

# Лекція № 3

*Ідентифікація параметрів математичної моделі.  
Основні принципи побудови моделі*

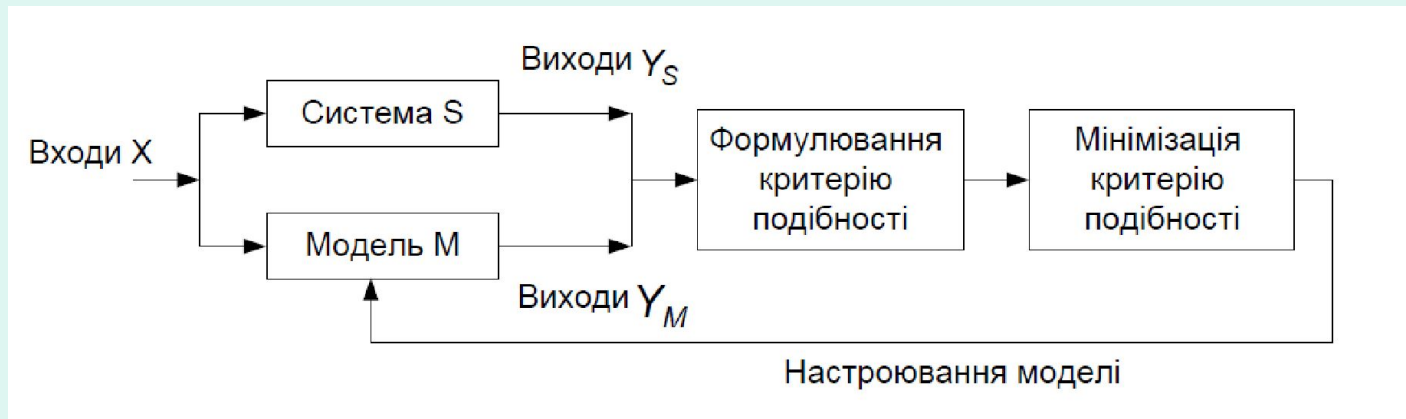
## § 1. Постановка задачі ідентифікації моделей

У загальному випадку *задача ідентифікації моделей* формулюється наступним чином: на основі результатів спостереження за вхідними і вихідними змінними системи потрібно побудувати оптимальну в деякому розумінні математичну модель.

