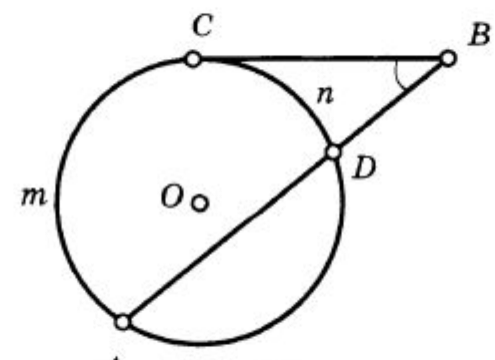
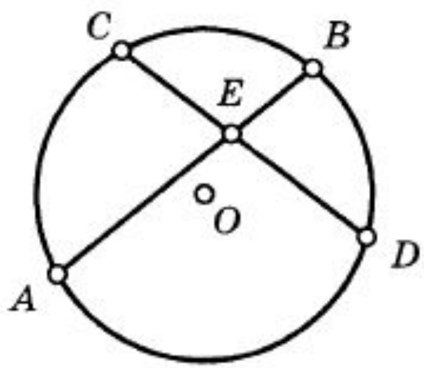
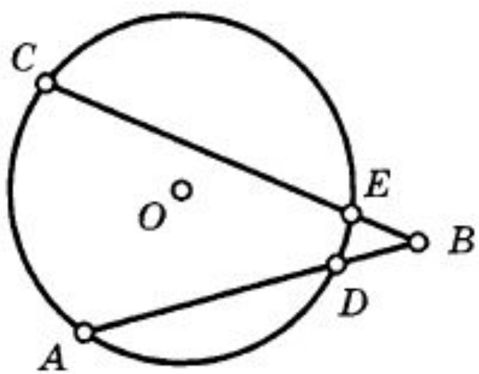
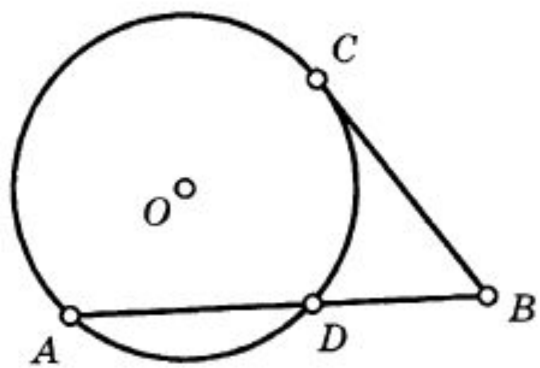


Рис. 70



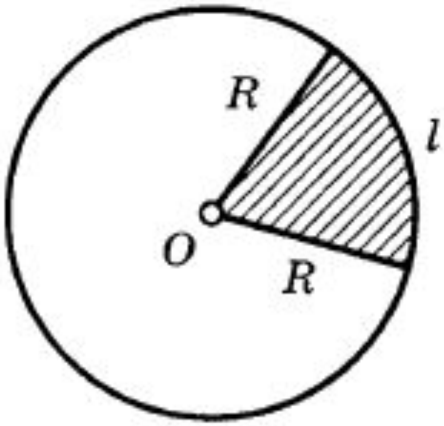
$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$





$$DB \cdot AB = EB \cdot CB$$

$$AB \cdot DB = BC^2$$



$$C = 2\pi R$$ длина окружности;

$$l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$$ длина дуги окружности;

$$S_{\text{кр}} = \pi R^2$$ площадь круга;

$$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 n}{360}$$ площадь сектора.

