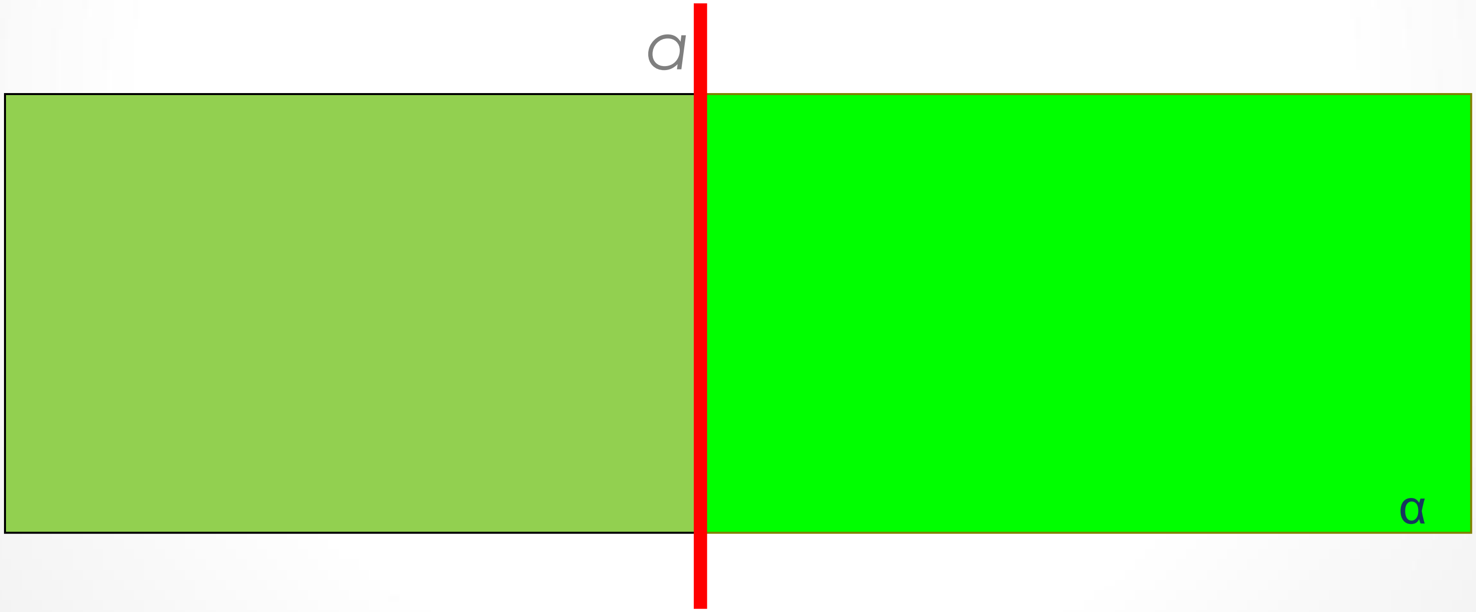
Двугранный угол. Угол между плоскостями.

Основные понятия

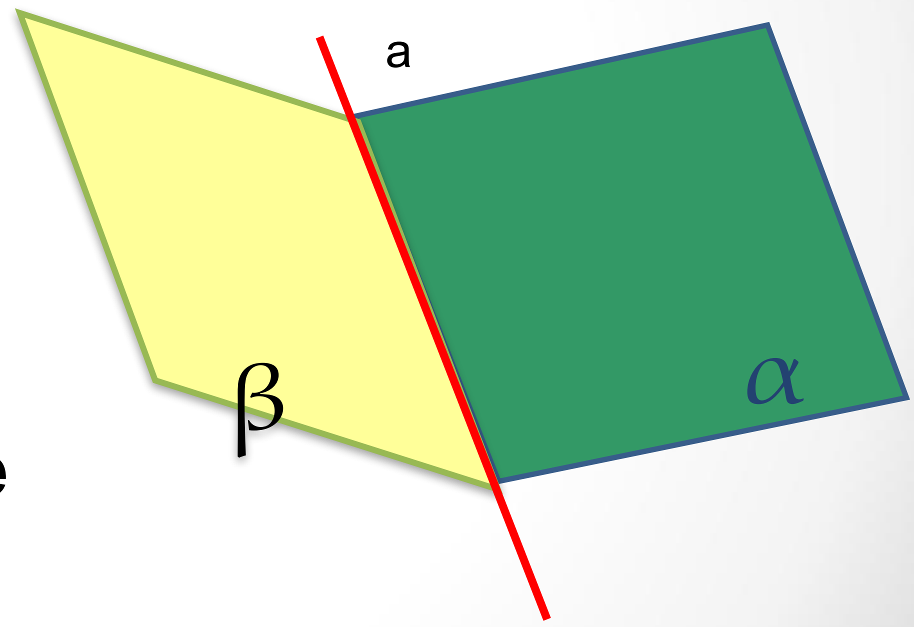
- **Прямая *а* разделяет плоскость на две полуплоскости**



Общая граница полуплоскостей а называется ребром двугранного угла.

Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его гранями.

Двугранным углом называется фигура, образованная прямой а и двумя полуплоскостями с общей границей а, не прилежащими одной плоскости.

