Цифровая обработка сигналов и изображений

Дискретное преобразование Фурье и его свойства

Ортогональность сигналов

Множество непрерывных функций действительного переменного $\{U_n(t)\} = \{U_0(t), U_1(t), \ldots\}$ называется ортогональным на интервале $[t_0; t_0+T]$, если

$$\int_{t_0}^{t_0+T} U_m(t)U_n(t)dt = \begin{cases} c, \forall m = n, \\ 0, \forall m \neq n. \end{cases}$$

При $c = 1$ множество $\{U_n(t)\}$ называется ортонормированным.

Для вычисления сигнала через коэффициенты разложения используется:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n U_n(t).$$

Ортогональность сигналов

Коэффициенты разложения a_n из указанного соотношения можно определить, если умножить обе его части на $U_n(t)$ и проинтегрировать в интервале $[t_0; t_0+T]$:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)U_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{t_0}^{t_0+T} U_n(t)U_m(t)dt$$

В силу условий ортогональности получим

$$a_n = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)U_n(t)dt$$

Теорема Парсеваля

Для доказательства теоремы Парсеваля возведем обе части соотношения в квадрат:

$$x(t)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t)^2 a_n^2 + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_p a_q U_p(t) U_q(t).$$

Проинтегрируем обе части:

$$\frac{1}{T}\int_T x(t)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{T}\int_T U_n(t)^2 dt + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_p a_q \int_T U_p(t) U_q(t) dt.$$

По условию ортогональности:

$$\frac{1}{T}\int_T x(t)^2 dt = \frac{C}{T}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2.$$

Ряд Фурье. Разложение в ряд Фурье

Впервые в 1807 году французский математик и физик Жан Батист Жозеф Фурье показал, что любую произвольную функцию $x(t)$ можно представить в виде бесконечной суммы синусных и косинусных членов:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$$

где ω_0 (рад/с) – основная угловая частота, которая связана с периодом T функции соотношением $n\omega_0$. Частоты $T = 2\pi/\omega_0$

называют гармониками, так как они кратны основной частоте.

В данном случае речь идет о системе ортогональных функций вида

$\{1, \cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t\}$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt; \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos n\omega_o t dt; \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin n\omega_o t dt$$

Ряд Фурье

Коэффициенты $\{a_0, a_n, b_n\}$ можно вычислить с учетом ортогональности множества функций $\{\cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t\}$ на периоде T:

$$\int_T \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = \begin{cases} T/2, m = n, \\ 0, m \neq n; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\int_T \cos n\omega_0 t \sin m\omega_0 t dt = 0, \forall m, n; \qquad (2)$$

$$\int_T \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t dt = \begin{cases} T/2, m = n, \\ 0, m \neq n. \end{cases} \qquad (3)$$

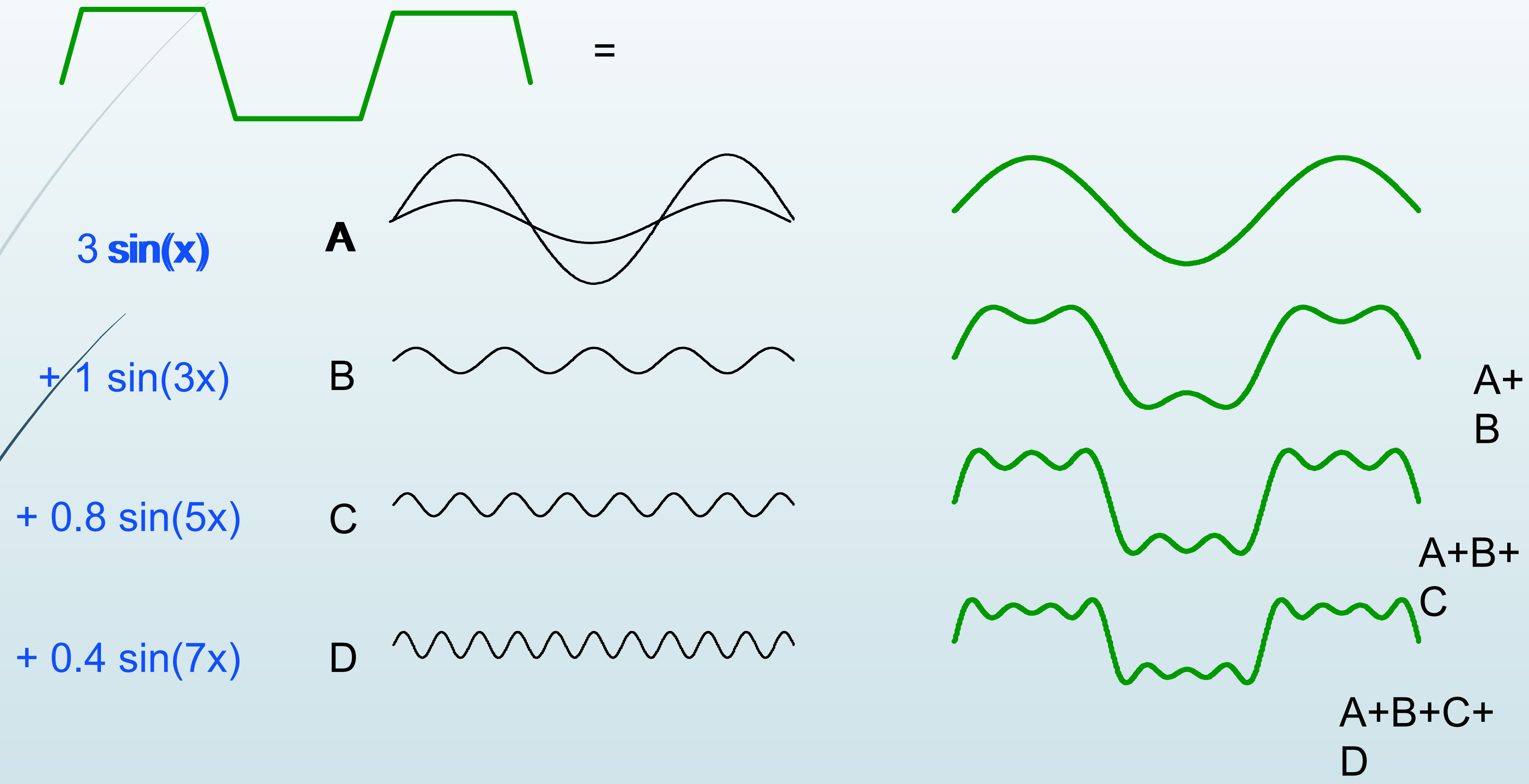
С учетом этих соотношений получаем:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt; \qquad (4)$$