$$\pi = \frac{C}{D} \approx 3{,}14$$

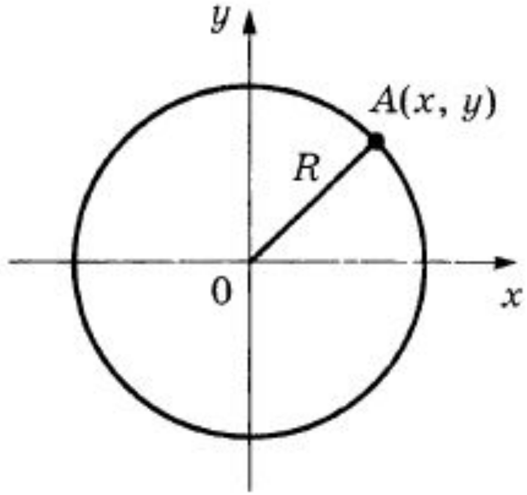


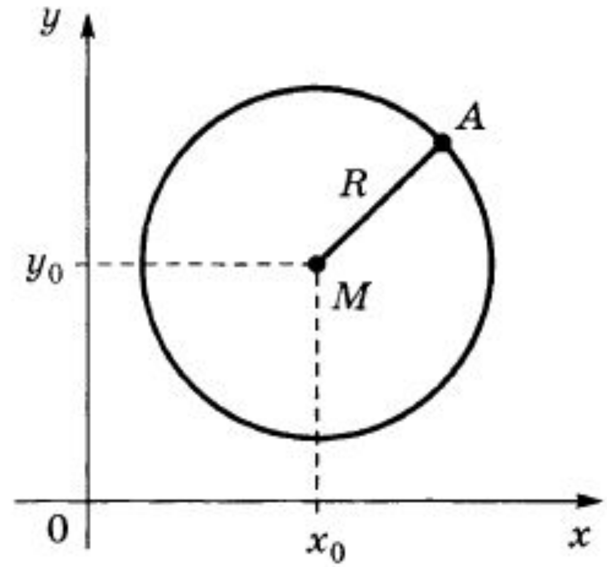
Рис. 81

Если центром окружности является начало координат (рис. 81), то уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Если центр окружности $M(x_0; y_0)$, то уравнение окружности имеет вид (рис. 82)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$



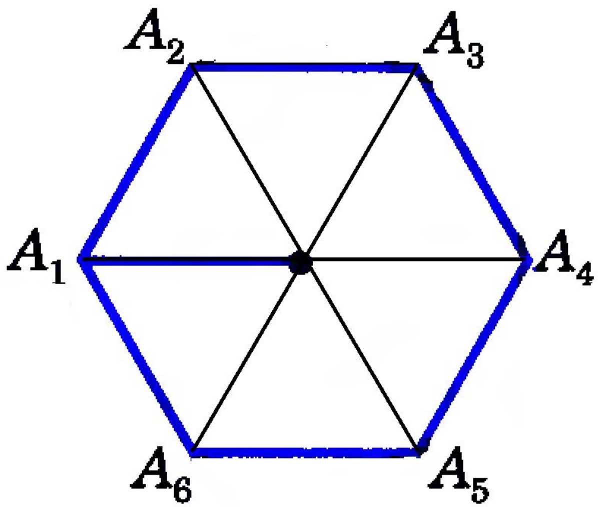
ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

Формула для вычисления угла правильного n-угольника

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$$

Правильный шестиугольник



1. Диагонали правильного шестиугольника делят его на 6 равных равносторонних треугольника.
2. Сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной окружности.
3. Углы правильного шестиугольника равны 120°.
4. Формула площади правильного шестиугольника получается из формулы площади правильного треугольника:

$$S_6 = \frac{6 \cdot a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Теорема

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Теорема

В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n},$$

$$r = R\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Следствие 1

Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

Следствие 2

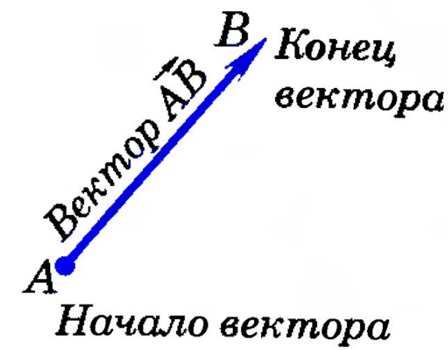
Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

Эта точка называется **центром правильного многоугольника.**

ВЕКТОРЫ

Определение

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом, называется **направленным отрезком** или **вектором.**



Если ненулевые векторы лежат на одной прямой или параллельных прямых, то они называются *коллинеарными* (рис. 76).

