



СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

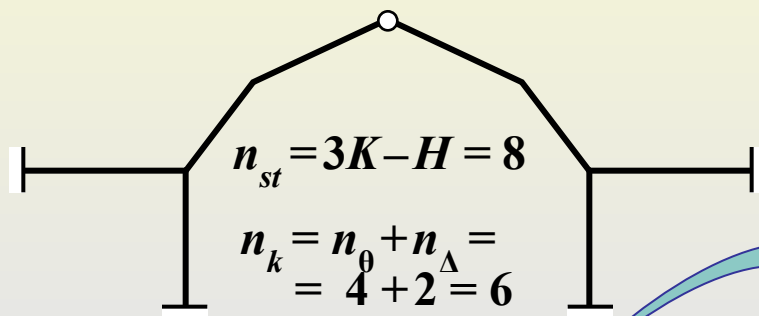
Часть II

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

**Расчёт СНС
смешанным методом**

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ

Смешанный метод – метод расчёта деформируемых систем, в котором за основные неизвестные принимаются одновременно *реакции лишних связей и перемещения расчётных узлов.*

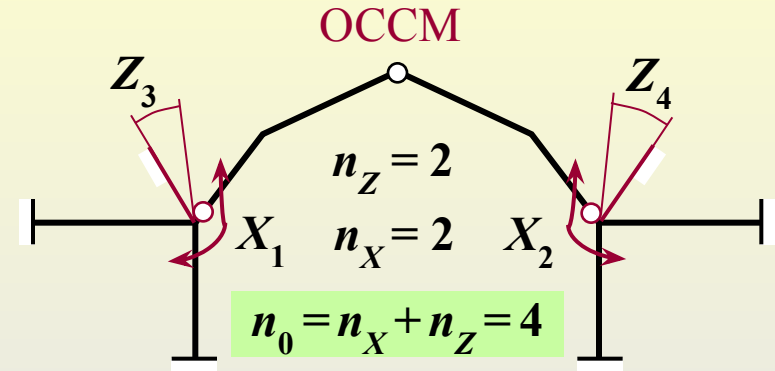
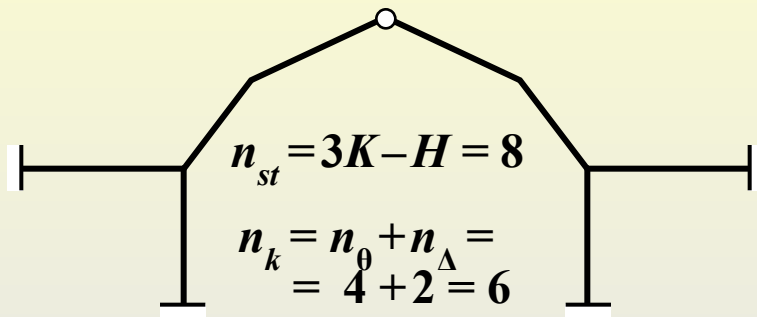


Основная система смешанного метода (ОССМ) – геометрически неизменяемая система, получаемая из рассчитываемой СНС удалением лишних связей, реакции которых принимаются за силовые основные неизвестные X , и введением угловых и линейных связей в расчётные узлы, перемещения которых принимаются за неизвестные Z .

Рекомендуется: лишние связи удалять в тех частях системы, где их число меньше, чем количество неизвестных перемещений узлов; а дополнительные связи вводить в узлы тех частей системы, где суммарное число перемещений узлов меньше числа лишних связей.

Свойство ОССМ: в результате удаления лишних связей в ОССМ образуются *статически определяемые* (как правило) части; а остальные части ОССМ, где введены дополнительные связи – как правило, *кинематически определяемые*.

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ



Условия эквивалентности НДС РСНС и ОССМ:

- 1-я группа – кинематические условия: $\Delta_i = 0, i = 1, \dots, n_X$ (отрицание перемещений по направлениям удалённых лишних связей)
- 2-я группа – статические условия: $R_i = 0, i = n_X + 1, \dots, n_0$ (отрицание реакций введённых связей)

$$\Delta_i = \Delta_{iX} + \Delta_{iZ} + \Delta_{i\Sigma}; \quad \Delta_{iX} = \sum_{k=1}^{n_X} \Delta_{iX_k} = \sum_{k=1}^{n_X} \delta_{ik} X_k; \quad \Delta_{iZ} = \sum_{k=n_X+1}^{n_0} \Delta_{iZ_k} = \sum_{k=n_X+1}^{n_0} \delta'_{ik} Z_k;$$

$$R_i = R_{iX} + R_{iZ} + R_{i\Sigma}; \quad R_{iX} = \sum_{k=1}^{n_X} R_{iX_k} = \sum_{k=1}^{n_X} r'_{ik} X_k; \quad R_{iZ} = \sum_{k=n_X+1}^{n_0} R_{iZ_k} = \sum_{k=n_X+1}^{n_0} r_{ik} Z_k$$

$$\sum_{k=1}^{n_X} \delta_{ik} X_k + \sum_{k=n_X+1}^{n_0} \delta'_{ik} Z_k + \Delta_{i\Sigma} = 0, \quad i = \overline{1, n_X}$$

$$\sum_{k=1}^{n_X} r'_{ik} X_k + \sum_{k=n_X+1}^{n_0} r_{ik} Z_k + R_{i\Sigma} = 0, \quad i = \overline{n_X + 1, n_0}$$

— канонические уравнения смешанного метода (КУСМ)

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ

Система канонических уравнений смешанного метода:

