

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА  
кафедра «Динамика, прочность и износостойкость транспортных средств»

## МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

*Лектор: д.т.н., профессор Сосновский Леонид Адамович*

*п.з.: к.т.н., доцент Комиссаров Виктор Владимирович*

*Форма контроля знаний – экзамен*

*(по всем вопросам обращаться на кафедру ауд. 1403, 1415а)*

*ГОМЕЛЬ, 2015*



## Лекция 25

# УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ. УДАР



## 25.1 Понятие об устойчивости

3

Даже если предприняты все меры, чтобы сила действовала строго вдоль оси стержня, сжатие сопровождается изгибом, который сначала незначителен. При увеличении силы изгиб резко возрастает, и именно он приводит к разрушению или недопустимо большим деформациям.

Изгиб, который вызван продольной нагрузкой, называется *продольным*.

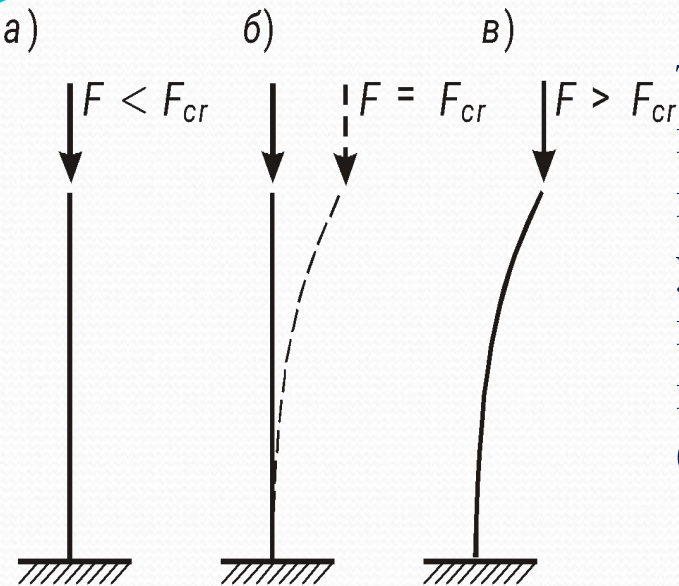
Устойчивость положения системы определяется ее реакцией на малые возмущения (приращения нагрузки). Положение равновесия системы *устойчиво*, если любые малые возмущения вызывают малые отклонения системы от этого ее положения.

В противном случае указанная форма равновесия является *неустойчивой*.

Переход системы из устойчивого состояния в неустойчивое называют *потерей устойчивости*, а границу этого перехода – *критическим состоянием* системы. Все параметры при этом называются *критическими*.



## 25.1 Понятие об устойчивости



Новая, криволинейная форма равновесия теоретически устойчива при нагрузке, превышающей критическую (рис. в). Однако такое состояние неприемлемо практически, так как стержень работает уже не на сжатие, а на сжатие с изгибом. Даже при незначительном превышении нагрузкой критического значения возникают недопустимо большие прогибы и напряжения.

Следовательно, **критическое состояние необходимо рассматривать как предельное состояние.**

**Критической силой  $F_{cr}$**  называется *наибольшее* значение продольной сжимающей силы  $F$ , до которого сохраняется устойчивость первоначальной формы равновесия (или *наименьшее* значение продольной сжимающей силы, при которой происходит потеря устойчивости).

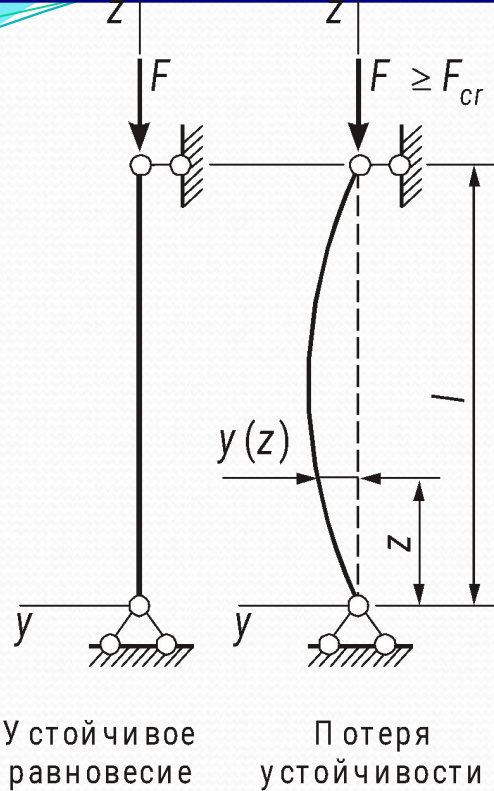
Для *упругих стержней* критическая сила от характера возмущения не зависит. Если *стержень пластический*, то может иметь место зависимость критической силы от характера возмущения.

