Критичность ограниченных размножающих сред

кафедра
«Теоретическая и экспериментальная физика ядерных реакторов»
доцент
Савандер В.И.

Одногрупповое диффузионное приближение

- Для выяснения чисто пространственных эффектов в конечных размножающих средах введем ряд упрощающих предположений:
- Рассматривается однородная размножающая среда, занимающая некоторый объем V;
- Пренебрегаем энергетической зависимостью потока нейтронов (одногрупповое приближение)
- Для учета углового распределения нейтронов рассмотрим функцию полного потока и полного тока нейтронов (P1 – приближение)
- $$\Phi(\vec{r}) = \int\limits_{4\pi} d\vec{\Omega}\,\Phi(\vec{r},\vec{\Omega}), \quad \vec{I}(\vec{r}) = \int\limits_{4\pi} \vec{\Omega}\,\Phi(\vec{r},\vec{\Omega})\,d\vec{\Omega}$$

Одногрупповое диффузионное приближение

- В отсутствии в размножающей среде сильных локальных поглотителей и для областей активной зоны, удаленных от границы реактора с пустотой связь между этими величинами дается законом Фика:

$$\vec{I} = -D\nabla\Phi, \quad \text{где} \quad D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}}, \quad \Sigma_{tr} = \Sigma_t - \mu\Sigma_s$$

- Одногрупповое диффузионное приближение

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{I}(\vec{r},t) - \Sigma_a \cdot \Phi(\vec{r},t) + \nu_f \Sigma_f \cdot \Phi(\vec{r},t),$$

$$\Phi(\vec{r},t) = V \cdot n(\vec{r},t).$$

Одногрупповое диффузионное приближение

Для стационарного случая

$$\Phi(r,t) \equiv \Phi(r),$$

$$D\Delta\Phi(\vec{r}) - \Sigma_a \Phi(\vec{r}) + \nu\Sigma_f \Phi(\vec{r}) = 0.$$

Рассмотрим простейший случай так называемого «голого» реактора, когда размножающая среда граничит с вакуумом.

В одногрупповом диффузионном приближении точное граничное условие заменяется приближенным

$$i^-(\vec{r}_s) = 0, \quad i^-(\vec{r}_s) = \frac{\Phi(\vec{r}_s)}{4} + \frac{1}{2} D \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\vec{r}_s) = 0.$$

Одногрупповое диффузионное приближение

- Разлагая Ф(r) вблизи границы с вакуумом в ряд до линейного члена, получим:

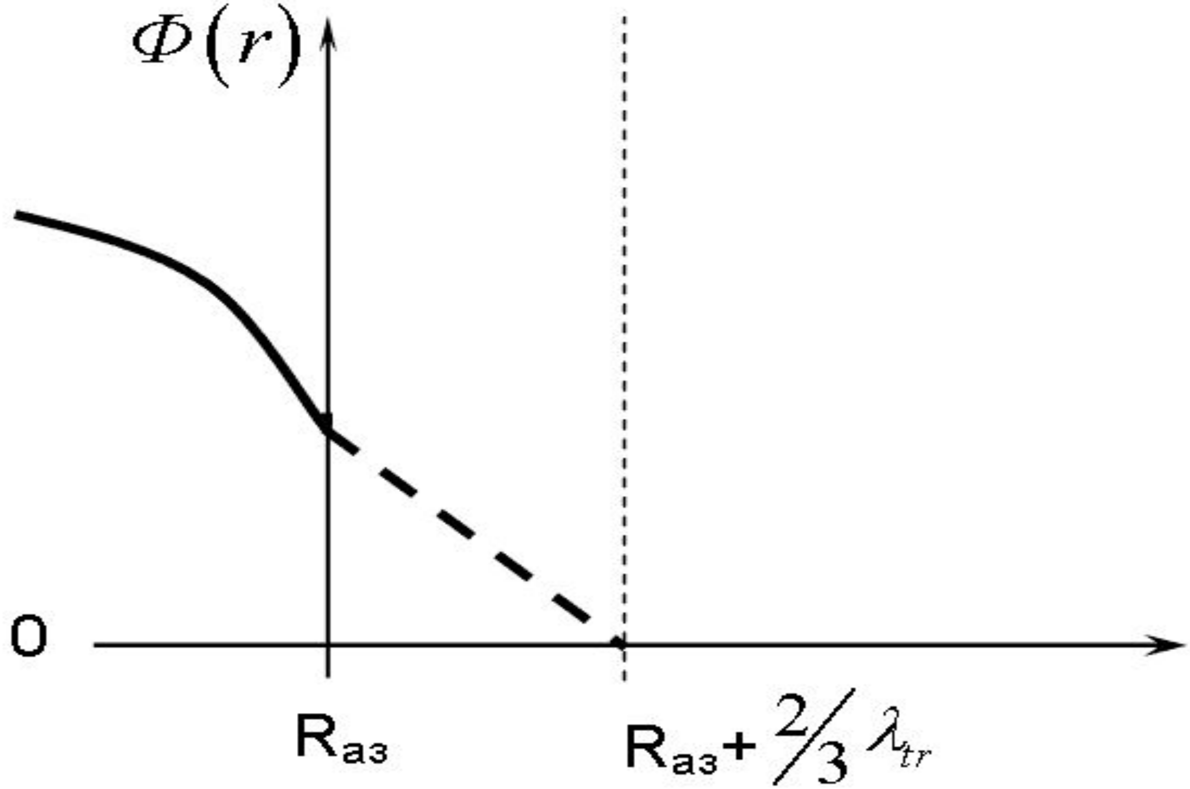
$$\Phi(\vec{r}_s + x\cdot\vec{n}) \cong \Phi(\vec{r}_s) + \frac{\partial\Phi}{\partial n}(\vec{r}_s)\cdot x = \Phi(\vec{r}_s)(1 - \frac{x}{2D}).$$

- Если теперь экстраполировать распределение нейтронов за пределы среды в пустоту, то экстраполированный поток нейтронов обратится в нуль на расстоянии

$$\mathrm{x} = \frac{2}{3}\lambda_{tr}$$

- от геометрической границы реактора. Эта величина называется экстраполированной добавкой среды

Одногрупповое диффузионное приближение



Одногрупповое диффузионное приближение

- общая постановка задачи в одногрупповом диффузионном приближении такова: требуется найти ограниченное положительное решение задачи:

$$D\Delta\Phi(\vec{r}) - \Sigma_a \cdot \Phi(\vec{r}) + \nu\Sigma_f \cdot \Phi(\vec{r}) = 0,$$

$$\Phi(\vec{r}_{extr}) = 0.$$

- Введем следующие обозначения:

$$\chi^2 = \frac{K_\infty - 1}{L^2}; \quad K_\infty = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a}, \quad L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$$

Одногрупповое диффузионное приближение

- $\chi^2 = \dfrac{K_\infty - 1}{L^2}$ – материальный параметр среды
-
- $L = \sqrt{\dfrac{D}{\Sigma_a}}$ - длина диффузии нейтронов в размножающей среде

$$\Delta\Phi + \chi^2\Phi = 0,$$

$$\Phi(\vec{r}_{extr}) = 0.$$

- Это задача на определение собственных чисел и собственных функций оператора Лапласа

Одногрупповое диффузионное приближение

- Наименьшему собственному значению соответствует знакопостоянная собственная функция $\Psi_0(\vec{r})$

$$\Delta\Psi_0(\vec{r}) = -\alpha_0^2\Psi_0(\vec{r}), \quad \Psi_0(\vec{r}_{extr}) = 0.$$

- Стационарное решение будет только в том случае

$$\chi^2 = \alpha_0^2$$

- Величина $(\alpha_0)^2$ - геометрический параметр определяется геометрией объема среды.