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{l}
 \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n_X}X_{n_X} \\
 \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n_X}X_{n_X} \\
 \dots \\
 \delta_{n_X1}X_1 + \delta_{n_X2}X_2 + \dots + \delta_{n_Xn_X}X_{n_X}
 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l}
 \delta'_{1,n_X+1}Z_{n_X+1} + \delta'_{1,n_X+2}Z_{n_X+2} + \dots + \delta'_{1n_0}Z_{n_0} \\
 \delta'_{2,n_X+1}Z_{n_X+1} + \delta'_{2,n_X+2}Z_{n_X+2} + \dots + \delta'_{2n_0}Z_{n_0} \\
 \dots \\
 \delta'_{n_X,n_X+1}Z_{n_X+1} + \delta'_{n_X,n_X+2}Z_{n_X+2} + \dots + \delta'_{n_Xn_0}Z_{n_0}
 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l}
 \Delta_{1\Sigma} \\
 \Delta_{2\Sigma} \\
 \dots \\
 \Delta_{n_X\Sigma}
 \end{array} \right] = 0, \quad \text{1-я группа уравнений} \\
 \left[\begin{array}{l}
 r'_{n_X+1,1}X_1 + r'_{n_X+1,2}X_2 + \dots + r'_{n_X+1,n_X}X_{n_X} \\
 r'_{n_X+2,1}X_1 + r'_{n_X+2,2}X_2 + \dots + r'_{n_X+2,n_X}X_{n_X} \\
 \dots \\
 r'_{n_01}X_1 + r'_{n_02}X_2 + \dots + r'_{n_0n_X}X_{n_X}
 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l}
 r_{n_X+1,n_X+1}Z_{n_X+1} + r_{n_X+1,n_X+2}Z_{n_X+2} + \dots + r_{n_X+1,n_0}Z_{n_0} \\
 r_{n_X+2,n_X+1}Z_{n_X+1} + r_{n_X+2,n_X+2}Z_{n_X+2} + \dots + r_{n_X+2,n_0}Z_{n_0} \\
 \dots \\
 r_{n_0,n_X+1}Z_{n_X+1} + r_{n_0,n_X+2}Z_{n_X+2} + \dots + r_{n_0n_0}Z_{n_0}
 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l}
 R_{n_X+1,\Sigma} \\
 R_{n_X+2,\Sigma} \\
 \dots \\
 R_{n_0\Sigma}
 \end{array} \right] = 0, \quad \text{2-я группа уравнений}
 \end{array}$$

В матричной форме:

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 \delta_{11} & \delta_{12} & \boxtimes & \delta_{1n_X} & \delta'_{1,n_X+1} & \delta'_{1,n_X+2} & \boxtimes & \delta'_{1n_0} \\
 \delta_{21} & \delta_{22} & \boxtimes & \delta_{2n_X} & \delta'_{2,n_X+1} & \delta'_{2,n_X+2} & \boxtimes & \delta'_{2n_0} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \delta_{n_X1} & \delta_{n_X2} & \boxtimes & \delta_{n_Xn_X} & \delta'_{n_X,n_X+1} & \delta'_{n_X,n_X+2} & \boxtimes & \delta'_{n_Xn_0} \\
 \hline
 r'_{n_X+1,1} & r'_{n_X+1,2} & \boxtimes & r'_{n_X+1,n_X} & r_{n_X+1,n_X+1} & r_{n_X+1,n_X+2} & \boxtimes & r_{n_X+1,n_0} \\
 r'_{n_X+2,1} & r'_{n_X+2,2} & \boxtimes & r'_{n_X+2,n_X} & r_{n_X+2,n_X+1} & r_{n_X+2,n_X+2} & \boxtimes & r_{n_X+2,n_0} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 r'_{n_01} & r'_{n_02} & \boxtimes & r'_{n_0n_X} & r_{n_0,n_X+1} & r_{n_0,n_X+2} & \boxtimes & r_{n_0n_0}
 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_{n_X} \\ Z_{n_X+1} \\ Z_{n_X+2} \\ \dots \\ Z_{n_0} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \Delta_{1\Sigma} \\ \Delta_{2\Sigma} \\ \dots \\ \Delta_{n_X\Sigma} \\ R_{n_X+1,\Sigma} \\ R_{n_X+2,\Sigma} \\ \dots \\ R_{n_0\Sigma} \end{array} \right] = 0
 \end{array}$$

$\underbrace{\quad}_{n_X} \quad \underbrace{\quad}_{n_Z}$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} A_{XZ} & Y & B_\Sigma \\ \delta_{xy} & \delta'_{yz} & X \\ \delta_{XZ} & Y & \Delta_\Sigma \end{array} \right]}_{A_{XZ} * Y + B_\Sigma} = 0$$

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ

Перемещения в ОССМ по направлениям силовых основных неизвестных X

– от единичных сил $X = 1$

$$\delta_{XX} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \boxtimes & \delta_{1n_X} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \boxtimes & \delta_{2n_X} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \delta_{n_X 1} & \delta_{n_X 2} & \boxtimes & \delta_{n_X n_X} \end{bmatrix}$$

$\delta_{ii} > 0$
 $\delta_{ik} = \delta_{ki}$
 Вычисление δ_{ik} – методом Максвелла – Мора

– от единичных перемещений $Z = 1$

$$\delta'_{XZ} = \begin{bmatrix} \delta'_{1,n_X+1} & \delta'_{1,n_X+2} & \boxtimes & \delta'_{1,n_0} \\ \delta'_{2,n_X+1} & \delta'_{2,n_X+2} & \boxtimes & \delta'_{2,n_0} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \delta'_{n_X,n_X+1} & \delta'_{n_X,n_X+2} & \boxtimes & \delta'_{n_X,n_0} \end{bmatrix}$$

$\delta'_{ik} = -r'_{ki}$
 $\delta'_{XZ} = -(r'_{ZX})^T$
 Вычисление δ'_{ik} – только через $-r'_{ki}$

Реакции введенных связей в расчётных узлах ОССМ

– от единичных сил $X = 1$

$$r'_{ZX} = \begin{bmatrix} r'_{n_X+1,1} & r'_{n_X+1,2} & \boxtimes & r'_{n_X+1,n_X} \\ r'_{n_X+2,1} & r'_{n_X+2,2} & \boxtimes & r'_{n_X+2,n_X} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ r'_{n_0,1} & r'_{n_0,2} & \boxtimes & r'_{n_0,n_X} \end{bmatrix}$$