Первые систематические исследования по устойчивости равновесия гибких стержней при сжатии проводил П. Мусшенброк из Лейдена (Голландия) (1729). Первые теоретические работы принадлежат Л. Эйлеру. (1744 по 1780 гг.)



## 25.2 Задача Эйлера

5



Определим значение критической силы стержня с шарнирно закрепленными концами. При расчетах считаем перемещения малыми, напряжения – не превышающими предел пропорциональности.

При малых прогибах справедливо дифференциальное уравнение упругой линии балки

$$EJy'' = M \quad (1)$$

Продольный изгиб стержня происходит в плоскости минимальной жесткости, и поэтому под величиной  $J$  в дальнейшем понимается *минимальный* момент инерции сечения.

Изгибающий момент  $M$  по абсолютной величине равен  $Fy$ .

В результате из (3) получаем *дифференциальное уравнение равновесия стержня при продольном изгибе*

$$EJy'' = -Fy \quad (2)$$

Обозначим

$$\frac{F}{EJ} = k^2 \quad (3)$$



## 25.2 Задача Эйлера

6

Уравнение (2) приводим к каноническому виду

$$y'' + k^2 y = 0 \quad (4)$$

Его решение известно:

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz \quad (5)$$

Постоянные интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$  определяются из граничных условий (условий закрепления концов стержня). В рассматриваемом случае прогибы на опорах отсутствуют, поэтому

$$y = 0 \text{ при } z = 0; \quad y = 0 \text{ при } z = l.$$

Подставив первое из этих условий в решение (5), получим

$$0 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0; \quad C_2 = 0.$$

Из второго условия следует

$$C_1 \sin kl = 0 \quad (6)$$

Это уравнение имеет два решения:

$$C_1 = 0; \quad \sin kl = 0.$$

В первом случае  $C_1 = C_2 = 0$ , и из уравнения (5) следует, что прогиб  $y$  тождественно обращается в нуль. Следовательно, стержень имеет прямолинейную форму, т. е. отсутствует явление потери устойчивости, которое мы хотели бы исследовать.



## 25.2 Задача Эйлера

7

Во втором случае синус обращается в ноль, если

$$kl = \pi n,$$

где  $n$  – произвольное целое число.

Подставив сюда выражение для  $k$  (3), получаем значения силы  $F$ , при которых возможна потеря устойчивости:

$$\sqrt{\frac{F}{EJ}}l = \pi n; \quad F = \frac{\pi^2 n^2 EJ}{l^2}$$

Наименьшее значение осевой сжимающей силы, при которой стержень теряет способность сохранять первоначальную прямолинейную форму равновесия, называется *критической силой*. Ее значение достигается при  $n = 1$ :

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad (7)$$

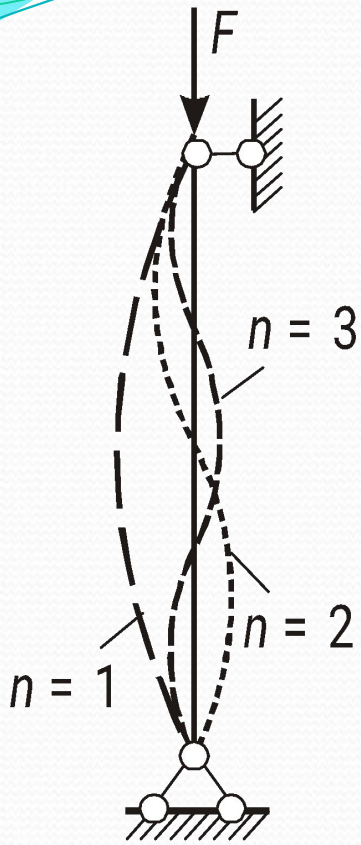
Формула подобного вида впервые выведена **Л. Эйлером** и носит его имя. В этом случае  $kl = \pi$ , и уравнение упругой линии (7) принимает вид