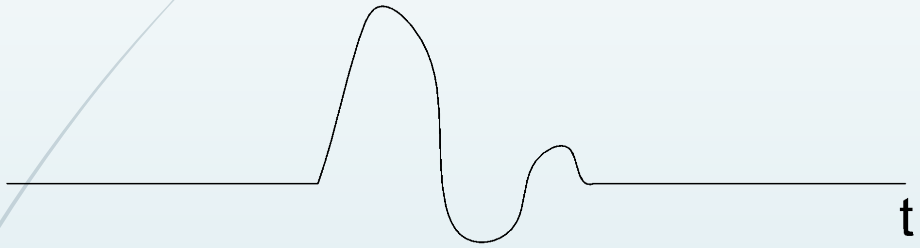
$$a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos n\omega_0 t dt; \qquad (5)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin n\omega_0 t dt. \qquad (6)$$

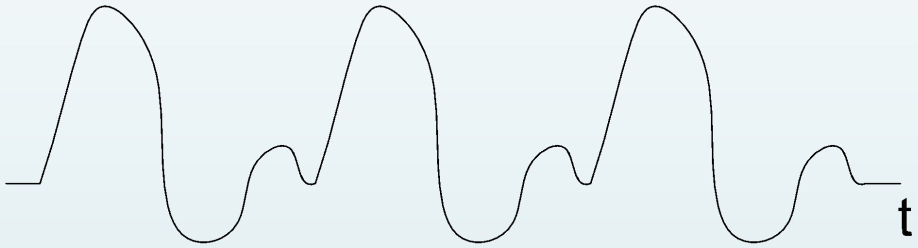
Сумма синусов и косинусов



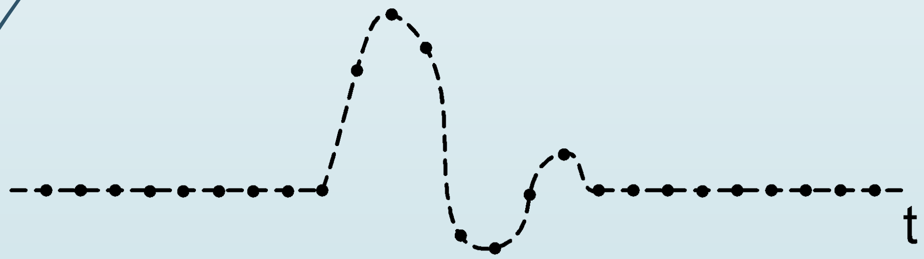
Семейство преобразований Фурье



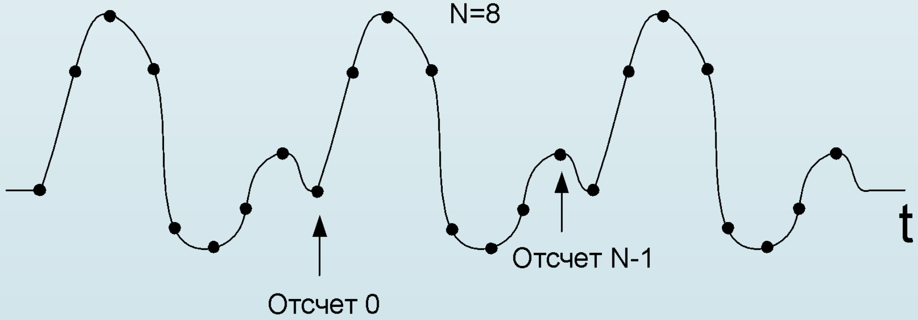
Сигнал непрерывный и апериодический



Сигнал непрерывный и периодический



Сигнал дискретный и апериодический



Сигнал дискретный и периодический

Прямое и обратное непрерывное преобразование Фурье

x(t) – исходная функция времени

Прямое преобразование Фурье $$x(j\omega) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