$r'_{ik} = -\delta'_{ki}$
 $r'_{ZX} = -(\delta'_{XZ})^T$
 Вычисление r'_{ik} – статическим или кинематическим способами

– от единичных перемещений $Z = 1$

$$r_{ZZ} = \begin{bmatrix} r_{n_X+1,n_X+1} & r_{n_X+1,n_X+2} & \boxtimes & r_{n_X+1,n_0} \\ r_{n_X+2,n_X+1} & r_{n_X+2,n_X+2} & \boxtimes & r_{n_X+2,n_0} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ r_{n_0,n_X+1} & r_{n_0,n_X+2} & \boxtimes & r_{n_0,n_0} \end{bmatrix}$$

$r_{ii} > 0$
 $r_{ik} = r_{ki}$
 Вычисление r_{ik} – статическим или кинематическим способами

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \boxtimes & \delta_{1n_X} & \delta'_{1,n_X+1} & \delta'_{1,n_X+2} & \boxtimes & \delta'_{1,n_0} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \boxtimes & \delta_{2n_X} & \delta'_{2,n_X+1} & \delta'_{2,n_X+2} & \boxtimes & \delta'_{2,n_0} \\ \delta_{n_X 1} & \delta_{n_X 2} & \boxtimes & \delta_{n_X n_X} & \delta'_{n_X,n_X+1} & \delta'_{n_X,n_X+2} & \boxtimes & \delta'_{n_X,n_0} \\ \hline r'_{n_X+1,1} & r'_{n_X+1,2} & \boxtimes & r'_{n_X+1,n_X} & r_{n_X+1,n_X+1} & r_{n_X+1,n_X+2} & \boxtimes & r_{n_X+1,n_0} \\ r'_{n_X+2,1} & r'_{n_X+2,2} & \boxtimes & r'_{n_X+2,n_X} & r_{n_X+2,n_X+1} & r_{n_X+2,n_X+2} & \boxtimes & r_{n_X+2,n_0} \\ \hline r'_{n_0 1} & r'_{n_0 2} & \boxtimes & r'_{n_0 n_X} & r_{n_0,n_X+1} & r_{n_0,n_X+2} & \boxtimes & r_{n_0 n_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \boxtimes \\ X_{n_X} \\ Z_{n_X+1} \\ Z_{n_X+2} \\ \boxtimes \\ Z_{n_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1\Sigma} \\ \Delta_{2\Sigma} \\ \boxtimes \\ \Delta_{n_X\Sigma} \\ R_{n_X+1,\Sigma} \\ R_{n_X+2,\Sigma} \\ \boxtimes \\ R_{n_0\Sigma} \end{bmatrix} = 0$$

$$A_{XZ} * Y + B_{\Sigma} = 0$$

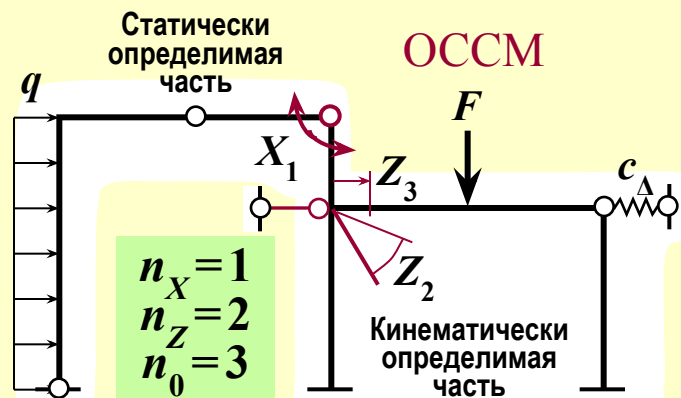
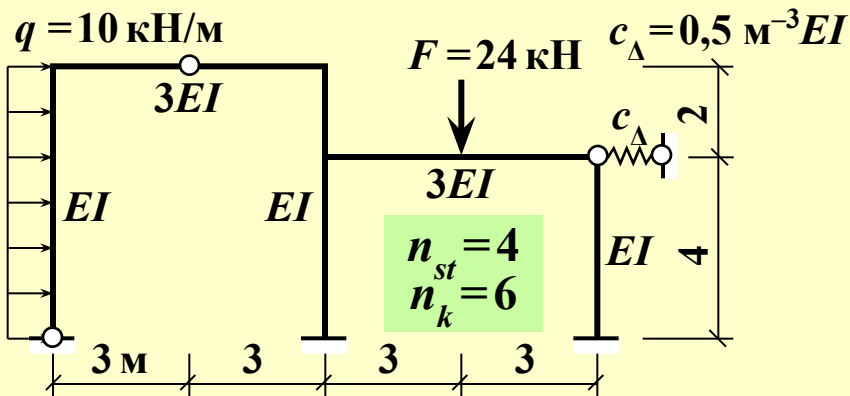
$$\begin{bmatrix} \delta_{XX} & \delta'_{XZ} \\ r'_{ZX} & r_{ZZ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{\Sigma} \\ R_{\Sigma} \end{bmatrix} = 0$$

$$Y = -A_{XZ}^{-1} B_{\Sigma}$$

$$S = \sum_{k=1}^{n_X} S_k X_k + \sum_{k=n_X+1}^{n_0} S_k Z_k + S_{\Sigma}$$

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ

Пример



Канонические уравнения смешанного метода:

$$\begin{cases} \Delta_1 = 0, \\ R_2 = 0, \\ R_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta'_{12}Z_2 + \delta'_{13}Z_3 + \Delta_{1F} = 0, \\ r'_{21}X_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2F} = 0, \\ r'_{31}X_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3F} = 0. \end{cases}$$