$$y = C_1 \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Следовательно, стержень изгибается по *полуволне синусоиды* с максимальным прогибом  $C_1$ . При другом целочисленном значении  $n$  получаем прогиб

$$y = C_1 \sin \frac{\pi n z}{l}, \quad \text{и упругая линия стержня изображается кривой в виде } n \text{ полуволн.}$$

## 25.2 Задача Эйлера



Таким образом, у сжатого стержня существуют более высокие формы равновесия ( $n = 2, 3, \dots, m$ ), которым соответствуют большие значения сил. Эти формы в чистом виде не реализуются, так как *неустойчивы*. Но если перейти к другой системе, подкрепив стержень шарнирными опорами в точках перегиба синусоиды, то сила  $F$  будет в  $4, 9, \dots, m^2$  раз превышать критическое значение.

*Замечание 1.* Константа  $C_1$  в выражении для упругой линии осталась неопределенной, т. е. прогиб получен с точностью до постоянного множителя.

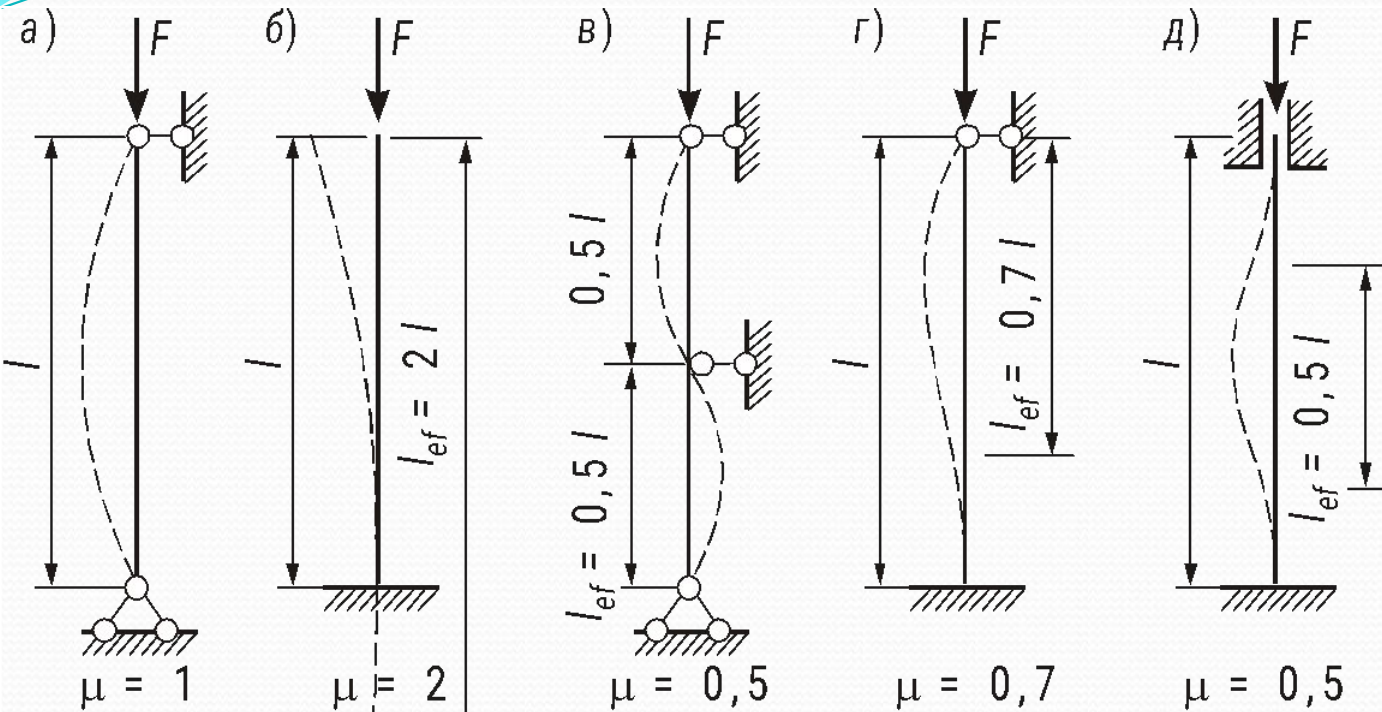
*Замечание 2.* Формально увеличение силы сверх критического значения приводит к тривиальному решению. Действительно, в этом случае  $kl \neq \pi$ , и из уравнения (6) вытекает, что  $C_1 = C_2 = 0$ , поскольку  $\sin kl \neq 0$ . Это означает, что прогиб согласно выражению (5) равен нулю, и стержень остается прямым. Получается,