(отображение исходной функции времени в спектральную область)

Обратное преобразование Фурье $$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} x(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

(восстановление функции по её спектру)

Основная идея дискретного преобразования Фурье

$$C_x(k) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m) W^{km}$$

$$X(m) = \sum_{k=0}^{N-1} C_x(k) W^{-km}$$

$$k = \overline{0, N-1} \qquad i = \sqrt{-1} \qquad W = e^{-i2\pi/N}$$

Обозначения:
$X(m)$ – значение сигнала в момент времени n;
$C_x(k)$ – значение спектра сигнала в точке 2πk;
N – количество отсчетов;

Дискретное преобразование Фурье

Таким образом, если $\{X(m)\}$ означает последовательность $X(m)$ конечных действительных или комплексных чисел, где m = 0, ..., N-1, то дискретное преобразование Фурье этой последовательности определяется как

$$C_x(k) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m)W^{km}, \text{ где } k = 0, \ldots, N\text{-}1,\ W = e^{-i2\pi/N}$$

$$X(m) = \sum_{k=0}^{N-1} C_x(k)W^{-km}.$$

Функции W^{km} являются N-периодическими, т.е. $W^{km} = W^{(k+N)m} = W^{k(m+N)}$. Следовательно, последовательности $\{C_x(k)\}$, $\{X(m)\}$ также являются N-периодическими, т.е.

$$X(\pm m) = X(SN \pm m);$$
$$C_x(\pm k) = C_x(SN \pm k).$$

Основные свойства ДПФ

- Теорема линейности
- Теорема комплексной сопряженности
- Теорема сдвига
- Теорема свертки
- Теорема корреляции

Основные свойства ДПФ

- **Теорема линейности**: ДПФ является линейным, т.е. если

$$X(m) \leftrightarrow C_x(k)$$
$$Y(m) \leftrightarrow C_y(k)$$
$$Z(m) = aX(m) + bY(m)$$

то $C_z(k) = aC_x(k) + bC_y(k)$

- **Теорема комплексной сопряженности**: если

$\{X(m)\} = \{X(0), X(1), ..., X(N-1)\}$ - такая последовательность действительных чисел, что N/2 – целое число и $X(m) \leftrightarrow C_x(k)$, то

$$C_x(\frac{N}{2} + l) = \overline{C_x}(\frac{N}{2} - l), \forall l = \overline{0, N/2}$$

- **Теорема сдвига**: если $Z(m) \leftrightarrow C_z(k)$ и $Z(m) = X(m+h)$, $h = \overline{0, N-1}$,

то $C_z(k) = W^{-kh} C_x(k)$ $W = e^{-i2\pi/N}$

Основные свойства ДПФ. Теорема свертки

Если $\{X(m)\}$ и $\{Y(m)\}$ - последовательность действительных чисел, при которых $Y(m) = C_y(k)$, $X(m) = C_x(k)$, а свертка этих последовательностей определяются как

$$Z(m) = \frac{1}{N}\sum_{h=0}^{N-1} X(h)Y(m-h), m = 0,1,\ldots,N-1$$

то $C_z(k) = C_x(k)C_y(k)$

Суть:

свертка временных последовательностей эквивалентна умножению их коэффициентов ДПФ

Основные свойства ДПФ. Теорема корреляции

Если $\{X(m)\}$ и $\{Y(m)\}$ - последовательность действительных чисел, при которых $X(m) = C_x(k)$, $Y(m) = C_y(k)$, а корреляция этих последовательностей определяются как

$$\hat{Z}(m) = \frac{1}{N}\sum_{h=0}^{N-1} X(h)Y(m+h), m = 0,1,\dots, N-1$$

то $C_{\hat{Z}}(k) = \overline{C_x}(k)C_y(k)$

Теорема Парсеваля

Под теоремой Парсеваля обычно понимают унитарность преобразования Фурье. То есть сумма (или интеграл) квадрата функции равна сумме (или интегралу) квадрата результата преобразования

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F\{x(t)\}|^2 dt,$$

где $F\{*\}$ обозначает непрерывное преобразование Фурье, которое связывает временной или пространственный сигнал $x(t)$ с его представлением в частотной области $X(f)$.

В дискретном виде теорему записывают следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{N-1} |x(i)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2,$$

где $X(k)$ представляет собой дискретное преобразование Фурье сигнала $x(i)$, имеющего N отсчетов.