Переходные процессы
в линейных электрических цепях

Общие вопросы и законы коммутации

Процессы, протекающие в электромагнитных системах при переходе от одного состояния к другому, при котором энергия электрического и магнитного полей и обуславливающие их величины – напряжение и ток изменяются, называются ***переходными***.

Процесс перехода от одного установившегося состояния к другому протекает не мгновенно (скачком), а постепенно, так как если предположить, что энергия изменится мгновенно за время $t = 0$, то мощность, необходимая для этого $P = dw / dt = w / 0 = \infty$, оказалась бы равной бесконечности, чего в природе не существует.

В электрических цепях, содержащих *R*, *L*, *C*, переходной процесс возникает при включении, выключении и изменении параметров цепи. Такой процесс называют ***коммутацией***. После коммутации изменяется энергия индуктивного $W_L = LI^2/2$ и емкостного $W_C = CU^2/2$ элементов. Так как энергия скачком измениться не может, следовательно, ток в индуктивности и напряжение на конденсаторе не могут изменяться мгновенно. Из этого вытекают первый и второй законы коммутации.

Первый закон коммутации: **ток в цепи с индуктивностью не может изменяться скачком.**

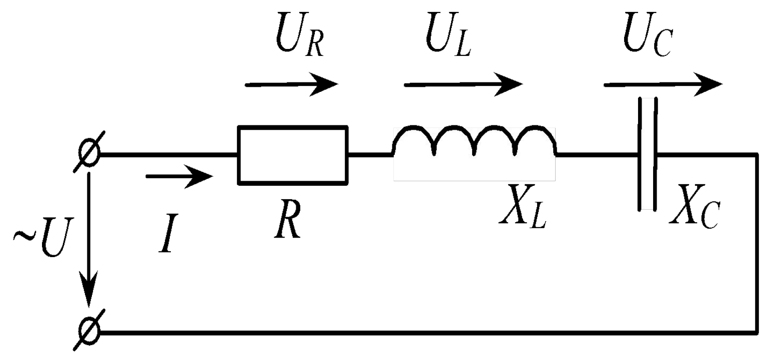
Второй закон коммутации**: напряжение на зажимах конденсатора не может изменяться скачком.**

Индуктивные и емкостные элементы являются инерционными, вследствие чего для изменения энергетического состояния электрической цепи требуется некоторое время (до нескольких секунд). Однако в это время напряжения и ток достигают больших значений, иногда опасных для электроустановок.

Для определения токов и напряжений в переходных режимах применяют классический метод, основанный на составлении линейных неоднородных дифференциальных уравнений с помощью законов Кирхгофа.

Так, режим цепи синусоидального тока при последовательном соединении *R*, *L*, *C* и напряжении источника питания $u = U_{max} \sin\omega t$ описываются уравнением

$$Ri + L\,di/dt + 1/C \int i\,dt = U_{max} \sin\omega t.$$



Полное решение такого неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами ищут в виде

$$i = i' + i'',$$ **где**

i' **(установившейся ток) − частное решение данного неоднородного уравнения;**

i'' **(свободный ток) − общее решение однородного дифференциального уравнения.**

Таким образом, полное решение дифференциального уравнения позволяет определить:

ток в цепи в переходном режиме

$$i = i' + i'',$$

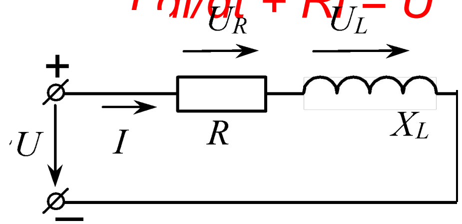
или напряжение на элементах цепи

$$u = u' + u''.$$

Подключение катушки индуктивности с R, L к сети с постоянным напряжением

Проведем анализ переходного процесса в цепи и определим i', i'', u_R, u_L,
если известны U, R, L. Составим уравнение по второму закону Кирхгофа и
запишем решение:

$$L\,di/dt + Ri = U$$



Ток в установившемся режиме $i' = U/R$.