что при  $F = F_{cr}$  стержень теряет устойчивость и принимает криволинейную форму, а при значении  $F$ , несколько большем  $F_{cr}$ , снова становится прямым. Подобное не вяжется с представлениями о механике изгиба стержня. Возникающий парадокс является следствием использования приближенного линеаризованного уравнения упругой линии балки (1). Для получения более достоверных результатов нужно применять *точное дифференциальное уравнение* упругих гибких стержней.





## 25.3 Зависимость критической силы от условий закрепления стержня



$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(l/2)^2}$$

Соответствующие значения критической силы объединяет формула

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} \quad (8)$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}$$

## 25.4 Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности

10

### ПРИМЕНИМОСТЬ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Критическими напряжениями назовем напряжения, возникающие в стержне при потере устойчивости:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} \quad (9)$$

(7) → (9)

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E i^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (10)$$

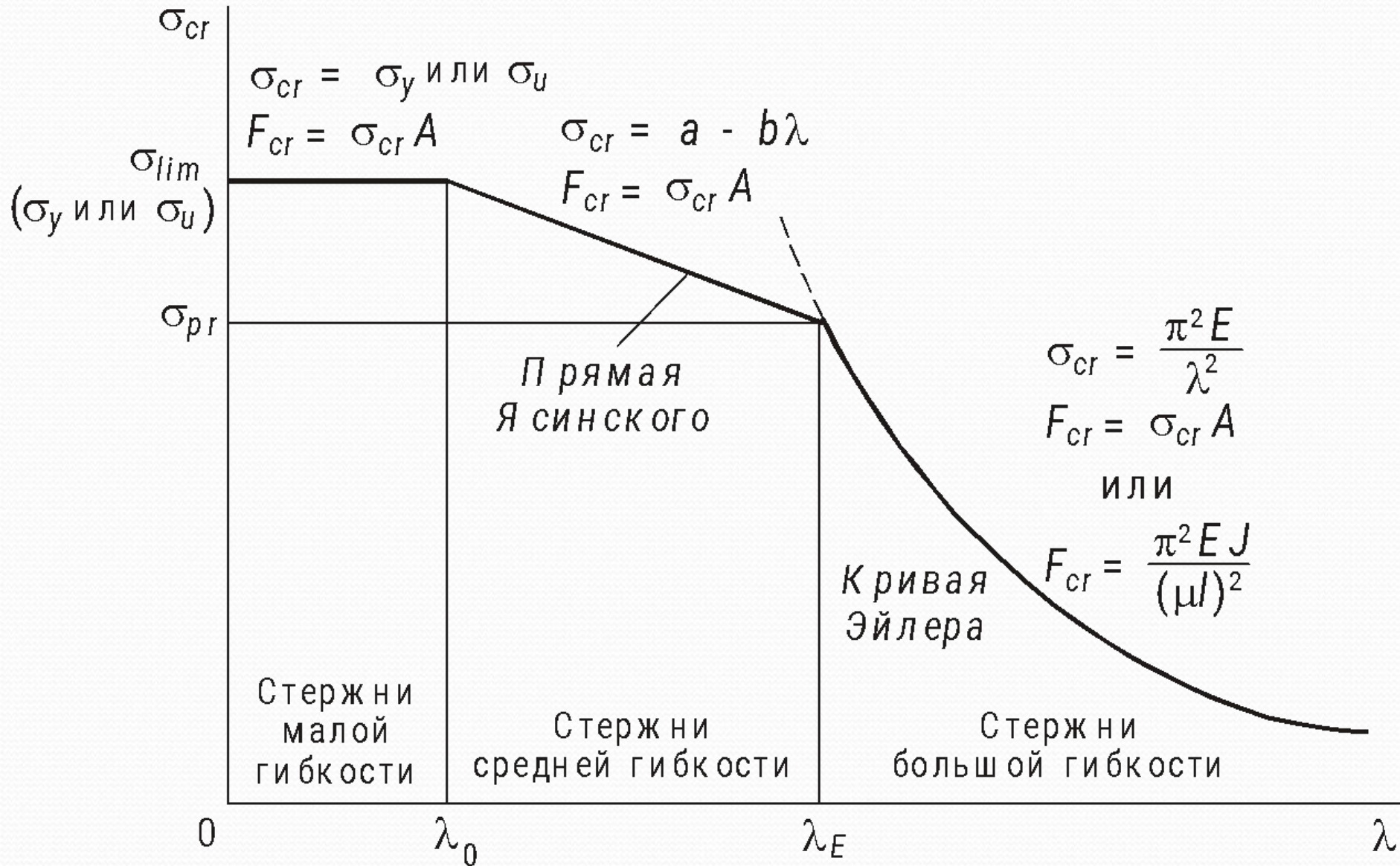
$\lambda$  – гибкость стержня – безразмерная геометрическая характеристика, определяемая способом закрепления его концов, длиной, а также формой и размерами поперечного сечения:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} \quad (11)$$