Одногрупповое диффузионное приближение

- Функция пространственного распределения потока нейтронов

$$\Phi(\vec{r}) = C \cdot \Psi_0(\vec{r})$$

- условие критичности реактора и означает, что для размножающей среды заданной геометрической формы существуют такие размеры, при которых в этой среде возможен стационарный процесс размножения нейтронов (деления ядер). Соответствующие размеры такой среды называются критическими размерами, а отвечающий этим размерам объем мультиплицирующей среды – критическим объемом. Масса делящегося вещества в такой среде называется критической массой.

Сферический реактор

- В сферически симметричном случае лапласиан имеет вид: $$\Delta\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\Psi}{dr}$$

- геометрический параметр определяется из решения волнового уравнения:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\Psi}{dr} + \alpha^2\Psi = 0,$$
$$\Psi(r_{extr}) = 0.$$

Сферический реактор

- Общее решение этого уравнения

$$\Psi(r) = C_1 \cdot \frac{\sin(\alpha \cdot r)}{r} + C_2 \cdot \frac{\cos(\alpha \cdot r)}{r}.$$

- Условие ограниченности решения задачи

$$\Psi(r) = C \cdot \frac{\sin(\alpha \cdot r)}{r}$$

- Граничное условие

$$\sin(\alpha \cdot R) = 0; \quad \alpha_n \cdot R = \pi \cdot (n+1), \quad n = 0,1,\ldots$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{R} \cdot (n+1), \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{R}.$$

- Условие критичности

$$\frac{K_\infty - 1}{L^2} = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2$$

Сферический реактор

- Критический радиус активной зоны

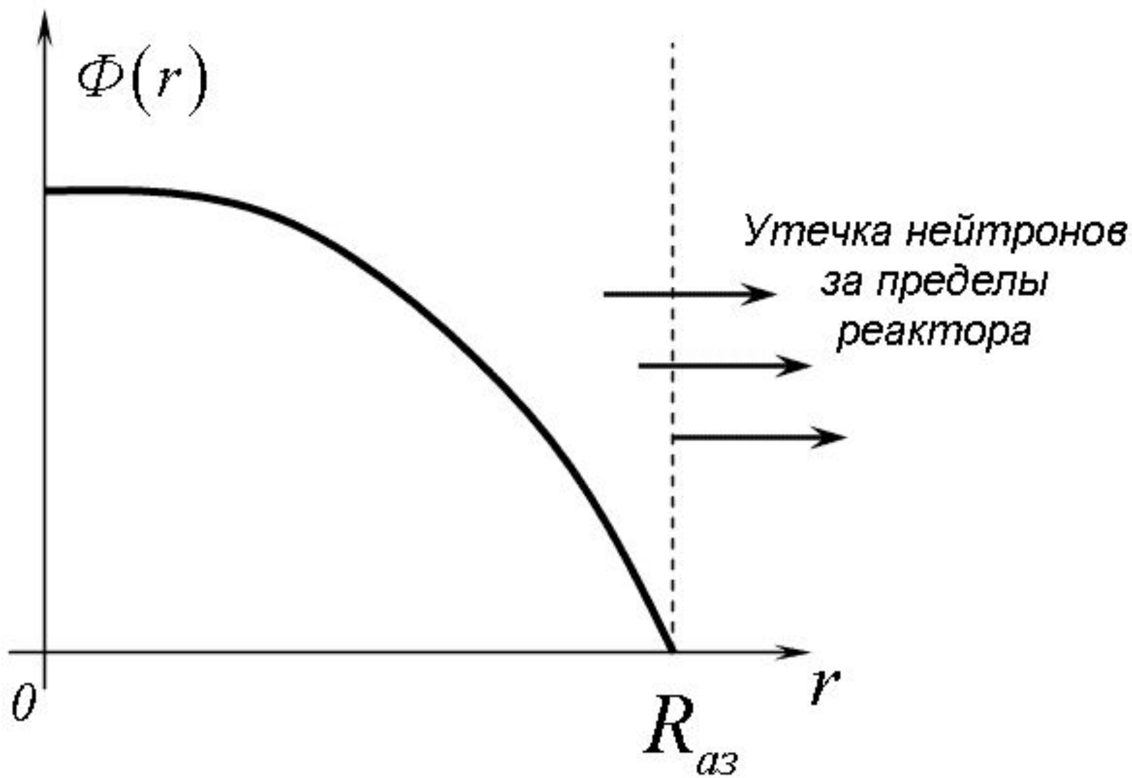
$$R = \frac{\pi}{\chi}, \quad R = \frac{\pi}{\sqrt{(K_\infty - 1)}} \cdot L.$$