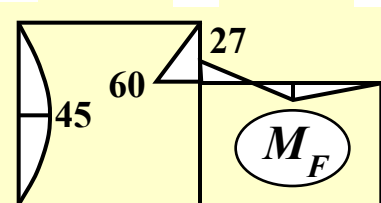
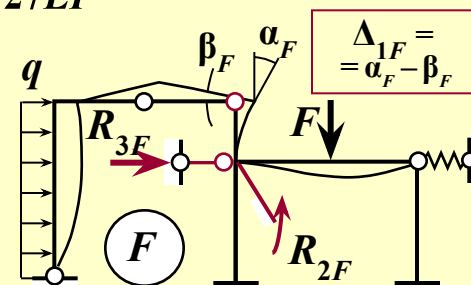
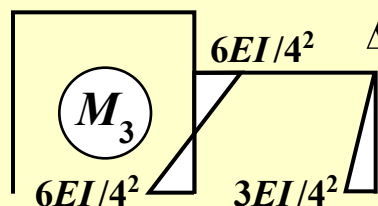
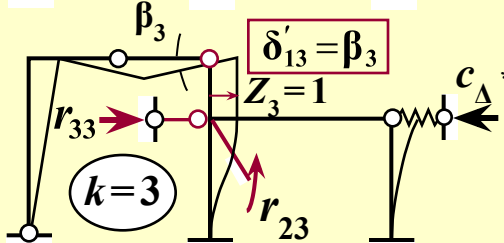
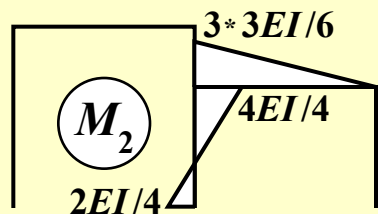
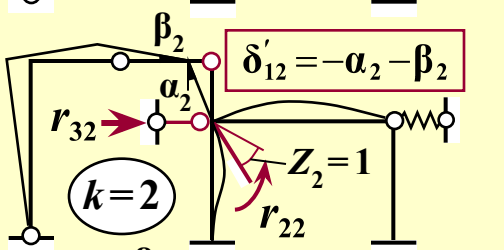
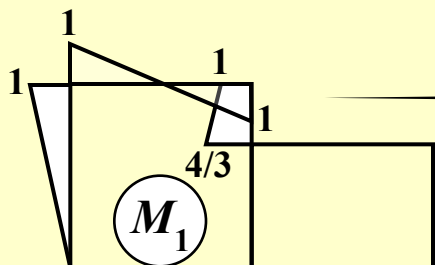
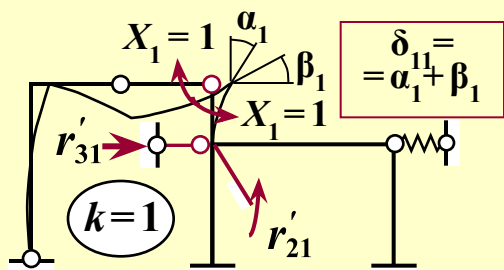
$$\delta_{11} = \sum_{j=1}^3 \int_{l_j} \frac{M_1^2}{EI} ds = \frac{109}{27EI} \quad \text{Грузовое состояние ОССМ}$$

$$\begin{aligned} \delta'_{12} &= -r'_{21} = -4/3 \\ \delta'_{13} &= -r'_{31} = 1/6 \\ r_{22} &= 5EI/2 \\ r_{23} &= r_{32} = 3EI/8 \\ r_{33} &= 47EI/64 \end{aligned}$$

$$\Delta_{1F} = \sum_{j=1}^3 \int_{l_j} \frac{M_1 M_F}{EI} ds = -\frac{50}{3EI}$$

$$R_{2F} = 87; \quad R_{3F} = -30$$

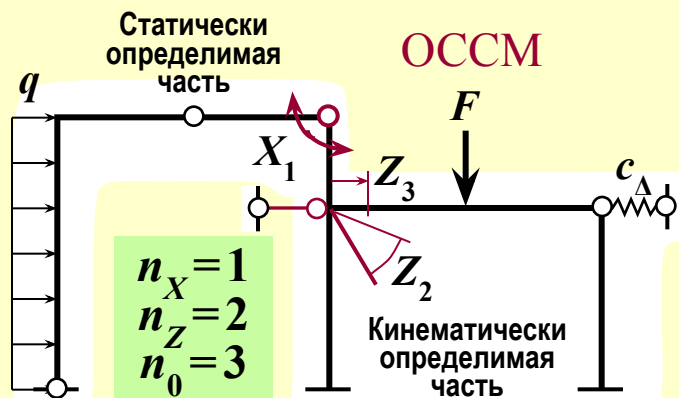
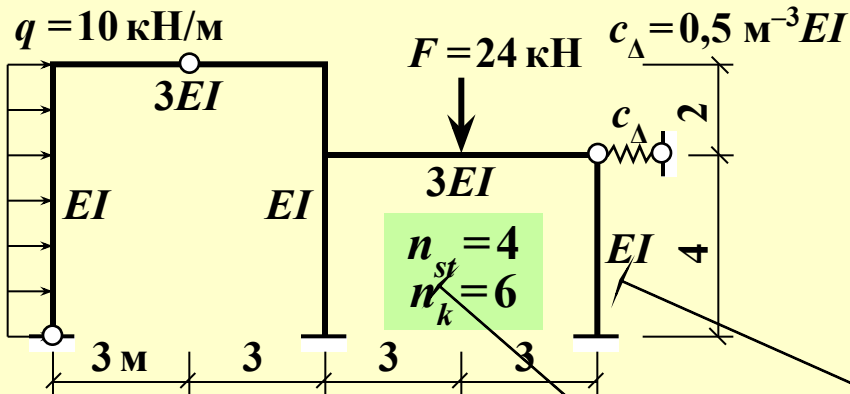
Единичные состояния ОССМ



(кН·м)