$i$  – минимальный радиус инерции поперечного сечения.

Функциональная зависимость (10) представляет собой *видоизмененную формулу Эйлера* и графически изображается *гиперболой* (см. рисунок).

# 25.4 Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности





## 25.4 Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности

12

Формула Эйлера справедлива только при постоянном модуле Юнга  $E$  и напряжениях, не превышающих предел пропорциональности:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{pr}$$

Отсюда следует *ограничение на гибкость* стержня:

$$\lambda \geq \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{pr}} = \lambda_E \quad (12)$$

Правая часть неравенства (14) представляет собой *предельную гибкость*  $\lambda_E$  – наименьшее значение гибкости стержня, при которой применима формула Эйлера. Она зависит только от физико-механических свойств материала стержня – его модуля Юнга и предела пропорциональности. Например, для стали Ст3:

$E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\sigma_{pr} = 200$  МПа и, следовательно,

$$\lambda_E = \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{pr}} = 100$$

Для дерева  $\lambda_E = 110$ , для чугуна  $\lambda_E = 80$ .

Таким образом, *формула Эйлера применима к упругим стержням большой гибкости*, у которых  $\lambda \geq \lambda_E$ .

## 25.4 Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности

13

### ФОРМУЛА ЯСИНСКОГО

Практика показывает, что критические силы и критические напряжения для стержней, гибкость которых ниже предельной ( $\lambda < \lambda_E$ ), значительно меньше величин, вычисляемых по формуле Эйлера. Для таких стержней критические напряжения следует определять по эмпирической формуле, предложенной Ясинским:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda \quad (13)$$

$a$ ,  $b$  – получаемые экспериментально коэффициенты, зависящие от свойств материала; например, для сталей Ст2, Ст3  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа.

Для малоуглеродистой стали  $\lambda_0 = 40$ .

Следовательно, формула Ясинского справедлива для стержней средней гибкости, у которых  $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_E$ .

Для стержней малой гибкости  $\lambda < \lambda_0$  критические напряжения  $\sigma_{cr}$  принимаются равными  $\sigma_y$  (пластичные материалы) или  $\sigma_u$  (хрупкие материалы) (см. рис.).