- Константа С определяется из условия нормировки на мощность

$$W = E_f \int_0^{R_0} \Sigma_f \cdot \Phi(r) \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi \cdot C \cdot E_f \cdot \Sigma_f \int_0^{R_0} \sin(\alpha_0 \cdot r) r^2 dr$$

- Пространственное распределение потока нейтронов характеризуется спадом потока нейтронов к границе реактора, поскольку через границу реактора происходит утечка нейтронов в вакуум

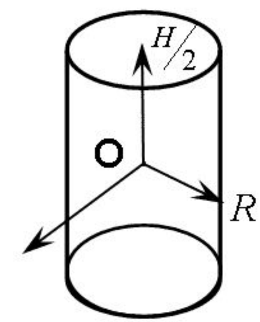
Сферический реактор



Цилиндрический реактор

Рассмотрим цилиндрическую активную зону радиуса R и высоты H

Задача на определение геометрического параметра



$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \alpha^2 \Psi = 0, \qquad \Psi = \Psi(r, z)$$

$$\Psi(R, z) = 0 \quad \forall z, \qquad \Psi(r, \pm\frac{H}{2}) = 0 \ \ \forall r, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r}\left(0, z\right) = 0 \ \ \forall z$$

Цилиндрический реактор

- Метод разделения переменных $\Psi(r,z) = Y(r)\cdot Z(z)$

$$\frac{1}{Y}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dY}{dr}\right)+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -\alpha^2$$

$$\alpha^2 = \alpha_r^2 + \alpha_z^2$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dY}{dr}+\alpha_r^2\cdot Y = 0, \quad \frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{dr}}(0) = 0, \quad Y(R) = 0,$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+\alpha_z^2\cdot Z = 0, \quad \frac{\mathrm{dZ}}{\mathrm{dz}}(0) = 0, \quad \mathrm{Z}\left(\pm\frac{\mathrm{H}}{2}\right) = 0$$

Цилиндрический реактор

- Общее решение уравнений с учетом ограниченности потока нейтронов

$$Y(r) = C_1 \cdot J_0(\alpha_r \cdot r)$$

$$Z(z) = D_1 \cdot \sin(\alpha_z \cdot z) + D_2 \cdot \cos(\alpha_z \cdot z)$$

- Из краевых условий

$$J_0(\alpha_r \cdot R) = 0, \;\; \to \alpha_r \cdot R = \xi_n, \;\; \to \alpha_r^{(n)} = \frac{\xi_n}{R},$$

$$\cos\left(\alpha_z \cdot \frac{H}{2}\right) = 0, \;\; \to \alpha_z \cdot \frac{H}{2} = \frac{\pi}{2}(n+1), \;\; \to \alpha_z^{(n)} = \frac{\pi}{H}(n+1)$$

Цилиндрический реактор

- геометрический параметр для цилиндрической активной зоны и распределение плотности потока нейтронов в реакторе:

$$\alpha_r^{(0)} = \frac{\xi_0}{R}, \quad \alpha_z^{(0)} = \frac{\pi}{H}, \qquad \alpha_0^2 = \left(\frac{\xi_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$$

$$\Psi(r,z) = C \cdot J_0\left(\frac{\xi_0}{R} \cdot r\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{H} \cdot z\right), \ \xi_0 \approx 2.405$$

- Условие критичности $\left(\frac{2.405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 = \frac{K_\infty - 1}{L^2}$

Цилиндрический реактор

Рассмотрим частный случай $\alpha_r^2 = \chi^2, \quad R = \frac{\xi_0}{\chi}$
то критичность реактора достигается при бесконечной высоте . Для тех цилиндров, радиус которых меньше R, критичность не достигается ни при каком значении высоты цилиндра.