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ

Пример



Канонические уравнения смешанного метода:

$$\begin{cases} \Delta_1 = 0, \\ R_2 = 0, \\ R_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta'_{12} Z_2 + \delta'_{13} Z_3 + \Delta_{1F} = 0, \\ r'_{21} X_1 + r_{22} Z_2 + r_{23} Z_3 + R_{2F} = 0, \\ r'_{31} X_1 + r_{32} Z_2 + r_{33} Z_3 + R_{3F} = 0. \end{cases}$$

$$\delta_{11} = \sum_{j=1}^3 \int_{l_j} \frac{M_1^2}{EI} ds = \frac{109}{27EI}$$

Грузовое состояние
ОССМ

$$\delta'_{12} = -r'_{21} = -4/3$$

$$\delta'_{13} = -r'_{31} = 1/6$$

$$r_{22} = 5EI/2$$

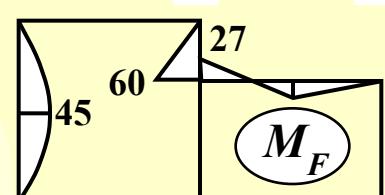
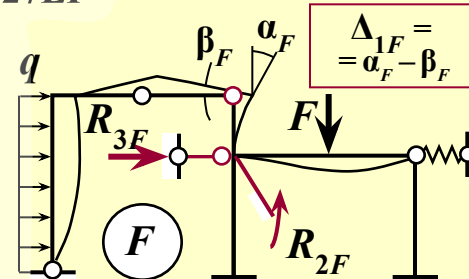
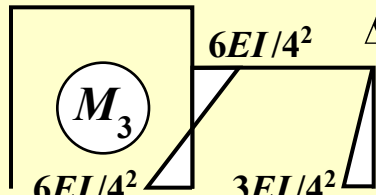
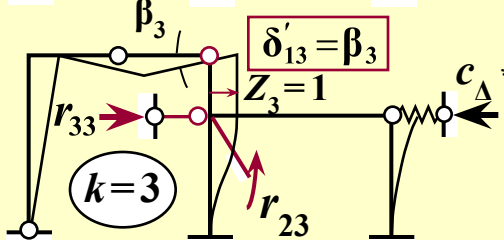
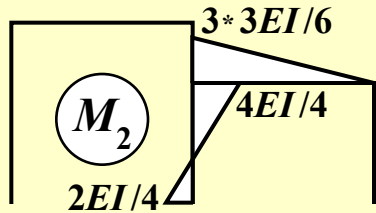
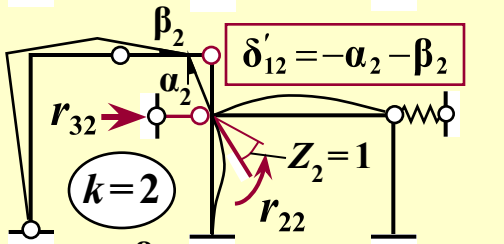
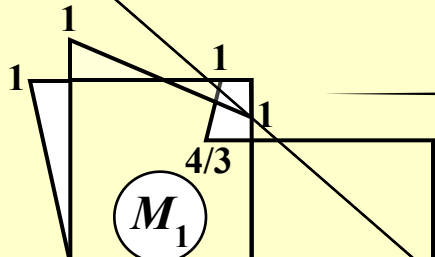
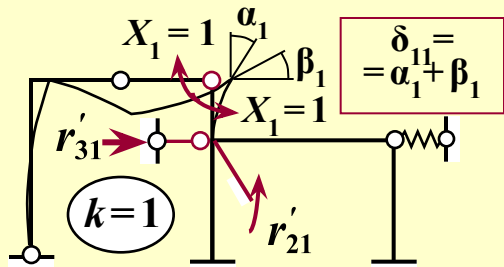
$$r_{23} = r_{32} = 3EI/8$$

$$r_{33} = 47EI/64$$

$$\Delta_{1F} = \sum_{j=1}^3 \int_{l_j} \frac{M_1 M_F}{EI} ds = -\frac{50}{3EI}$$

$$R_{2F} = 87; R_{3F} = -30$$

Единичные состояния ОССМ



(кН·м)

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ

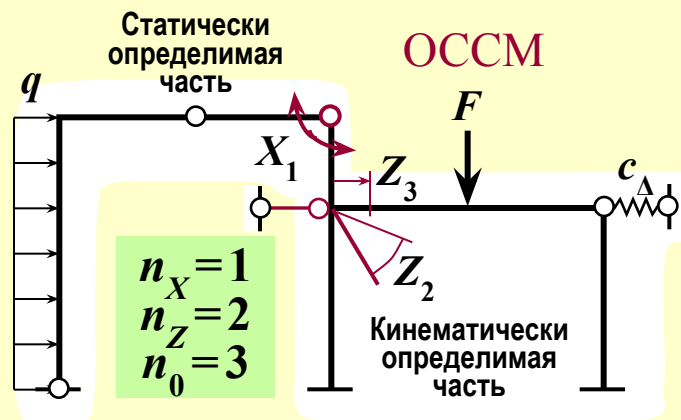
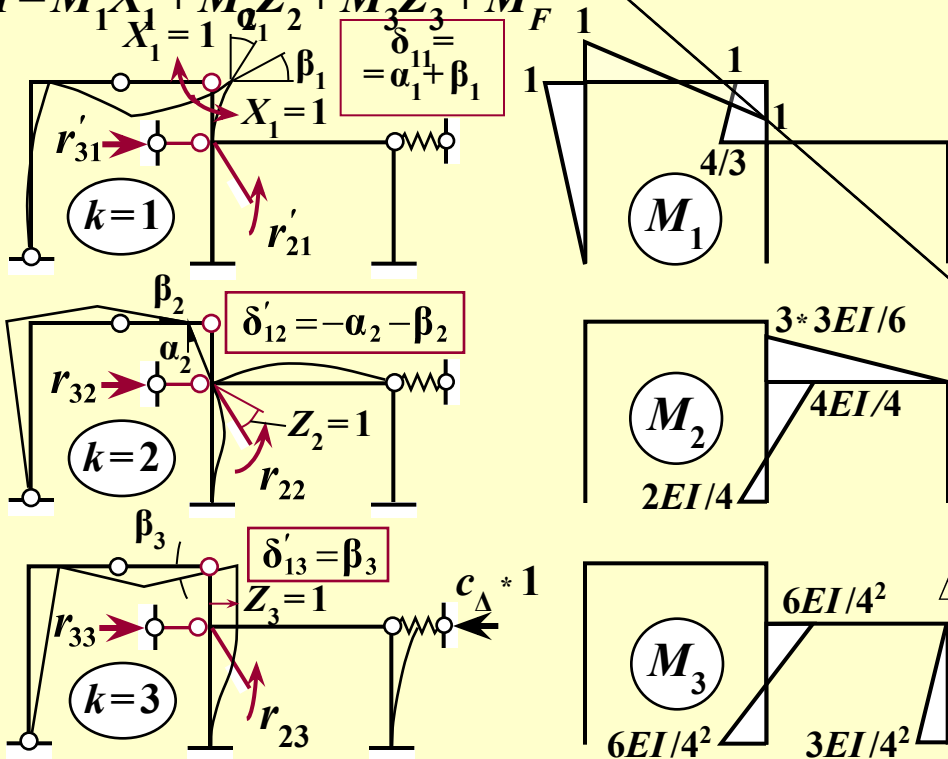
Пример