**Основними етапами ідентифікації моделі є:**

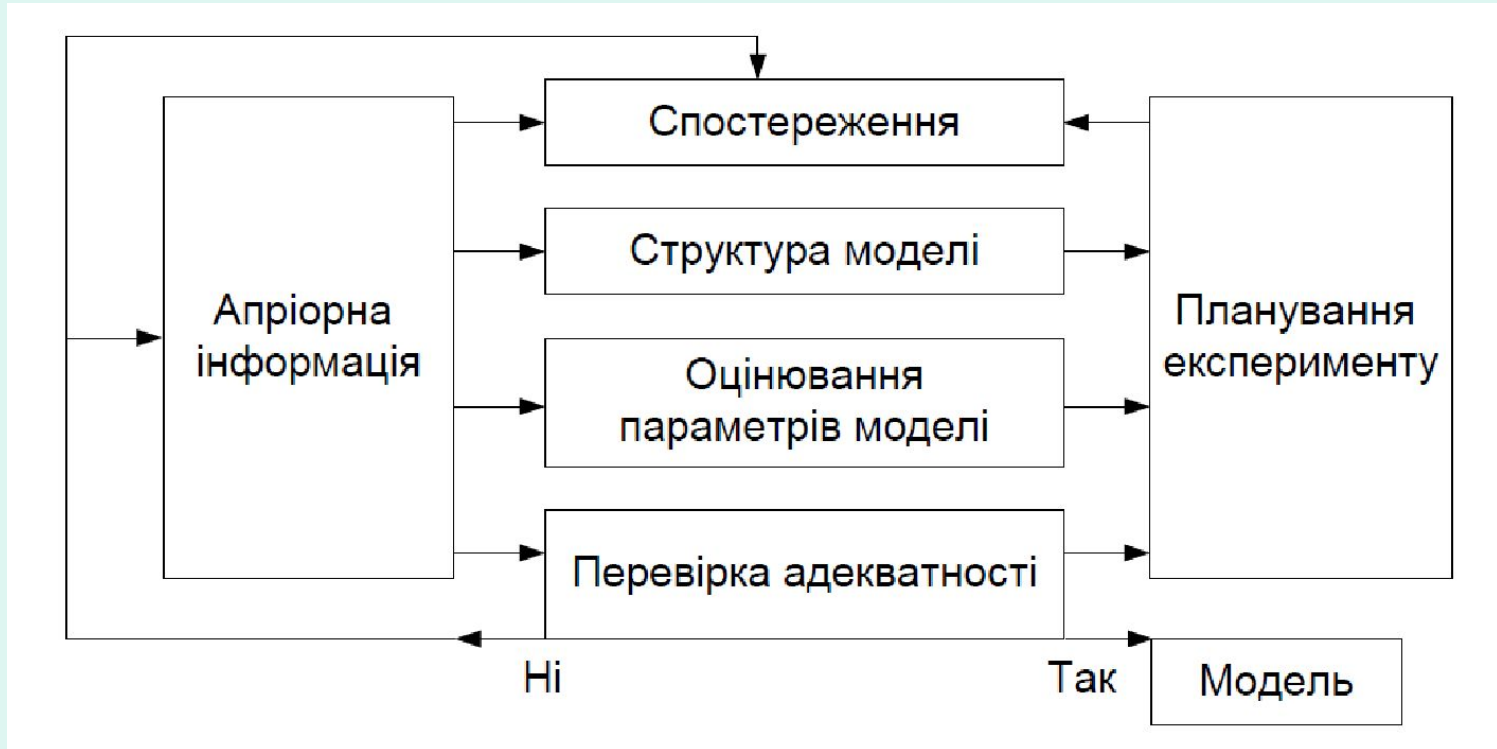
1. Вибір класу і структури моделі і мови її опису.
2. Вибір класу і типів вхідних впливів  $X$ .
3. Обґрунтування критеріїв схожості системи і моделі.
4. Вибір методу ідентифікації і розробка відповідних алгоритмів оцінювання параметрів моделі.
5. Перевірка адекватності отриманої в результаті ідентифікації моделі.

### Загальна схема ідентифікації моделі



## Основні етапи розв'язання задачі ідентифікації та їх взаємозв'язок

Взаємозв'язок основних етапів розв'язання задачі ідентифікації можна проілюструвати такою схемою:



Нехай деяка система описується вхідними  $X$  і вихідними  $Y$  змінними і яким-небудь чином обрана структура моделі  $Y = f(X)$ .

Необхідно на основі результатів спостереження за вхідними й вихідними змінними системи (даних експерименту) знайти оцінку параметрів моделі, тобто побудувати оптимальну в деякому розумінні математичну модель.

## § 2. Поняття адекватності, сталості та чутливості моделі, формальні способи їх перевірки

Оцінка якості моделі є завершальним етапом її розробки й переслідує дві цілі:

- 1) перевірити відповідність моделі її призначенню (цілям дослідження);
- 2) оцінити ймовірність і статистичні характеристики результатів, отриманих при проведенні експериментів з моделлю.

При аналітичному моделюванні ймовірність результатів визначається двома основними факторами:

- конкретним вибором математичного апарату, використовуваного для опису досліджуваної системи;
- методичною помилкою, властивою даному математичному методу.

При імітаційному моделюванні на ймовірність результатів впливає цілий ряд додаткових факторів, основними з яких є:

- моделювання випадкових факторів, засноване на використанні датчиків випадкових чисел, які можуть вносити "перекручування" у поведінку моделі;
- наявність нестационарного режиму роботи моделі;
- використання декількох різнотипних математичних методів у рамках однієї моделі;
- залежність результатів моделювання від плану експериментів;
- необхідність синхронізації роботи окремих компонентів моделі.

Придатність імітаційної моделі для рішення завдань дослідження характеризується тим, у якій мірі вона має так звані **цільові властивості**.

Основними з них є:

□ адекватність;

□ сталість;

□ чутливість.

### **Оцінка адекватності моделі.**

У загальному випадку під адекватністю розуміють ступінь відповідності моделі тому реальному явищу або об'єкту, для опису якого вона будується.

Разом з тим, створювана модель орієнтована, як правило, на дослідження певної підмножини властивостей цього об'єкта. Тому можна вважати, що адекватність моделі визначається ступенем її відповідності не стільки реальному об'єкту, скільки цілям дослідження. Найбільшою мірою це твердження справедливо щодо моделей проєктованих систем (тобто в ситуаціях, коли реальна система взагалі не існує).