Если высоту цилиндра взять из условия $\alpha_z^2 = \chi^2, H = \frac{\pi}{\chi}$
то критичность такого реактора достигается только при бесконечно большом радиусе цилиндра. Если высота активной зоны меньше H, то реактор при любом радиусе будет подкритичным. Это примеры некритических объемов.

Цилиндрический реактор

- Из условия критичности для цилиндра следует, что при заданном материальном параметре размножающей среды получается бесконечное множество критических активных зон. Среди них есть такой цилиндр, у которого минимальный объем.
- <u>Постановка задачи:</u> найти минимум функции двух переменных $V = \pi R^2 H$ с учетом условия связи между переменными $$\left(\frac{\pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{\xi_0}{R}\right)^2 = \chi^2$$

Цилиндрический реактор

- используя ограничение, выразим одну из переменных через другую

$$R^2 = \frac{\xi_0^2 \cdot H^2}{\chi^2 \cdot H^2 - \pi^2}, \quad \mathrm{V} = \frac{\pi \cdot \xi_0^2 \cdot H^3}{\chi^2 \cdot H^2 - \pi^2}$$

- Условие экстремальности критического объема

$$\frac{dV}{dH} = \pi \cdot \xi_0^2 \left[\frac{3H^2 \cdot (\chi^2 H^2 - \pi^3) - 2\chi^2 H^4}{(\chi^2 H^2 - \pi^2)^2} \right] = 0$$

- находим радиус и высоту оптимального цилиндра:

$$H = \frac{\sqrt{3}\pi}{\chi}, \quad R = \frac{2\xi_0}{\sqrt{3}\chi}, \quad V_{\text{кр}}^{(\text{цил})} = \frac{3\sqrt{3}\pi^2\xi_0^2}{\chi^3}, \quad \frac{V_{\text{кр}}^{(\text{цил})}}{V_{\text{кр}}^{(\text{сфер})}} = \frac{9\sqrt{3}\xi_0^2}{4\pi} = 1.14$$

Сферический реактор

- Рассмотрим влияние плотности размножающей среды на критичность реактора. Критический радиус и критический объем сферы

$$R_{\text{кр}} = \frac{\pi}{\sqrt{(K_\infty - 1)}} L, \quad V_{\text{кр}} = \frac{4}{3}\pi R_{\text{кр}}^3, \quad M_{\text{кр}} = \gamma_{\text{топл}} \cdot V_{\text{кр}}.$$

- Предположим, что плотность размножающей среды изменилась, а соотношение топлива и замедлителя осталось неизменным $C = \rho_{\text{зам}} / \rho_{\text{топл}}$
- коэффициент размножения при этом не должен измениться

Сферический реактор

$$K_\infty = \frac{\nu\bar{\Sigma}_f}{\bar{\Sigma}_a} = \frac{\nu\bar{\sigma}_f \cdot \rho_{\text{топл}}}{\bar{\sigma}_a^{(\text{топл})} \cdot \rho_{\text{топл}} + \bar{\sigma}_a^{(\text{зам})} \cdot C \cdot \rho_{\text{топл}}} = \frac{\nu\bar{\sigma}_f}{\bar{\sigma}_a^{(\text{топл})} + \bar{\sigma}_a^{(\text{зам})} \cdot C}$$