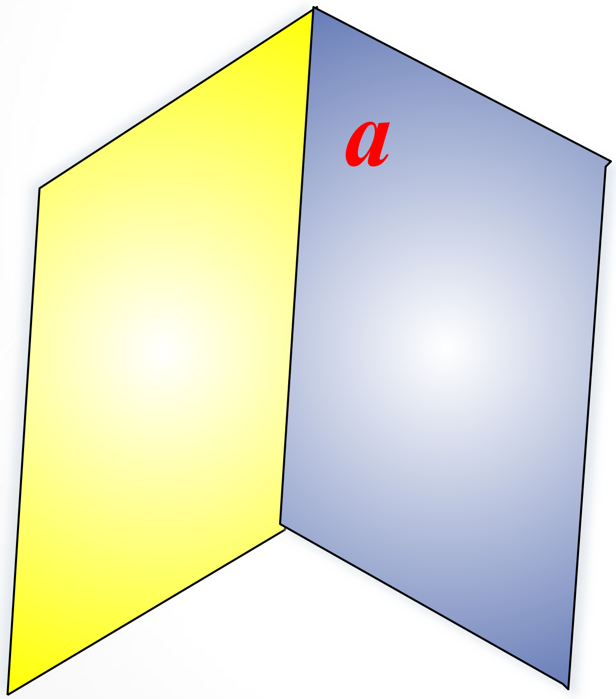


Назовите предметы, имеющие форму двугранного угла

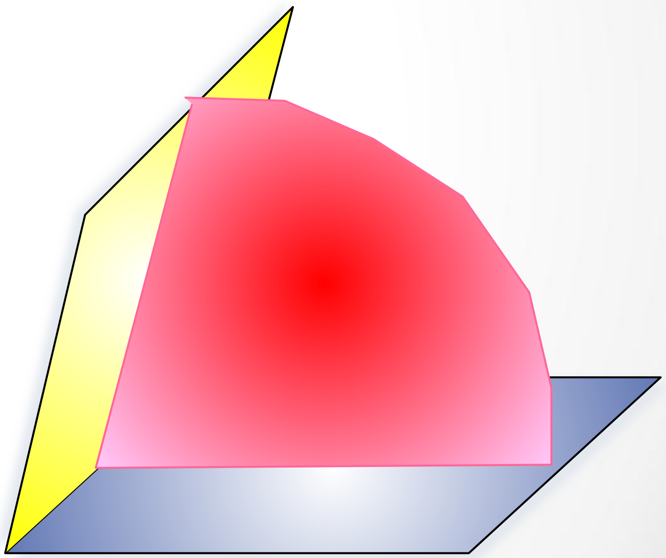
Угол между плоскостями – это двугранный угол .

Т.е. - это угол, образованный некоторой прямой *a* и двумя полуплоскостями с общей границей *a*.

Прямая *a* – ребро двугранного угла



Двугранный угол



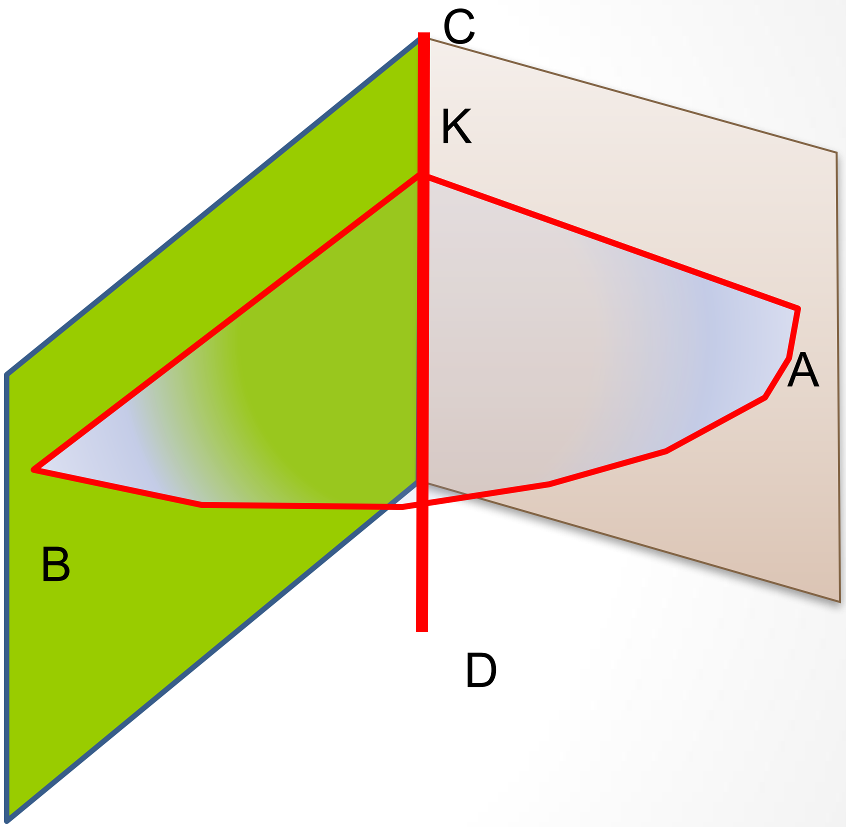
Две полуплоскости – грани двугранного угла

Две пересекающиеся плоскости образуют две пары равных между собой двугранных углов.