Коллинеарные векторы:

$\vec{a}$, $\vec{m}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Неколлинеарные векторы:

$\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{KP}$ и $\overrightarrow{ST}$.

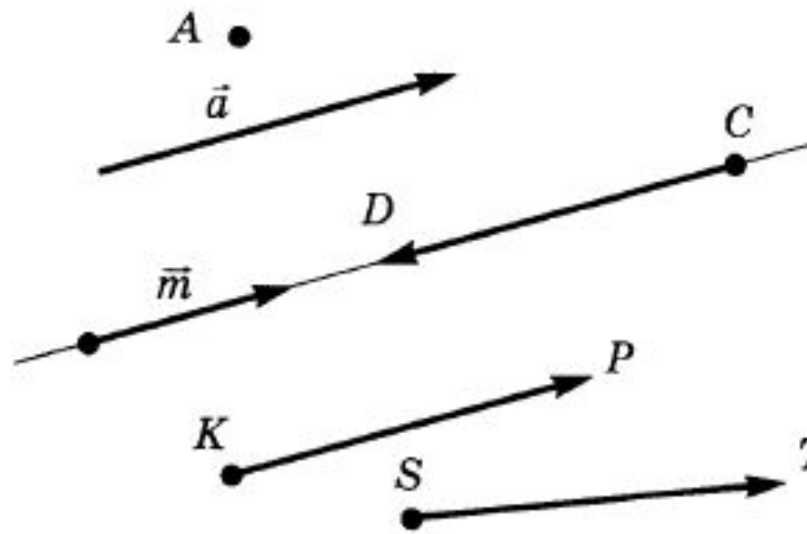


Рис. 76

Коллинеарные векторы называются *сонаправленными*, если они имеют одинаковые направления.

Например, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{m}$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KP}$, $\vec{m} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KP}$.

Коллинеарные векторы называются *противоположно направленными*, если они имеют разные направления.

Например, $\vec{a}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\vec{m}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{KP}$.

Векторы называются *равными*, если они сонаправлены и их длины равны.

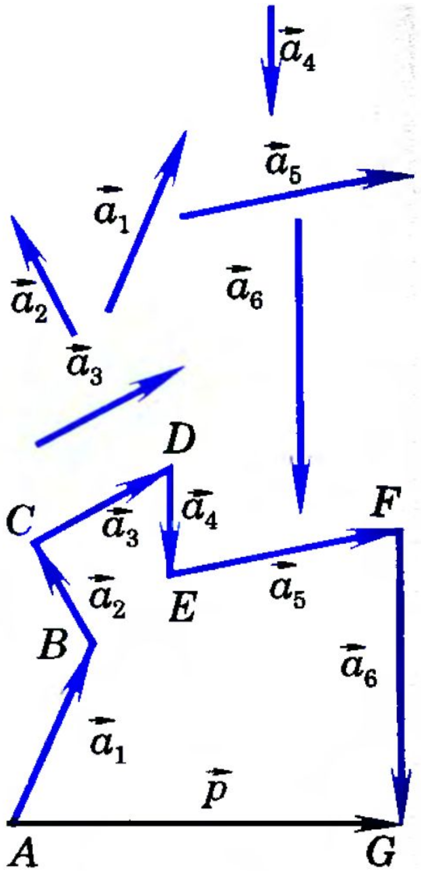
Пусть $A(x_1; y_1)$ — начало вектора $\vec{a}$, $B(x_2; y_2)$ — конец вектора $\vec{a}$ (рис. 75).

Координатами вектора $\vec{a}$ называют числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ и обозначают $\vec{a}(a_1; a_2)$.