**Критическую силу** получим, умножая значение критического напряжения на площадь поперечного сечения брутто:

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A$$



## 25.5 Практический метод расчета стержней на устойчивость

14

Несущая способность сжатого стержня может быть исчерпана по двум причинам:

из-за *потери прочности*, если в стержне из пластичного материала не выполняется условие  $\sigma \leq \sigma_y$ , а в стержне из хрупкого материала – условие  $\sigma \leq \sigma_u$ ;

из-за *потери устойчивости*, если в стержне из любого материала не выполняется условие  $\sigma \leq \sigma_{cr}$ .

Введем обозначение

$$\varphi = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{lim}}; \quad \sigma_{lim} = \begin{cases} \sigma_y & \text{(для пластичных материалов);} \\ \sigma_u & \text{(для хрупких материалов)} \end{cases} \quad (14)$$

*Условие устойчивости* можно записать в виде:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi[\sigma] \quad (15)$$

где  $N$  – продольная сила от расчетной сжимающей нагрузки;

$A$  – площадь сечения брутто, если иное не оговорено;

$\varphi$  – *коэффициент продольного изгиба* – коэффициент уменьшения допускаемого напряжения при расчетах на устойчивость (он уменьшает допускаемое напряжение  $[\sigma]$  до значения, которое гарантирует устойчивость прямолинейной формы равновесия).



## 25.5 Практический метод расчета стержней на устойчивость

15

Несущая способность сжатого стержня может быть исчерпана по двум причинам:

- из-за *потери прочности*, если в стержне из пластичного материала не выполняется условие  $\sigma \leq \sigma_y$ , а в стержне из хрупкого материала – условие  $\sigma \leq \sigma_u$ ;
- из-за *потери устойчивости*, если в стержне из любого материала не выполняется условие  $\sigma \leq \sigma_{cr}$ .

Введем обозначение

$$\varphi = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{lim}}; \quad \sigma_{lim} = \begin{cases} \sigma_y & \text{(для пластичных материалов);} \\ \sigma_u & \text{(для хрупких материалов)} \end{cases} \quad (16)$$

Условие устойчивости можно записать в виде:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi[\sigma] \quad (17)$$

где  $N$  – продольная сила от расчетной сжимающей нагрузки;

$A$  – площадь сечения брутто, если иное не оговорено;

$\varphi$  – *коэффициент продольного изгиба* – коэффициент уменьшения допускаемого напряжения при расчетах на устойчивость (он уменьшает допускаемое напряжение  $[\sigma]$  до значения, которое гарантирует устойчивость прямолинейной формы равновесия).



## 25.5 Практический метод расчета стержней на устойчивость

16

Условие устойчивости позволяет производить три вида расчета на устойчивость, идентичные аналогичным расчетам на прочность.

1. *Проверочный расчет* проводится в следующем порядке:

- в зависимости от условий закрепления стержня определяется коэффициент приведения длины  $\mu$  (см. рис.);
- исходя из размеров и формы поперечного сечения определяется наименьший момент инерции  $J = \min(J_x, J_y)$ , площадь  $A$  и вычисляется минимальный радиус инерции и гибкость

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}}; \quad \lambda = \frac{\mu l}{i};$$

- по таблице находится коэффициент  $\varphi$ ;
- вычисляется действительное напряжение  $\sigma = N/A$  и проверяется выполнение условия (14) или (15).