Величиной угла между плоскостями называется величина меньшего двугранного угла.

Линейный угол

Линейным углом двугранного угла называется угол, образованный лучами с вершиной на граничной прямой, стороны которого лежат на гранях двугранного угла и перпендикулярны граничной прямой.

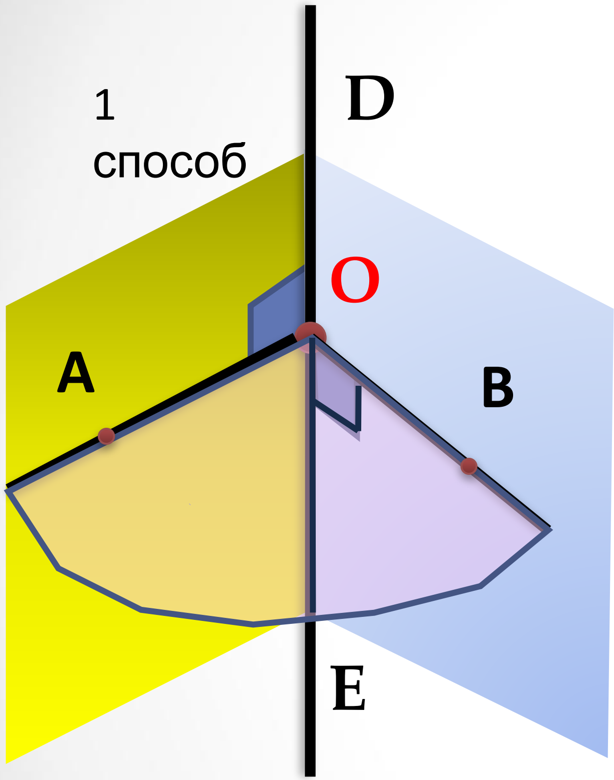


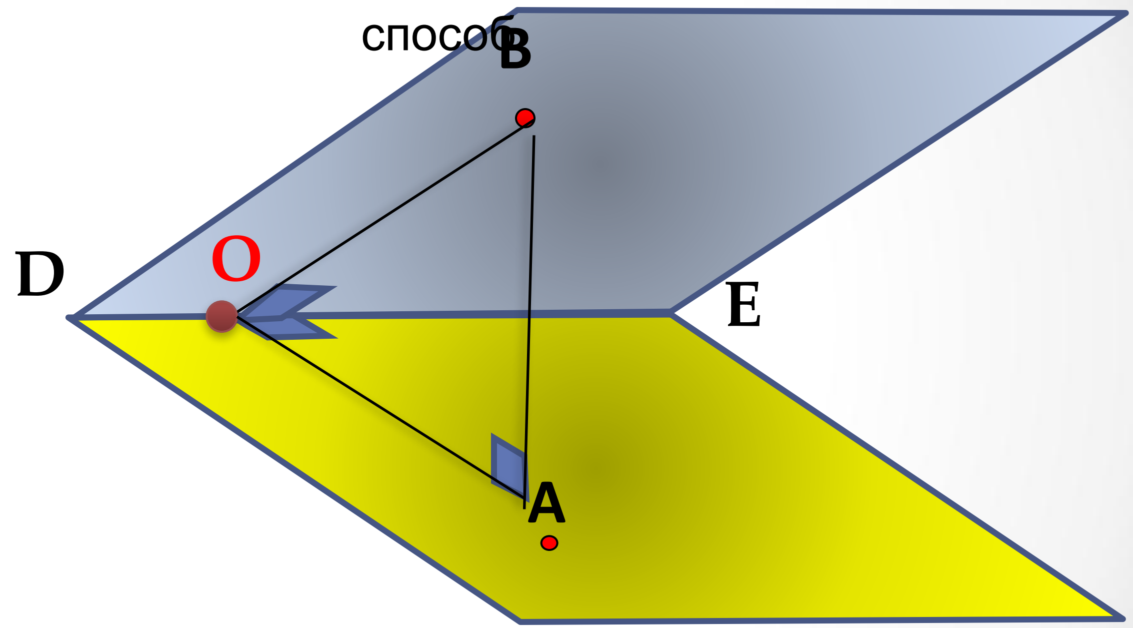
Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

∠ ВКА- линейный угол двугранного угла BCDA

Алгоритм построения линейного угла.

Угол AOB – линейный угол двугранного угла ADEB.