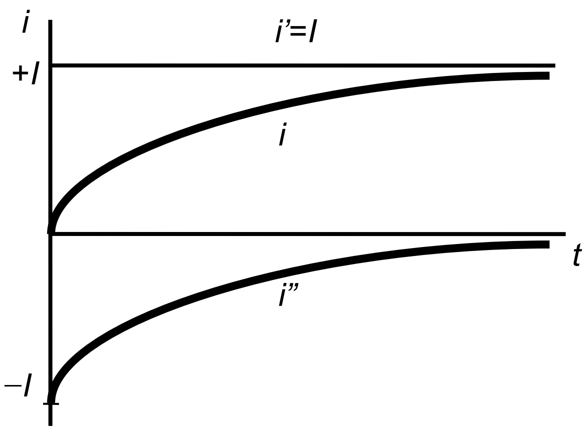
Свободный ток i'' находят, решая однородное дифференциальное уравнение

$$L\,di''/dt + Ri'' = 0$$

Решение этого уравнения ищут в виде $i'' = Ae^{pt}$, где p – корень характеристического
уравнения $Lp + R = 0$. Таким образом, $p = -R\,/\,L$, а ток в переходном режиме

$$i = U/R + Ae^{-Rt/L} = U/R + Ae^{-t/\tau}$$

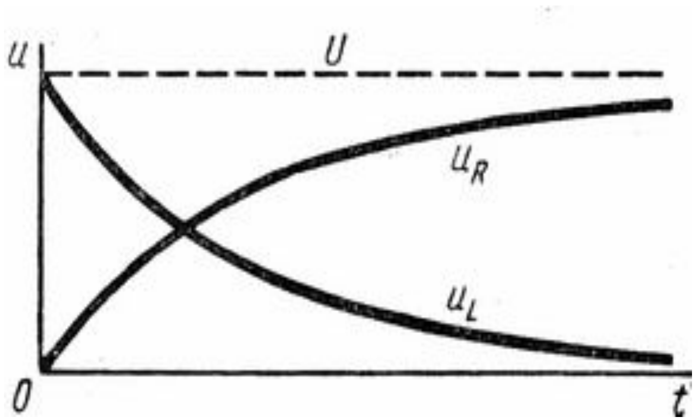
где $\tau = L\,/\,R$ – постоянная времени цепи.



Изменение токов в цепи с последовательным соединением элементов с *R* и *L* при включении цепи на постоянное напряжение

Из начальных условий с учетом первого закона коммутации определяем постоянную интегрирования ***A***: при t = 0 ток в цепи равен нулю. Получаем *A= −U/R*. *Тогда:*

$$i = U/R - (U/R)e^{-t/\tau} = I\,(1 - e^{-t/\tau})$$



Изменение напряжения на резисторе и индуктивной катушке при включении цепи на постоянное напряжение

Напряжение на резисторе

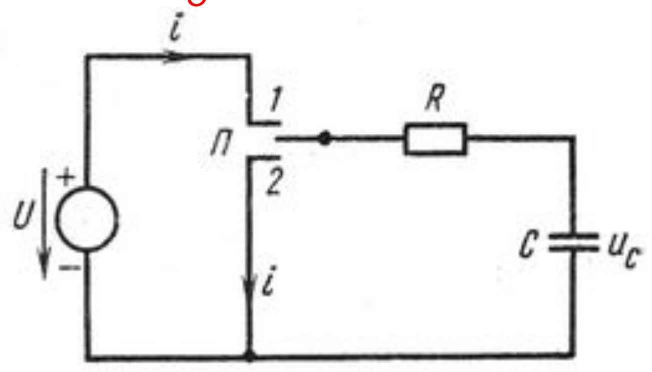
$u_R = Ri = U - Ue^{-t/\tau} = U(1 - e^{-t/\tau})$ ***изменяется так же, как ток, а напряжение на индуктивности изменяется следующим образом:***