Проте в багатьох випадках корисно мати формальне підтвердження (або обґрунтування) адекватності розробленої моделі.

Один з найпоширеніших способів такого обґрунтування – використання методів математичної статистики.

Суть цих методів полягає в перевірці висунутих гіпотез (у цьому випадку – про адекватність моделі) на основі деяких статистичних критеріїв.

Процедура оцінки адекватності моделі заснована на порівнянні вимірів на реальній системі й результатів експериментів на моделі й може проводитися різними способами.

Найпоширеніші з них:

□ за середніми значеннями відгуків (виходів) моделі й системи;

□ за дисперсіями відхилень відгуків моделі від середнього значення відгуків системи;

□ за максимальним значенням відносних відхилень відгуків моделі від відгуків системи.

## **Оцінка сталості моделі.**

При оцінці адекватності моделі як існуючої, так і проекрованої системи реально може бути використана лише обмежена підмножина всіх можливих значень вхідних параметрів (робочого навантаження й зовнішнього середовища).

У зв'язку із цим для обґрунтування вірогідності одержуваних результатів моделювання велике значення має перевірка сталості моделі.

У теорії моделювання це поняття трактується в такий спосіб.

**Сталість моделі** – це її здатність зберігати адекватність при дослідженні ефективності системи на всьому можливому діапазоні робочого навантаження, а також при внесенні змін у конфігурацію системи.

Яким чином може бути оцінена сталість моделі?

Універсальної процедури перевірки сталості моделі не існує.

Розроблювач змушений вдаватися до методів "для даного випадку", частковим тестам і здоровому глузду.

Часто буває корисна апостеріорна перевірка. Вона полягає в порівнянні результатів моделювання й результатів вимірів на системі після внесення в неї змін. Якщо результати моделювання прийнятні, упевненість у стійкості моделі зростає.

У загальному випадку можна стверджувати, що чим ближче структура моделі структурі системи й чим вище ступінь деталізації, тим більша сталість моделі.

Сталість результатів моделювання може бути також оцінена методами математичної статистики.

Для перевірки гіпотези про сталість результатів може бути використаний критерій Уїлкоксона.

## **Оцінка чутливості імітаційної моделі.**

Очевидно, що сталість є позитивною властивістю моделі.

Однак якщо зміна вхідних впливів або параметрів моделі (у деякому заданому діапазоні) не відбивається на значеннях вихідних параметрів, то користь від такої моделі невелика.

У зв'язку з цим виникає завдання оцінювання чутливості моделі до зміни параметрів робочого навантаження й внутрішніх параметрів самої системи.

Таку оцінку проводять за кожним параметром (змінною) окремо.

Заснована вона на тому, що зазвичай діапазон можливих змін параметра відомий.

## Поняття несуперечливості моделі.

**Несуперечливість** – властивість, що полягає в тому, що не кожна формула цієї системи доказова в ній. Формальні системи, що мають цю властивість, називаються несуперечливими, або формально несуперечливими. Інакше формальна система називається суперечливою, або несумісною.

Для широкого класу формальних систем, мова яких містить знак заперечення " $\neg$ " несуперечливість еквівалентна властивості: "не існує такої формули  $\varphi$ , що  $\varphi$  і  $\neg\varphi$  обидві доказові".

Клас формул даної формальної системи є несуперечливим, якщо не всяка формула цієї системи виводиться з даного класу.

Формальна система називається змістовно несуперечливою, якщо існує модель, в якій істинні всі теореми цієї системи.

Оскільки модель це теж система, то поняття суперечливості і несуперечливості застосовне і до неї.

Суперечливі визначення об'єктів і суперечливі моделі іноді виникають у результаті абсолютизації локальних властивостей реально існуючих об'єктів.

Інша можлива причина появи суперечливих моделей – наявність різних неузгоджених джерел інформації, що служить основою моделювання.



## § 3. Основні принципи побудови моделей

**Принцип інформаційної достатності.** При повній відсутності інформації про систему модель побудувати неможливо. За наявності повної інформації про систему її моделювання недоцільне. Існує деякий критичний рівень апріорних відомостей про систему (рівень інформаційної достатності), досягши якого можна побудувати її адекватну модель.