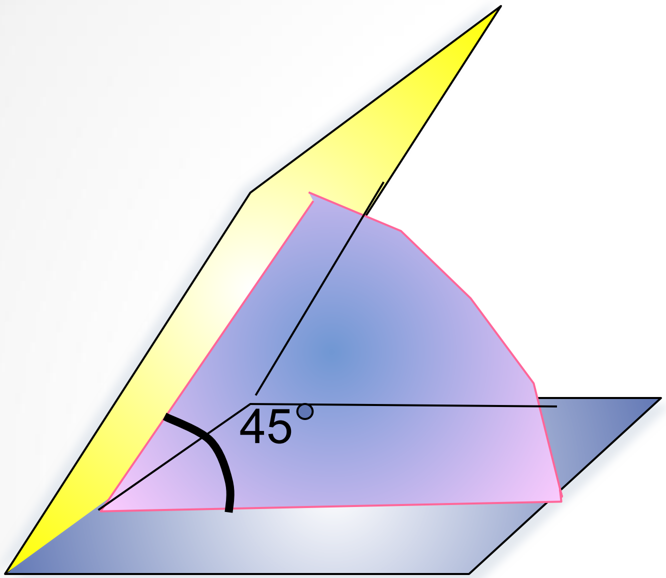


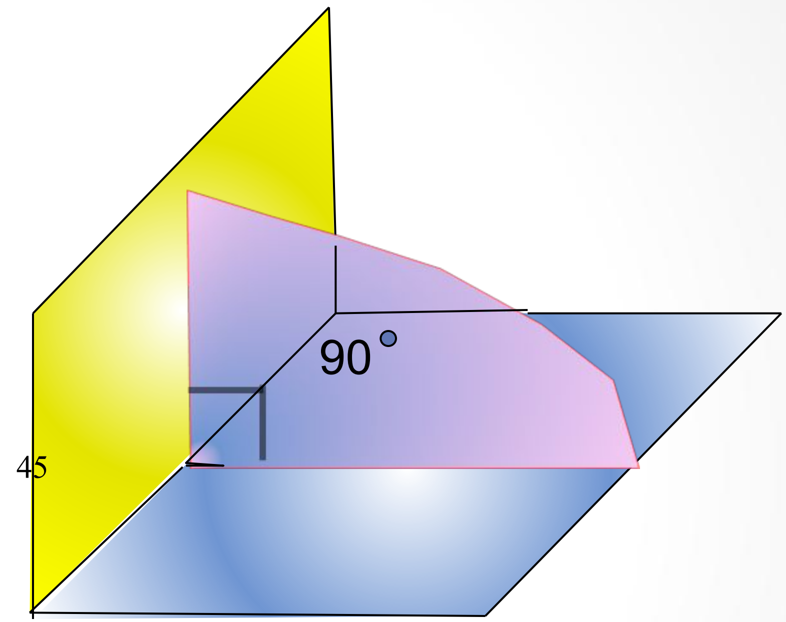
Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.