$$u_L = L\,di/dt = LUe^{-t/\tau} / (RL/R) = Ue^{-t/\tau}$$

Переходные процессы при заряде и разряде конденсатора

Для переходного процесса зарядки конденсатора (переключатель П в положении
включено 1), можно записать

$$Ri + u_C = U.$$



Ток в цепи

$$i = C du_C/dt$$

Подставляя выражение в предыдущую формулу, получим

$$RC du_C/dt + u_C = U.$$

Тогда напряжение на конденсаторе

$$u_C = u_C' + u_C''.$$

Свободное напряжение u_C'' находят, решая однородное дифференциальное уравнение

$$RC du''_C/dt + u''_C = 0,$$

которому соответствует характеристическое уравнение $RCp + 1 = 0$, откуда,

$$p = -1/(RC).$$

Следовательно, свободное напряжение на конденсаторе

$$U''_C = Ae^{pt} = Ae^{-t/RC} = Ae^{-t/\tau} \qquad \text{где} \quad \tau = RC$$

Таким образом, напряжение на конденсаторе в переходном режиме

$$u_C = u_C' + Ae^{-t/\tau}$$

а ток

$$i = i' - \frac{A}{R}e^{-t/\tau}$$

причем $i' = Cdu'_c / dt$,

$$i'' = Cdu''_c / dt = - \frac{A}{R}e^{-t/\tau}$$

Постоянную интегрирования *A* находят с учетом второго закона коммутации из начальных условий работы цепи, которые различны для процессов заряда и разряда конденсатора.

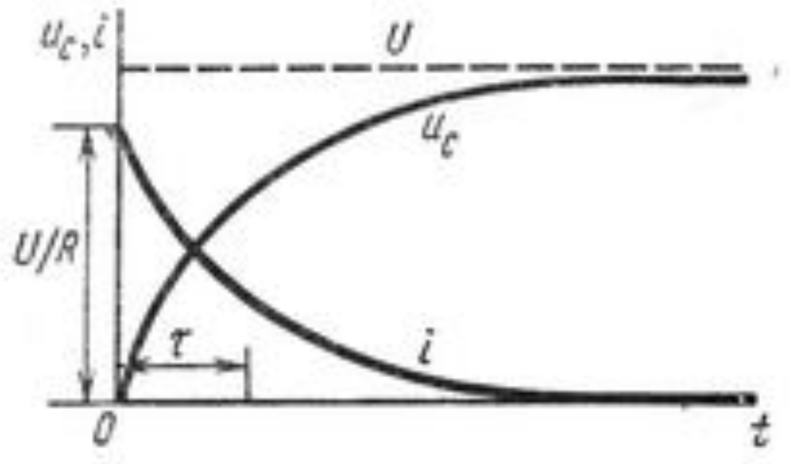
Зарядка конденсатора.