**Принцип доцільності.** Модель створюється для досягнення деяких цілей, які визначають на первинному етапі формулювання проблеми моделювання.

Так, цілями моделювання можуть бути:

- Осмислення дійсності;
- постановка над моделлю експериментів з подальшою інтерпретацією їх результатів стосовно модельованої системи;
- прогнозування майбутньої поведінки системи;
- спілкування з іншими особами, громадськими організаціями, пристроями обробки інформації;
- навчання і тренування фахівців.

**Принцип здійсненності.** Створювана модель повинна забезпечувати досягнення мети дослідження з урахуванням граничних ресурсів з вірогідністю (ймовірністю), істотно відмінною від нуля, і за скінченний час. Зазвичай задають деяке граничне значення (ступінь ризику) вірогідності (ймовірності) досягнення мети моделювання, а також сам граничний термін досягнення мети. Модель вважають здійсненою, якщо вірогідність досягнення мети моделювання більше граничного значення.

**Принцип множинності моделей.** Модель, що створюється, повинна відображати насамперед ті властивості реальної системи (або явища), які впливають на вибраний показник ефективності.

Відповідно під час використання будь-якої конкретної моделі пізнаються лише деякі складові реальності. Для повного її дослідження необхідно мати ряд моделей, що дали б можливість відобразити певний процес з різних боків і з різним ступенем детальності.

**Принцип агрегації.** У більшості випадків складну систему можна представити як таку, що складається з агрегатів (підсистем), для адекватного формального опису яких придатними є деякі стандартні математичні схеми. Принцип агрегації дає можливість досить гнучко перебудовувати модель залежно від завдань (задач) дослідження.

**Принцип параметризації.** У ряді випадків модельована система має у своєму складі деякі відносно ізольовані підсистеми, які характеризуються певними параметрами, зокрема векторними. Такі підсистеми можна замінювати в моделі відповідними числовими величинами, а не описувати процес їх функціонування. У разі потреби залежність значень цих величин від ситуації може задаватися у вигляді таблиць, графіків або аналітичних виразів (формул), наприклад за допомогою регресійного аналізу. Принцип параметризації дає можливість скоротити обсяг і тривалість моделювання, але слід мати на увазі, що параметризація знижує адекватність моделі.

Потреба в моделюванні виникає як на етапі проектування систем для оцінювання правильності прийнятих рішень, так і на етапі експлуатації – для оцінювання наслідків внесення змін у систему.

У цьому випадку на різних етапах проектування (технічний або робочий проект) з уточненням вихідних даних і виявленням нових суттєвих факторів ступінь деталізації процесу в системі зростає, що повинне відобразитися в моделі.

**Таким чином**, в моделі можуть одночасно перебувати блоки з різним ступенем деталізації, що моделюють одні і ті ж компоненти проектованої системи.

Іншими словами, **під час побудови моделі потрібно застосовувати методологію ітераційного багаторівневого моделювання.**

Розробку моделі доцільно починати зі створення простої початкової моделі, яку в процесі уточнення вхідних даних і характеристик системи ускладнюють і корегують, тобто адаптують до нових умов.

Разом з тим модель повинна залишатися досить наглядною, тобто її структура повинна відповідати структурі модельованої системи, а рівень деталізації моделі повинен вибиратися з урахуванням цілей моделювання, ресурсних обмежень (наприклад, час, кваліфіковані людські ресурси і засоби, виділені на проектування) та можливості отримання початкових даних.

Таким чином, модель повинна бути багаторівневою, адаптивною, наглядною, цільовою, розвиватися ітераційним способом, ускладнюватися і корегуватися у процесі створення, що можливо тільки за умови побудови її блочним (модульним) способом.

Програмування і відладку моделі доцільно вести поетапно, з послідовним збільшенням програмних модулів.

## **§ 4. Технологія моделювання: основні етапи, їх взаємозв'язок та характеристики**

Основою моделювання є методологія системного аналізу.

Це дає можливість досліджувати систему, яка проектується або аналізується, за технологією операційного дослідження.

Комп'ютерне моделювання (а зазвичай застосовується саме комп'ютерна модель) включає такі взаємопов'язані етапи:

1. Формулювання проблеми і змістовна постановка задачі.
2. Розробка концептуальної моделі.
3. Розробка програмної реалізації моделі, яка включає:
  - а) вибір засобів програмування, за допомогою яких буде реалізована модель;
  - б) розробка структурної схеми моделі і складання опису її функціонування;
  - в) програмна реалізація моделі.
  - г) перевірка адекватності моделі.
4. Організація і планування проведення експериментів, що включає оцінювання точності результатів моделювання.
5. Інтерпретація результатів моделювання і прийняття рішень.
6. Оформлення результатів дослідження.