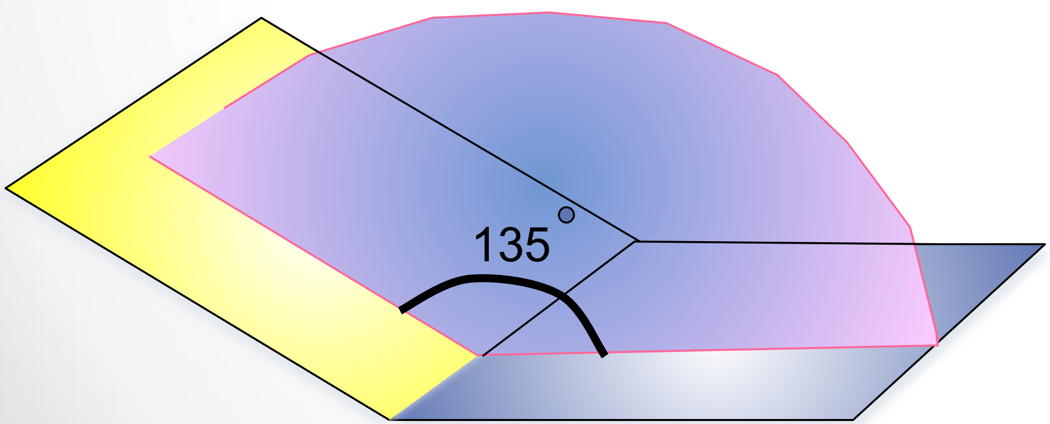
$\angle$**ADEB =** $\angle$**AOB**

Плоскость (AOB) $\perp$ **DE**

Двугранный угол может быть острым, прямым, тупым





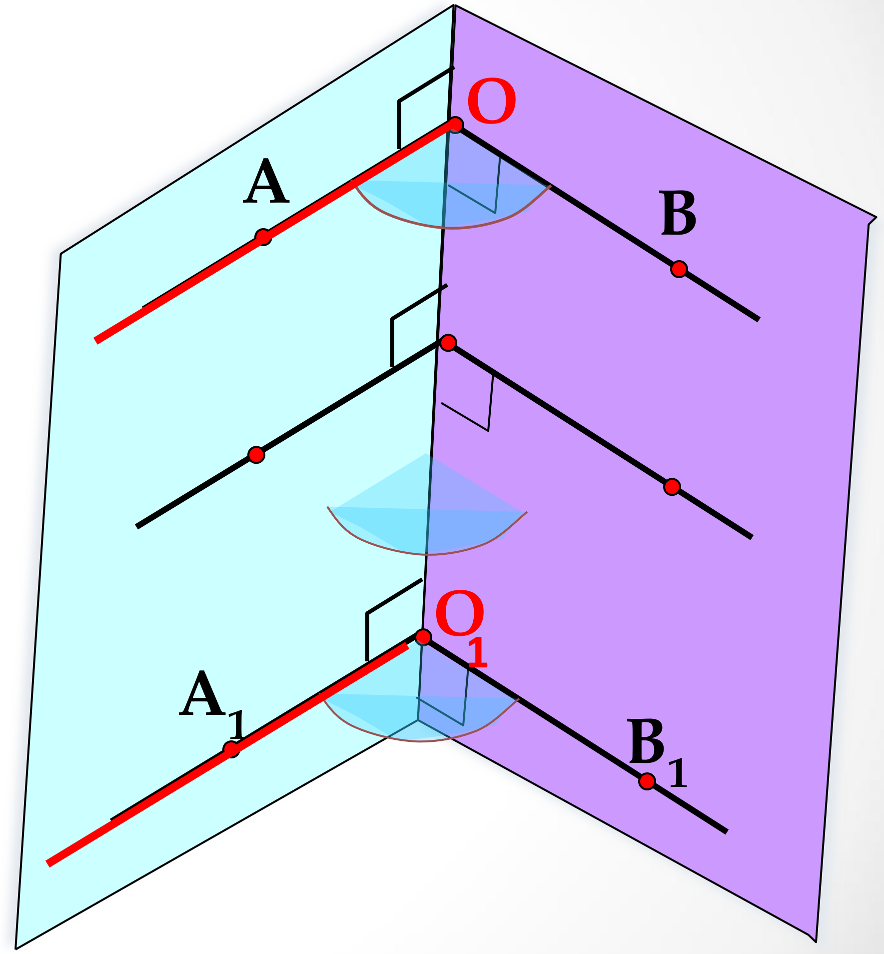


Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

Лучи OA и O_1A_1 – сонаправлены

Лучи OB и O_1B_1 – сонаправлены

Углы AOB и $A_1O_1B_1$ равны,
как углы с сонаправленными сторонами



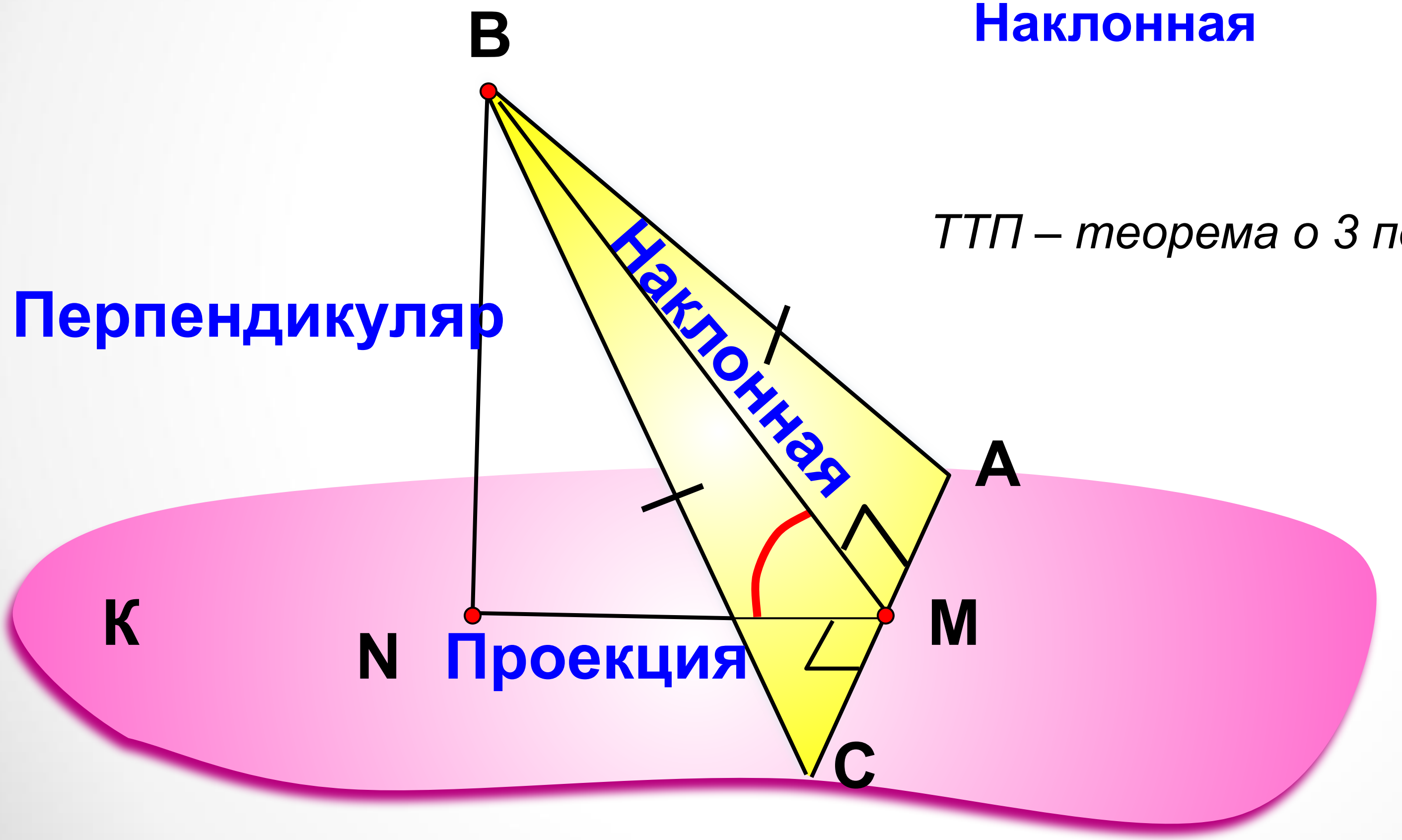
Построить линейный угол двугранного угла ВАСК. Треугольник АВС – равнобедренный.