- Изменится величина длины диффузии

$$L = \sqrt{\frac{D}{\bar{\Sigma}_a}} = \sqrt{\frac{1}{3\bar{\Sigma}_{tr} \cdot \bar{\Sigma}_a}} = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{1}{3 \cdot \bar{\sigma}_{tr} \cdot \bar{\sigma}_a}}$$

- Таким образом $L \sim 1/\rho$ а $V_{\text{кр}} \sim \frac{1}{\rho^3}$
- Учитывая, что ρ~γ , получим $M_{\text{кр}} \sim 1/\gamma^2$.
- Так, например, если плотность ядерного материала увеличить в два раза, то критическая масса уменьшится в четыре раза

Эффективный коэффициент размножения

- Для ограниченных размножающих сред также можно ввести понятие коэффициента размножения, так называемый эффективный коэффициент размножения .
- Рассмотрим некритическую среду. Некритичность связана с тем, что нарушен баланс между числом генерируемых реакцией деления нейтронов
- $\nu_f \Sigma_f \cdot \Phi$ и поглощением и утечкой нейтронов из активной зоны $D\Delta\Phi - \Sigma_a \Phi \cdot$.

Эффективный коэффициент размножения

- Для сохранения баланса разделим источник нейтронов на некоторое число $K_{эф}$. Для критического реактора $K_{эф}=1$. Для подкритического $K_{эф}<1$, а для надкритического $K_{эф}>1$.

$$D\Delta\Phi - \Sigma_a \cdot \Phi + \frac{\nu_f \Sigma_f \cdot \Phi}{K_{ef}} = 0$$

- Такой реактор называется условно критическим

$$D\Delta\Phi + \left(\frac{K_\infty}{K_{ef}} - 1\right) \cdot \Sigma_a \cdot \Phi = 0$$

Эффективный коэффициент размножения

Запишем условие критичности для этого реактора

$$\chi^2 = \frac{K_\infty / K_{\text{эф}} - 1}{L^2} = \alpha_0^2$$

$$K_{\text{эф}} = \frac{K_\infty}{1 + \alpha_0^2 \cdot L^2}$$

эффективный коэффициент размножения учитывает не только размножающие свойства среды, но и форму, и размеры активной зоны реактора.

Для бесконечного реактора $\alpha_0^2 = 0, \quad K_{\text{эф}} = K_\infty$

Эффективный коэффициент размножения

проинтегрируем уравнение условно-критического реактора по объему активной зоны

$$-I - N_a + \frac{K_\infty}{K_{эф}} N_a = 0$$

где I - утечка нейтронов из реактора, равная числу нейтронов, покидающих активную зону реактора в единицу времени:

$$\int_{V_{аз}} D\Delta\Phi dV = \int_{V_{аз}} D\nabla\Phi d\vec{V} = -\oint_{S_{аз}} \vec{J} d\vec{S} = -I$$

$N_a = \int_{V_{аз}} \Sigma_a \Phi(\vec{r}) dV$ -скорость поглощения, равная числу нейтронов, поглощенных в активной зоне в единицу времени

Эффективный коэффициент размножения

- $K_\infty \cdot N_a = N_f$ - скорость генерации нейтронов
- Из этого баланса выразим эффективный коэффициент размножения:

$$K_{эф} = \frac{N_f}{N_a + I} = \frac{N_f}{N_a} \cdot \frac{N_a}{N_a + I} = K_\infty \cdot P_a$$

- где $\frac{N_f}{N_a} = K_\infty$ а $\frac{N_a}{N_a + I} = P_a$ вероятность нейтрону,
- рожденному в активной зоне, поглотится в ней.

$$P_a = \frac{1}{1 + \alpha_0^2 \cdot L^2}$$

Эффективный коэффициент размножения

- в активной зоне условно-критического реактора, в котором , скорость рождения нейтронов равно скорости поглощения и утечки нейтронов $К_{эф}=1$
- В общем случае

$$K_{эф} = \frac{K_{\infty}}{1 + \alpha_0^2 \cdot L^2}$$