## **1. Формулювання проблеми і змістовна постановка задачі.**

На першому етапі замовник формулює проблему.

Організуються зустрічі керівника проекту з замовником, аналітиками з моделювання і експертами з проблеми, що вивчається.

Визначаються цілі дослідження і спеціальні питання, відповіді на які будуть отримані в результаті дослідження; встановлюються критерії оцінювання роботи, які викоистовуватимуться для вивчення ефективності різних конфігурацій системи.

Розглядаються такі показники, як масштаб моделі, період дослідження і необхідні ресурси; визначаються конфігурації модельованої системи, а також необхідне програмне забезпечення.

На цьому ж етапі ведеться цілеспрямоване дослідження модельованої системи, притягуються експерти з вирішуваної проблеми, які володіють достовірною інформацією.

Збирається інформація про конфігурацію системи і способи її експлуатації для визначення параметрів моделі і вхідних розподілів ймовірностей.

## 2. Розробка концептуальної моделі

На другому етапі розробляється **концептуальна модель** – абстрактна модель, що дає можливість виявити причинно-наслідкові зв'язки, властиві досліджуваному об'єкту в межах, визначених цілями дослідження.

По суті, це формальний опис об'єкта моделювання, яке відображає концепцію (погляд дослідника на проблему).

Вона включає в явному вигляді логіку, алгоритми, припущення й обмеження.

Згідно з цілями моделювання визначаються вихідні показники, що потрібно збирати під час моделювання, ступінь деталізації, необхідні початкові дані для моделювання.

**Рівень деталізації моделі залежить від таких факторів:**

- мети проекту;
- критеріїв оцінювання показників роботи;
- доступності даних;
- достовірності результатів;
- комп'ютерних можливостей;
- думки експертів з вирішуваної проблеми;
- обмежень, пов'язаних з часом і фінансуванням.

Ведеться структурний аналіз концептуальної моделі, пропонується опис допущень, що обговорюються з замовником, керівником проекту, аналітиками й експертами з вирішуваної проблеми.

Розробляються моделі початкових даних, ведеться їх статистичний аналіз, за результатами якого визначають розподіли ймовірності, регресійні, кореляційні й інші залежності.

На цьому етапі для попереднього аналізу даних широко застосовують різні статистичні пакети (наприклад, STATISTICA).

### 3. Розробка програмної реалізації моделі

Для динамічних систем ведеться післяопераційний аналіз функціонування модельованої системи з детальним описом роботи елементів системи.

За результатами такого аналізу можна з'ясувати, чи можна вирішити проблему без застосування засобів моделювання.

Детально оброблена концептуальна модель дає можливість замовникові з іншого боку поглянути на роботу системи і, наприклад, визначити її вузькі місця, які сприяють зниженню її пропускну́ї спроможності.

Одна зі складних проблем, з якою має справу аналітик моделювання, полягає у визначенні, адекватності моделі системи.

Якщо імітаційна модель "адекватна", її можна використовувати для прийняття рішень щодо системи, яку вона представляє, тобто нібито вони приймалися на основі результатів проведення експериментів з реальною системою. Модель складної системи може тільки приблизно відповідати оригіналу, незалежно від того, скільки зусиль було витрачено на її розробку, оскільки абсолютно адекватних моделей не існує.

Оскільки модель завжди повинна розроблятися для певного набору цілей, то модель, яка є адекватною для однієї мети, може не бути такою для дослідження іншої мети. Слід зазначити, що адекватна модель не обов'язково є достовірною, і навпаки. Модель може бути достовірною, але, в цьому випадку, не використовуватися для прийняття рішень. Наприклад, достовірна модель може не бути адекватною з політичних або економічних причин.

Розробляються моделі початкових даних, ведеться їх статистичний аналіз, за результатами якого визначають розподіли ймовірності, регресійні, кореляційні й інші залежності.

На цьому етапі для попереднього аналізу даних широко застосовують різні статистичні пакети (наприклад, STATISTICA).