ТТП

$$AC \perp BM \Longrightarrow AC \perp NM$$

Наклонная Проекция

ТТП – теорема о 3 перпендикулярах

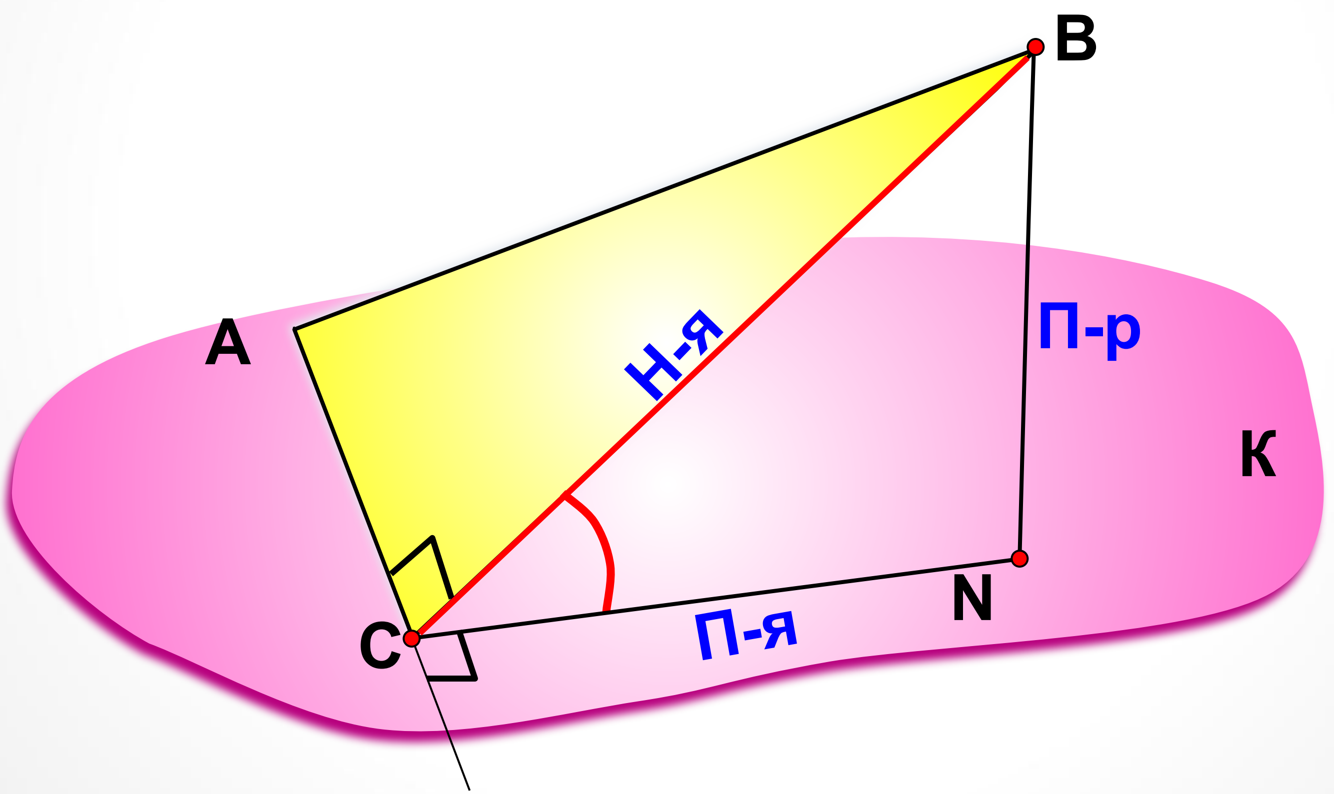


Угол BMN – линейный угол двугранного угла ВАСК

Построить линейный угол двугранного угла ВАСК. Треугольник АВС – прямоугольный.