$$\begin{cases} \frac{109/27}{EI} X_1 - \frac{4}{3} Z_2 + \frac{1}{6} Z_3 - \frac{50/3}{EI} = 0, \\ \frac{4}{3} X_1 + \frac{5}{2} EI Z_2 + \frac{3}{8} EI Z_3 + 87 = 0, \\ -\frac{1}{6} X_1 + \frac{3}{8} EI Z_2 + \frac{47}{64} EI Z_3 - 30 = 0. \end{cases}$$

$$X_1 = -13,723 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad Z_2 = -36,902/EI; \quad Z_3 = 62,809/EI$$

$$M = M_1 X_1 + M_2 Z_2 + M_3 Z_3 + M_F$$

Единичные состояния ОССМ



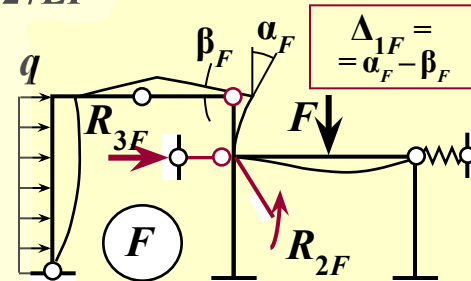
Канонические уравнения смешанного метода:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta'_{12} Z_2 + \delta'_{13} Z_3 + \Delta_{1F} = 0, \\ r'_{21} X_1 + r_{22} Z_2 + r_{23} Z_3 + R_{2F} = 0, \\ r'_{31} X_1 + r_{32} Z_2 + r_{33} Z_3 + R_{3F} = 0. \end{cases}$$

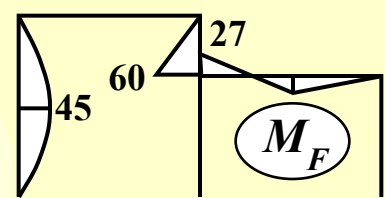
$$\delta_{11} = \sum_{j=1}^3 \int_{l_j} \frac{M_1^2}{EI} ds = \frac{109}{27EI}$$

Грузовое состояние ОССМ

$$\begin{aligned} \delta'_{12} &= -r'_{21} = -4/3 \\ \delta'_{13} &= -r'_{31} = 1/6 \\ r_{22} &= 5EI/2 \\ r_{23} &= r_{32} = 3EI/8 \\ r_{33} &= 47EI/64 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \sum_{j=1}^3 \int_{l_j} \frac{M_1 M_F}{EI} ds = \\ &= -\frac{50}{3EI} \\ R_{2F} &= 87; \quad R_{3F} = -30 \end{aligned}$$



(кН·м)

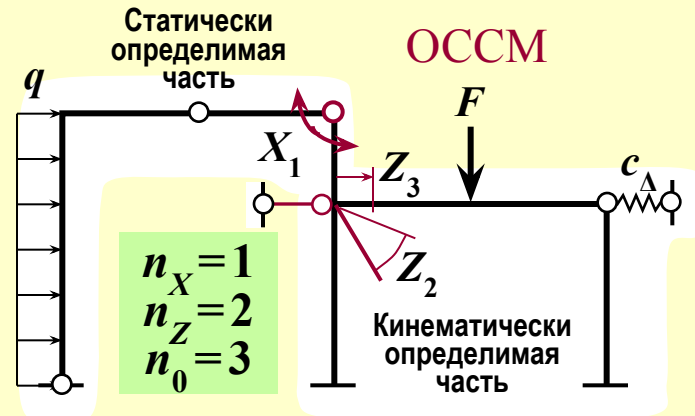
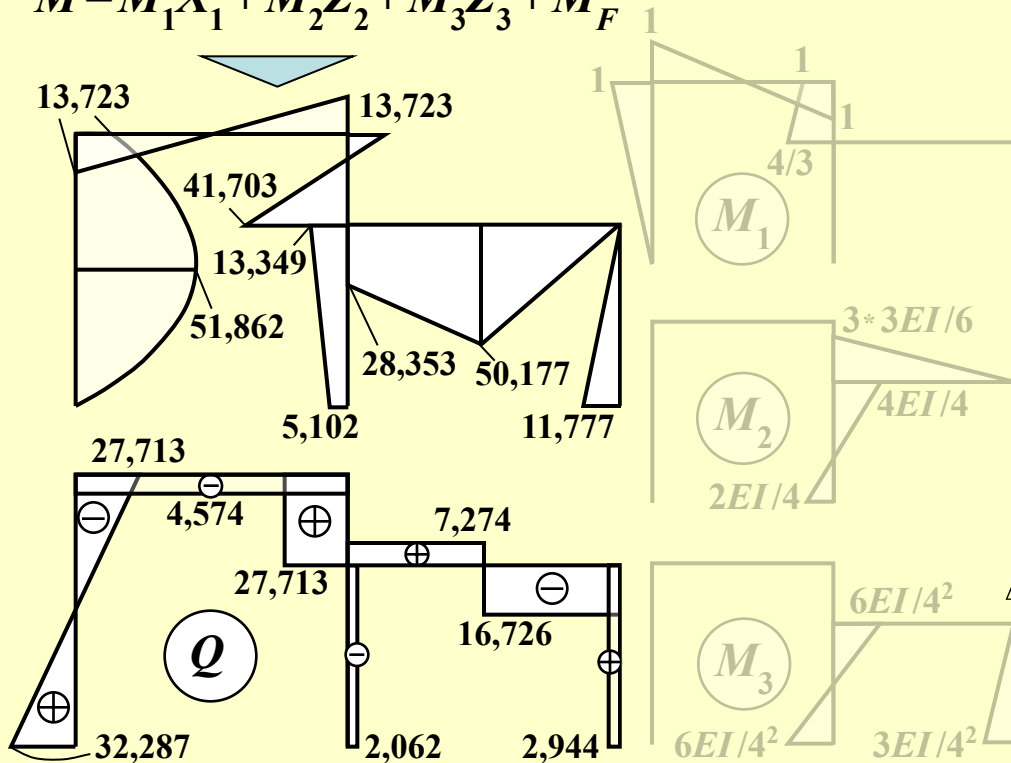
РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ

Пример

$$\begin{cases} \frac{109/27}{EI} X_1 - \frac{4}{3} Z_2 + \frac{1}{6} Z_3 - \frac{50/3}{EI} = 0, \\ \frac{4}{3} X_1 + \frac{5}{2} EI Z_2 + \frac{3}{8} EI Z_3 + 87 = 0, \\ -\frac{1}{6} X_1 + \frac{3}{8} EI Z_2 + \frac{47}{64} EI Z_3 - 30 = 0. \end{cases}$$

$$X_1 = -13,723 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad Z_2 = -36,902/EI; \quad Z_3 = 62,809/EI$$

$$M = M_1 X_1 + M_2 Z_2 + M_3 Z_3 + M_F$$



Канонические уравнения смешанного метода:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta'_{12} Z_2 + \delta'_{13} Z_3 + \Delta_{1F} = 0, \\ r'_{21} X_1 + r_{22} Z_2 + r_{23} Z_3 + R_{2F} = 0, \\ r'_{31} X_1 + r_{32} Z_2 + r_{33} Z_3 + R_{3F} = 0. \end{cases}$$

$$\delta_{11} = \sum_{j=1}^3 \int_{l_j} \frac{M_1^2}{EI} ds = \frac{109}{27EI}$$

Грузовое состояние
ОССМ

$$\delta'_{12} = -r'_{21} = -4/3$$

$$\delta'_{13} = -r'_{31} = 1/6$$

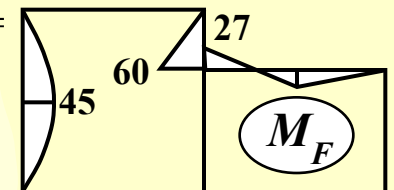
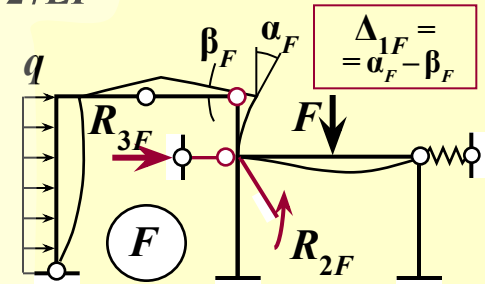
$$r_{22} = 5EI/2$$

$$r_{23} = r_{32} = 3EI/8$$

$$r_{33} = 47EI/64$$

$$\Delta_{1F} = \sum_{j=1}^3 \int_{l_j} \frac{M_1 M_F}{EI} ds = -\frac{50}{3EI}$$

$$R_{2F} = 87; \quad R_{3F} = -30$$



(кН·м)

СМЕШАННЫЙ МЕТОД, МЕТОД СИЛ И МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

$$\begin{matrix} n_X \\ n_Z \end{matrix} \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \boxtimes & \delta_{1n_X} & \delta'_{1,n_X+1} & \delta'_{1,n_X+2} & \boxtimes & \delta'_{1n_0} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \boxtimes & \delta_{2n_X} & \delta'_{2,n_X+1} & \delta'_{2,n_X+2} & \boxtimes & \delta'_{2n_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{n_X 1} & \delta_{n_X 2} & \boxtimes & \delta_{n_X n_X} & \delta'_{n_X, n_X+1} & \delta'_{n_X, n_X+2} & \boxtimes & \delta'_{n_X n_0} \\ \hline r'_{n_X+1,1} & r'_{n_X+1,2} & \boxtimes & r'_{n_X+1, n_X} & r_{n_X+1, n_X+1} & r_{n_X+1, n_X+2} & \boxtimes & r_{n_X+1, n_0} \\ r'_{n_X+2,1} & r'_{n_X+2,2} & \boxtimes & r'_{n_X+2, n_X} & r_{n_X+2, n_X+1} & r_{n_X+2, n_X+2} & \boxtimes & r_{n_X+2, n_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r'_{n_0 1} & r'_{n_0 2} & \boxtimes & r'_{n_0 n_X} & r_{n_0, n_X+1} & r_{n_0, n_X+2} & \boxtimes & r_{n_0 n_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \boxtimes \\ X_{n_X} \\ Z_{n_X+1} \\ Z_{n_X+2} \\ \boxtimes \\ Z_{n_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1\Sigma} \\ \Delta_{2\Sigma} \\ \boxtimes \\ \Delta_{n_X \Sigma} \\ R_{n_X+1, \Sigma} \\ R_{n_X+2, \Sigma} \\ \boxtimes \\ R_{n_0 \Sigma} \end{bmatrix} = 0$$

КУСМ

$$\begin{bmatrix} \delta_{XX} & \delta'_{XZ} \\ r'_{ZX} & r_{ZZ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{\Sigma} \\ R_{\Sigma} \end{bmatrix} = 0$$