Напряжение в переходном режиме при зарядке конденсатора изменяется по закону

$$u_C = U(1 - e^{-t/\tau})$$

Установившийся ток в цепи $i' = 0$, а $A = - U$, тогда

$$i = (U/R)e^{-t/\tau}$$



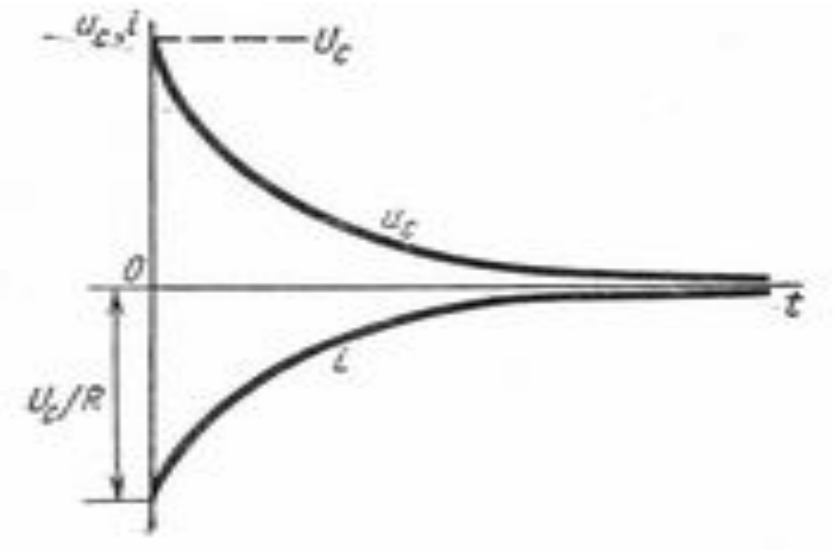
Разрядка конденсатора. Если переключатель П включить в положение 2, то заряженный конденсатор начнет разряжаться на резистор R. Принимая $u'_C = 0$ и находя из начальных условий u_c (при $t = 0$, $u_C = U_C$), а постоянная интегрирования

$A = U_C$ получим, что напряжение на конденсаторе равно

$$u_C = U_C e^{-t/\tau},$$ а ток

с учетом, что $i' = 0$,

$$i = -\,(U/R)\, e^{-t/\tau}.$$



Изменение напряжения на конденсаторе и тока в цепи при разрядке конденсатора

источнику
постоянного напряжения U = 30 В. Найти закон изменения тока $i = (t)$, постоянную времени τ.
Определить ток катушки в момент времени t_1 = 0,1 после замыкания ключа.

Решение. Согласно второму закону Кирхгофа уравнение электрического состояния цепи в послеком-
мутационном режиме имеет вид

$$U = Ri + Ldi/dt$$

Решение уравнения находим как сумму установившейся и свободной составляющих тока:

$$i = i´ + i´´$$

Установившуюся составляющую тока определяем из расчета цепи в установившемся режиме, т. е.

$$i´ = U/R = 6 \text{ А},$$

а свободную составляющую – из общего решения однородного уравнения

$$0 = Ri´´ + Ldi´´/dt ; \quad i = Ae^{pt},$$

при t ≡

где p ≡ - R/L – корень характеристического уравнения 0 = $R + Lp$; τ = 1/p = L/R = 0,1с – постоянная
времени цепи.

Постоянную интегрирования А находим из начальных условий с помощью первого закона
коммутации при t = 0:

$$i(0) = U/R + Ae^{-t/τ}$$

$$0 = 6 + A; \ A = -6.$$

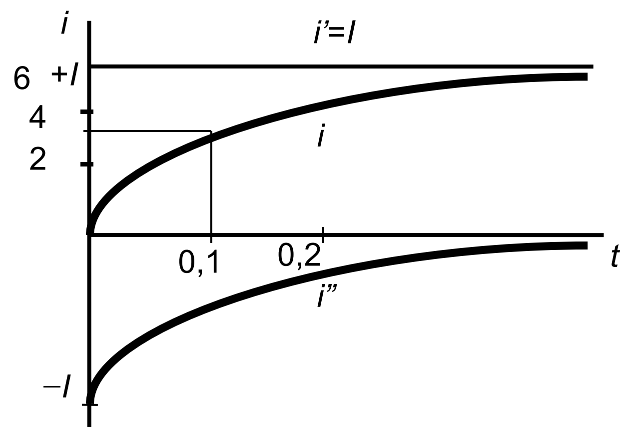
Таким образом, ток катушки изменяется по закону

$$i = 6(1 – e^{-t/0,1}), \text{ А}$$

Диаграммы i(t) приведены на рисунке.

В момент времени t = 0,1 с

$$i(0,1) = 6(1 – e^{-1}) = 3,8 \text{ А}$$



Изменение токов в цепи с последовательным соединением элементов с R и L при включении цепи на постоянное напряжение