## 25.5 Практический метод расчета стержней на устойчивость



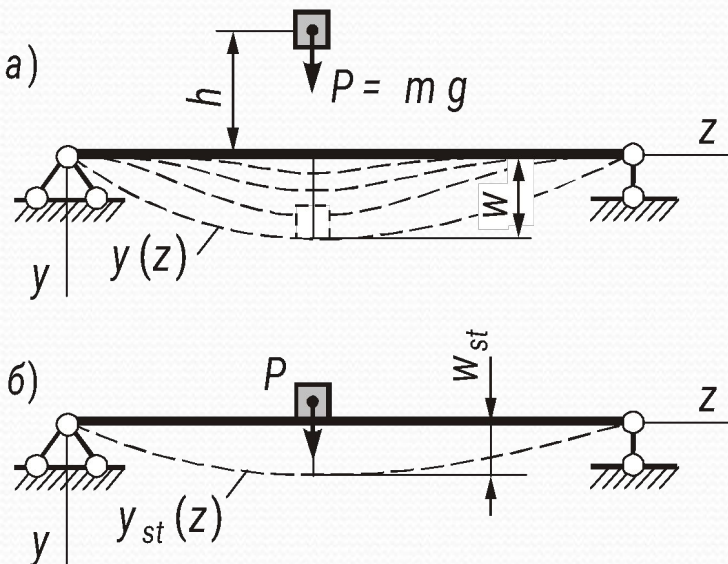
2. *Проектировочный расчет.* При определении размеров поперечного сечения сжатого стержня приходится использовать *метод последовательных приближений*, так как условие устойчивости содержит две неизвестные величины: площадь  $A$  и коэффициент  $\varphi$ , который зависит от гибкости (12), а следовательно, и от геометрических характеристик поперечного сечения.

Общая методика здесь следующая:

- на первом шаге коэффициент  $\varphi$  задается произвольно (обычно  $\varphi = 0,5 \dots 0,6$ ), по нему из условия устойчивости вычисляется площадь  $A$ ;
- по таблицам сортамента подбирается номер прокатного профиля заданного вида (или вычисляются размеры сечения заданного вида), определяются момент инерции  $J$  и радиус  $i$  инерции всего сечения, гибкость стержня  $\lambda$ ;
- по гибкости из таблицы получаем соответствующий коэффициент  $\varphi^*$ ;
  - на каждом последующем шаге приближения в качестве коэффициента продольного изгиба принимается среднее значение между исходным  $\varphi$  и полученным  $\varphi^*$  на предыдущем шаге;
  - процесс останавливается, если разница между  $\varphi$  и  $\varphi^*$  составляет менее 5 % или два раза подряд выпадает один и тот же номер профиля (обычно требуется не более трех-четырёх попыток).

В механике материалов изучается *техническая (приближенная) теория удара*.

Рассмотрим неподвижно закрепленную упругую систему, (балку, рис. а), на которую с высоты  $h$  падает груз весом  $P = mg$  ( $m$  – его масса,  $g$  – ускорение свободного падения). Когда груз соприкасается с системой, происходит удар. От точки удара по балке распространяются возмущения с весьма большими скоростями. Однако за время достижения максимального прогиба балки эти возмущения практически затухают. Поэтому можно пренебречь влиянием соответствующих сил инерции.



Для упрощения расчетов **используются несколько гипотез:**

1. *удар считается абсолютно неупругим:* после соприкосновения с системой груз не отскакивает, а как бы «прилипает» и далее движется вместе с нею;
2. напряжения, возникающие в системе, не превышают предела пропорциональности, т. е. *выполняется закон Гука;*



3. Эпюра перемещений точек системы при ударе подобна эпюре статических перемещений

$$y(z) = k_d y_{st}(z) \quad (18)$$

где  $y(z)$  – эпюра перемещений при ударе;

$k_d$  – динамический коэффициент при ударе, подлежащий определению;

$y_{st}(z)$  – эпюра статических перемещений, т. е. перемещений от той же силы  $P$ , но приложенной статически.

В силу линейности для напряжений будут выполняться соотношения типа (1)

$$\sigma = k_d \sigma_{st} \quad (19)$$

где  $\sigma, \sigma_{st}$  – напряжения от одной и той же нагрузки, приложенной динамически или статически.

**Поперечным** считают удар, направление которого перпендикулярно оси системы. При этом конструкция работает на **динамический изгиб**.