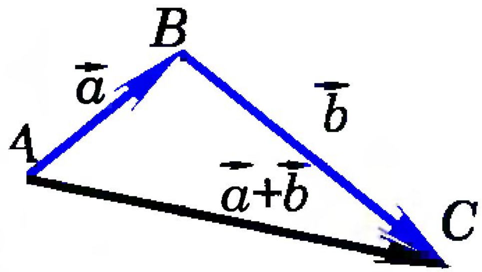
Длина вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ вычисляется по формуле

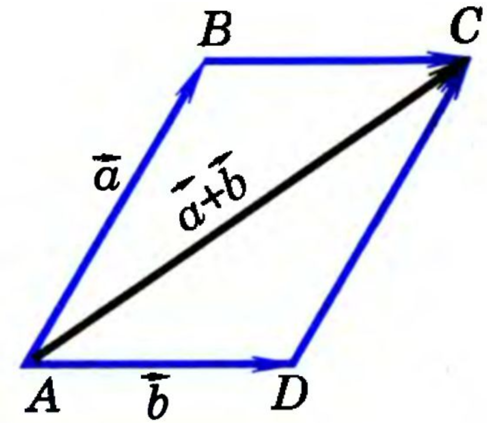
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

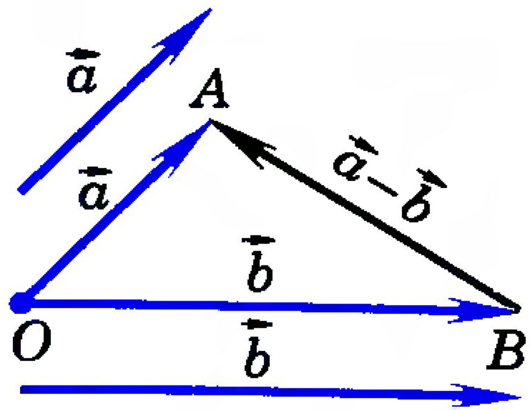
Действия с векторами

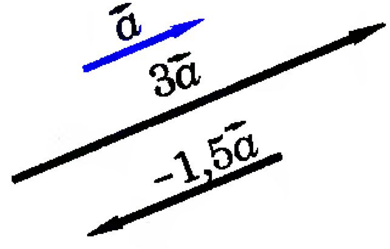


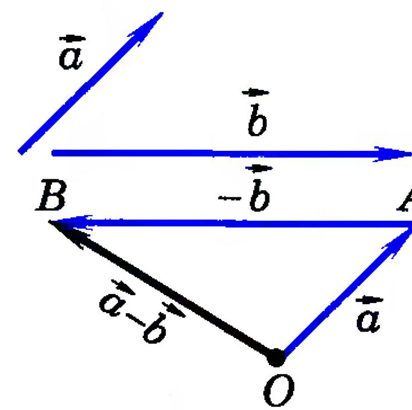
$\vec{p} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 + \vec{a}_6$











Лемма

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Теорема

На плоскости любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

1^0. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

2^0. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

3^0. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин (модулей) на косинус угла между ними (рис. 80).

$\vec{a} \cdot \vec{б} = |\vec{a}| \cdot |\vec{б}| \cdot \cos\alpha$.

1) Если $\vec{a} \perp \vec{б}$, то $\alpha = 90^\circ$, $\cos\alpha = 0$, тогда $\vec{a} \cdot \vec{б} = 0$.

Верно и обратное: если $\vec{a} \cdot \vec{б} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{б}$.

2) Если $\alpha < 90^\circ$, то $\vec{a} \cdot \vec{б} > 0$; если $\alpha > 90^\circ$, то $\vec{a} \cdot \vec{б} < 0$.

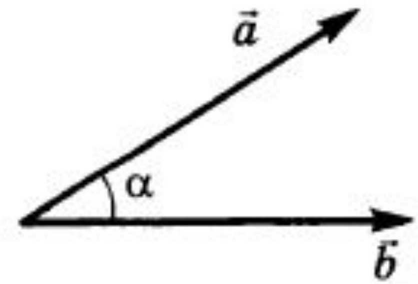


Рис. 80

Если $\vec{a}\{x_1; y_1\}$, $\vec{б}\{x_2; y_2\}$, то $\vec{a} \cdot \vec{б} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Следствие 1. $\vec{a} \perp \vec{б}$ тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Следствие 2. $\cos\alpha = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$, где α — угол между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1; y_1\}$, $\vec{б}\{x_2; y_2\}$.