$A_{XZ} * Y + B_{\Sigma} = 0$

$$n_Z = 0$$

$$n_0 = n_X = n$$

МЕТОД СИЛ

КУМС

$$\delta * X + \Delta_{\Sigma} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{12} & \delta_{12} & \boxtimes & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \boxtimes & \delta_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \boxtimes & \delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \boxtimes \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1\Sigma} \\ \Delta_{2\Sigma} \\ \boxtimes \\ \Delta_{n\Sigma} \end{bmatrix} = 0$$

$$n_X = 0$$

$$n_0 = n_Z = n$$

МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

КУМП

$$r * Z + R_{\Sigma} = 0$$

$$\begin{bmatrix} r_{12} & r_{12} & \boxtimes & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \boxtimes & r_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ r_{n1} & r_{n2} & \boxtimes & r_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \boxtimes \\ Z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{1\Sigma} \\ R_{2\Sigma} \\ \boxtimes \\ R_{n\Sigma} \end{bmatrix} = 0$$

СМЕШАННЫЙ МЕТОД, МЕТОД СИЛ И МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Р е з ю м е :

1. Канонические уравнения любого метода (сил, перемещений или смешанного) являются *разрешающими уравнениями* задачи расчёта заданной деформированной системы, т. е. *синтезом статической, геометрической и физической сторон задачи.*

Метод	Место в канонических уравнениях, где реализованы стороны задачи (непосредственно или опосредованно)		
	статическая	геометрическая	физическая
с и л	В использовании условий равновесия для определения силовых факторов в ОСМС от единичных основных неизвестных и от заданных нагрузок	В изначальном геометрическом (кинематическом) смысле условий эквивалентности ОСМС и РСНС	В применении закона Гука для определения методом Максвелла–Мора перемещений δ_{ik} и Δ_{iF} и закона линейного температурного расширения для Δ_{it}
перемещений	В изначальном статическом смысле условий эквивалентности ОСМП и РДС	В обеспечении совместности перемещений (деформаций) ОСМП в единичных состояниях и от заданных воздействий, а также в выполнении кинематических граничных условий	В стандартных задачах для типовых элементов ОСМП (решения на основе закона Гука и закона линейного температурного расширения)
смешанный	а) в изначальном статическом смысле условий эквивалентности ОССМ и РСНС (1-я группа КУСМ); б) в использовании условий равновесия для определения силовых факторов в статически определимых частях ОССМ от единичных основных неизвестных и от заданных нагрузок	а) в изначальном геометрическом (кинематическом) смысле условий эквивалентности ОССМ и РСНС (2-я группа КУСМ); б) в обеспечении совместности перемещений (деформаций) кинематически определимых частей ОССМ в единичных состояниях и от заданных воздействий, а также в выполнении кинематических граничных условий	а) в статически определимых частях ОССМ – как в методе сил; б) в кинематически определимых частях ОССМ – как в методе перемещений

СМЕШАННЫЙ МЕТОД, МЕТОД СИЛ И МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Р е з ю м е :

2. При выборе метода расчёта деформируемой системы в случае равных (или близких) количеств основных неизвестных МС, МП и СМ предпочтение следует отдавать *методу перемещений* из-за
 - а) большей в сравнении с другими методами формализованностью его расчётных процедур вследствие использования стандартных (табличных) данных;
 - б) более высокой информативности результатов расчёта: наряду с усилиями в рассчитываемой системе определяются также и перемещения её узлов.

3. При равных количествах основных неизвестных МС и СМ рациональным является *смешанный метод*, в котором часть процедур основана на использовании тех же табличных данных, что и в методе перемещений.

4. Самый универсальный – *метод перемещений*: с его помощью могут рассчитываться *любые* деформируемые системы – как статически неопределимые, так и статически определимые.

Контрольные вопросы

(в скобках даны номера слайдов, в которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках*); для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 14»)

1. Какие величины являются основными неизвестными смешанного метода (СМ)? (2)
2. Как формируется основная система смешанного метода (ОССМ) и какими соображениями следует при этом руководствоваться? (2)
3. Какими свойствами должна обладать рационально выбранная ОССМ? (2)
4. Из каких условий получаются канонические уравнения СМ? (3)
5. Какие группы уравнений входят в систему КУСМ? (3)
6. Какие различные по смыслу величины являются коэффициентами КУСМ (перечислить) (3)(3), (4). Какие из них не имеют аналогов в коэффициентах КУМС и КУМП?
7. Раскрыть смысл
 - а) системы КУСМ в целом (3);
 - б) произвольного (i -го) уравнения 1-й и 2-й групп КУМС (3);
 - в) свободных членов уравнений $\Delta_{i\Sigma}, R_{i\Sigma}$ (3);
 - г) слагаемых $\delta_{ik} X_k, \delta'_{ik} Z_k, r_{ik} X_k, r'_{ik} Z_k$; (5);
 - д) коэффициентов $\delta_{ik}, \delta'_{ik}, r_{ik}, r'_{ik}$ (5).
8. Свойства и способы определения коэффициентов канонических уравнений СМ (5).
9. Какие особенности имеет определение коэффициентов δ_{ik} ? (5) Теорема Гвоздева о взаимности единичных перемещений и реакций.

*) Только в режиме «Показ слайдов».

Контрольные вопросы

(в скобках даны номера слайдов, в которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках); для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 15»)*

10. Почему канонические уравнения смешанного метода являются разрешающими уравнениями задачи расчёта СНС (синтезом статической, геометрической и физической сторон задачи)? (12)
11. Как по найденным основным неизвестным смешанного метода вычисляются искомые усилия в заданной системе? (5)
12. Взаимосвязь смешанного метода, метода сил и метода перемещений (10).
13. Можно ли получить
 - а) канонические уравнения СМ формальным объединением КУМС и КУМП?
 - б) КУМС и КУМП из уравнений смешанного метода? (10)
14. Сравнительная оценка возможностей и рациональности применения методов сил, перемещений и смешанного (13).

*) Только в режиме «Показ слайдов».