Пусть с высоты  $h$  на балку падает груз весом  $P$ . После соприкосновения с балкой груз движется вместе с ней и достигает нижнего положения при прогибе  $w$ . Он совершает работу, равную  $P(h + w)$ . В момент времени, соответствующий наибольшему прогибу балки, скорость груза равна нулю и, следовательно, вся работа переходит в потенциальную энергию деформации системы  $U$ . Поэтому

$$U = P(h + w). \quad (20)$$



## 25.7 Поперечный удар без учета массы системы

20

Если груз  $P$  прикладывается статически, то балка прогибается на величину  $w_{st}$  (см. рис., б). В соответствии с допущением о подобии эпюр перемещений (18)

$$w = k_d w_{st}$$

Следовательно, такой же по величине прогиб  $w$  можно получить под воздействием статической силы  $S = k_d P$ . При этом потенциальная энергия системы равна работе силы  $S$  на перемещении  $w$ :

$$U = \frac{1}{2} S w = \frac{1}{2} k_d P w. \quad (21)$$

Приравняв соотношения (20) и (21), получим

$$P(h + w) = \frac{1}{2} k_d P w$$

$$2(h + w) = k_d w. \quad (22)$$

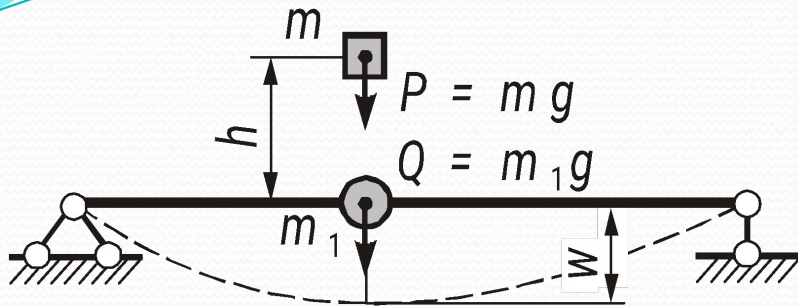
$$k_d^2 - 2k_d - \frac{2h}{w_{st}} = 0$$

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{w_{st}}} \quad (23)$$



## 25.8 Удар по массивной системе

21



$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{w_{st}(1 + Q/P)}} \quad (24)$$

где  $h$  – высота, с которой на балку падает груз весом  $P$ ;

$w_{st}$  – статический прогиб балки под грузом;

$Q$  – вес балки ( $Q = m_1g$ ).

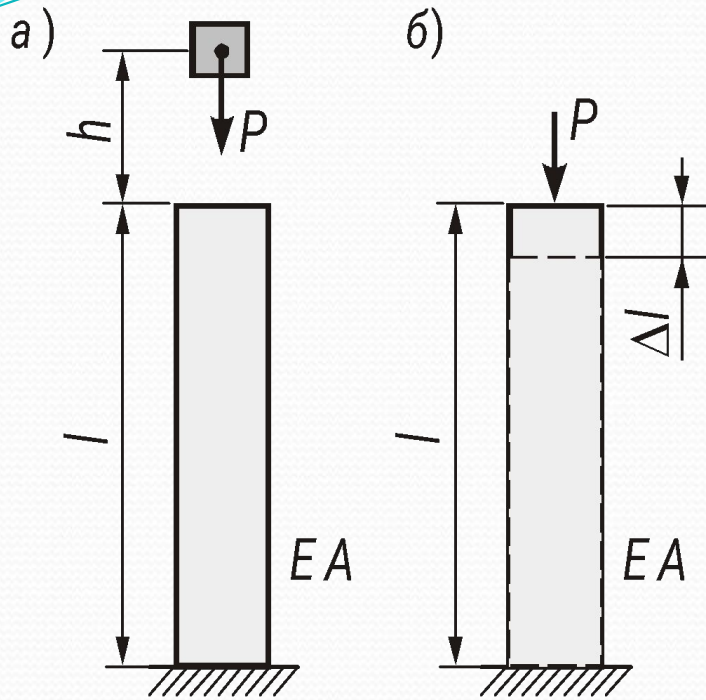
Наибольшие динамические напряжения и перемещения

$$\sigma = k_d \sigma_{st} + \sigma_Q; \quad y = k_d y_{st} + y_Q \quad (25)$$



## 25.9 Продольный удар

22



*Продольным* называется удар, направление которого совпадает с осью системы. При этом конструкция работает на *динамическое сжатие*.

$$w_{st} = \Delta l = Pl/(EA).$$

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hEA}{Pl}} \quad (25)$$

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hEA}{Pl(1 + Q/P)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hEA}{(P + Q)l}} \quad (26)$$