$$AC \perp BC \overset{\text{ТТП}}{\Longrightarrow} AC \perp NC$$

Н-я П-я



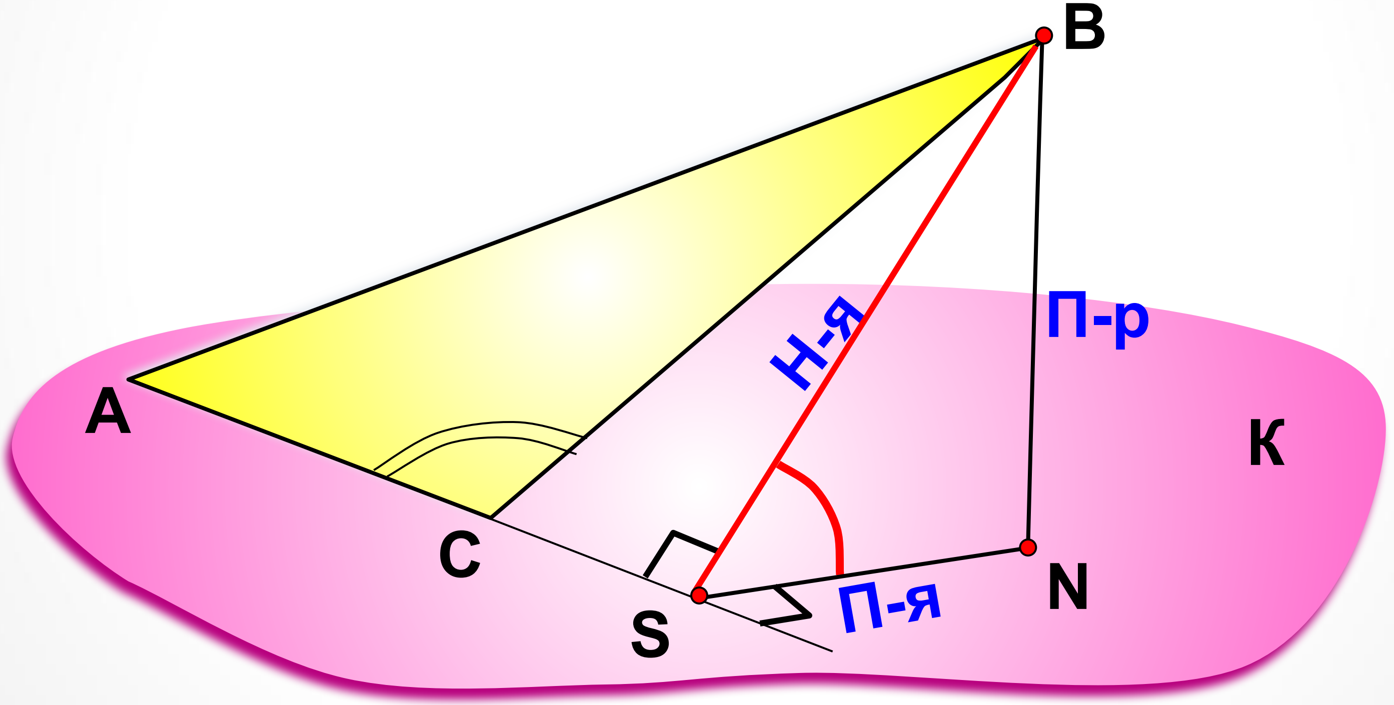
Угол BCN – линейный угол двугранного угла ВАСК

Построить линейный угол двугранного угла ВАСК.
Треугольник АВС – тупоугольный.

ТТП

$$AC \perp BS \Longrightarrow AC \perp NS$$

Н-я П-я



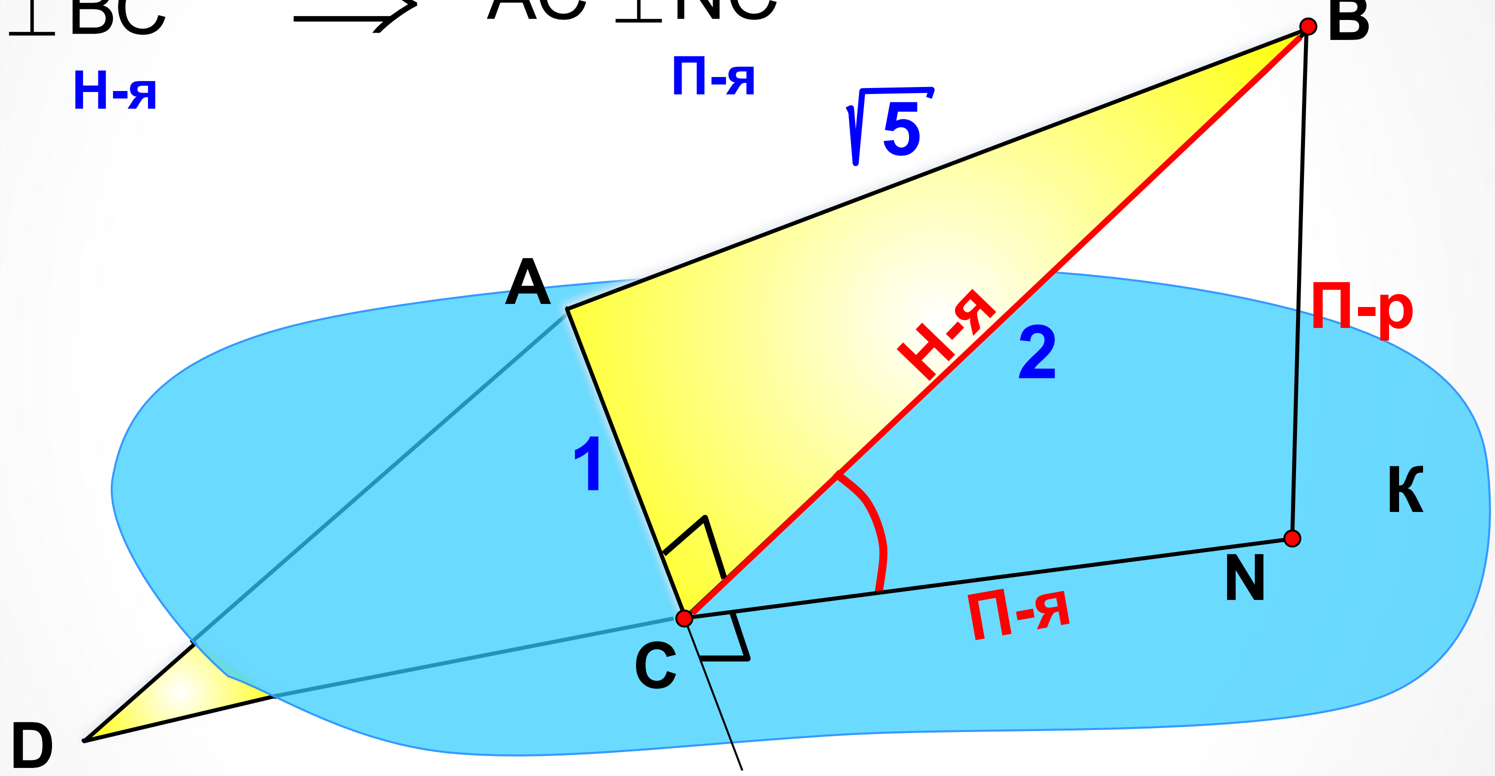
Угол BSN – линейный угол двугранного угла ВАСК