## Валідація і верифікація

Після кожного з вищезазначених етапів перевіряється достовірність моделі.

Перевірку умовно можна розділити на два етапи:

- перевірка правильності створення концептуальної моделі, тобто задуму – **валідація**;
- перевірка правильності її реалізації – **верифікація**.

Під час перевірки достовірності потрібно відповісти на питання про відповідність моделі модельованій системі, тобто визначити, наскільки ізоморфні система і модель.

Як правило, в разі моделювання вимога ізоморфізму об'єкта і моделі надмірна, оскільки в цьому випадку складність моделі повинна відповідати складності об'єкта.

Тому будують гомоморфні моделі, в яких виконується вимога однозначної відповідності моделі об'єкту.

На етапі верифікації розглядають, чи правильно реалізована концептуальна модель (модельні припущення) в комп'ютерну програму, тобто виконують налагоджування програми моделювання.

Це складне завдання, оскільки може існувати багато логічних шляхів.

Етап перевірки правильності реалізації моделі включає перевірку еквівалентності перетворення моделі на кожному з етапів її реалізації і порівняння станів.

У цьому випадку модель зазнає таких змін: *концептуальна модель – математична модель – алгоритм моделювання – програмна реалізація моделі*.

**Валідація** – це процес, що дає можливість встановити, чи є модель (а не комп'ютерна програма) достатньо точним відображенням системи для конкретних цілей дослідження.

Далі розробляється план проведення експериментів з моделлю для досягнення поставлених цілей.

**4. Основна мета планування експериментів є** – вивчення поведінки модельованої системи при найменших витратах під час експериментів.

Зазвичай проводять такі експерименти:

- порівнюють середні значення і дисперсії різних альтернатив;
- визначають важливість врахування впливу змінних і обмежень, які накладаються на ці змінні;
- визначають оптимальні значення з деякої множини можливих значень змінних.

Проведення експериментів планують для пошуку незначущих факторів. У разі оптимізації якого-небудь числового критерію формулюють гіпотези щодо вибору якнайкращих варіантів структур модельованої системи або режимів її функціонування, визначають діапазон значень параметрів (режимів функціонування) моделі, в межах якого знаходиться оптимальне рішення.

Визначають кількість реалізацій і час прогону моделі кожної реалізації.

Проводять екстремальний експеримент, за результатами якого знаходять оптимальне значення критерію і відповідні значення параметрів.

Для оцінювання точності стохастичних моделей будують довірчі інтервали для отримуваних вихідних змінних.

**5. Далі аналізують і оцінюють результати.** Представляють результати комп'ютерних експериментів у вигляді графіків, таблиць, роздруківок, а також визначають якісні і кількісні оцінки результатів моделювання. Для візуалізації моделі використовують анімацію. Обговорюють процес створення моделі і її достовірність, щоб підвищити рівень довіри до неї.

За отриманими результатами формулюють висновки з проведених досліджень і визначають рекомендації щодо використання моделі прийняття рішень.

**6. На останньому етапі моделювання документально оформляють** всі результати дослідження і готують програмну документацію для використання їх під час розробки інших проектів.

## Висновки

1. При створенні моделі потрібно:

дотримуватися принципів інформаційної достатності;

доцільності;

здійсненності;

множинності моделей;

агрегації;

параметризації;

застосовувати методологію ітераційного багаторівневого моделювання.

2. Комп'ютерне моделювання розбивається на декілька взаємопов'язаних етапів, а сама процедура створення моделі є ітераційною.

## Контрольні питання за матеріалами лекції № 3:

1. Сформулювати задачу ідентифікації моделей.
2. Визначити основні етапи ідентифікації моделі.
3. Пояснити загальну схему ідентифікації моделі.
4. Основні етапи розв'язання задачі ідентифікації та їх взаємозв'язок.
5. Цілі для оцінки якості моделі.
6. Основні фактори, що визначають ймовірність результатів при аналітичному моделюванні.
7. Додаткові фактори, що визначають ймовірність результатів при імітаційному моделюванні.
8. Цільові властивості, що характеризують імітаційну модель для рішення завдань дослідження.
9. Оцінка адекватності моделі.
10. Оцінка сталості моделі.
11. Оцінка чутливості моделі.
12. Поняття несуперечливості моделі.
13. Основні принципи побудови моделі.
14. Основні етапи комп'ютерного моделювання.
15. Валідація і верифікація моделі.