Задача. Построить линейный угол двугранного угла ВАСК. ABCD – четырехугольник, АС – диагональ, АС=1; ВС=2; АВ=$\sqrt{5}$

ОбрТТП

$AC \perp BC \Longrightarrow AC \perp NC$

Н-я П-я

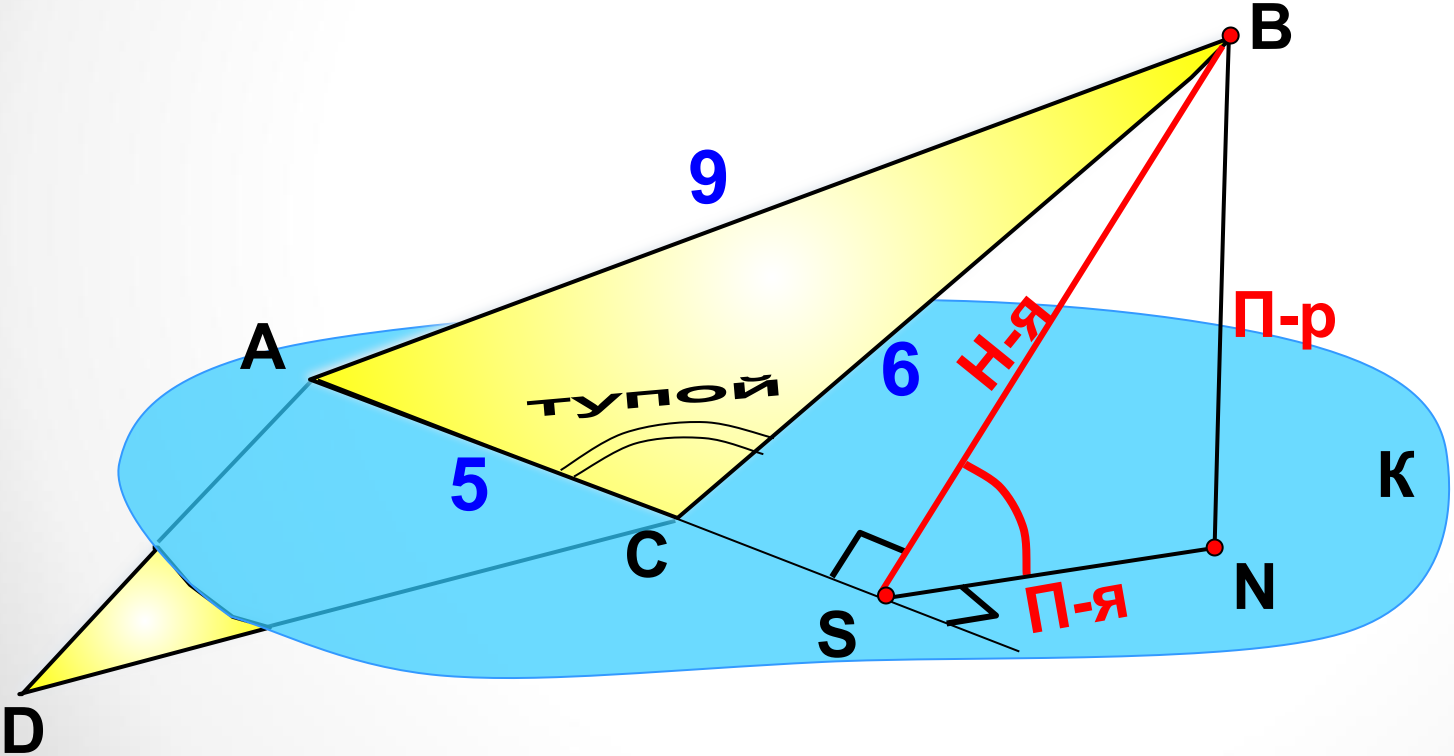


Угол BCN – линейный угол двугранного угла ВАСК

Задача. Построить линейный угол двугранного угла ВАСК. ABCD – четырехугольник, АС – диагональ; АС=5, ВС= 6, АВ= 9.

$$AC \perp BS \xRightarrow{\text{ОбрТТП}} AC \perp NS$$

Н-я П-я



Угол BSN – линейный угол двугранного угла ВАСК

<u>Задача</u> В параллелограмме ABCD угол ADC равен 120^0, AD = 8 см,

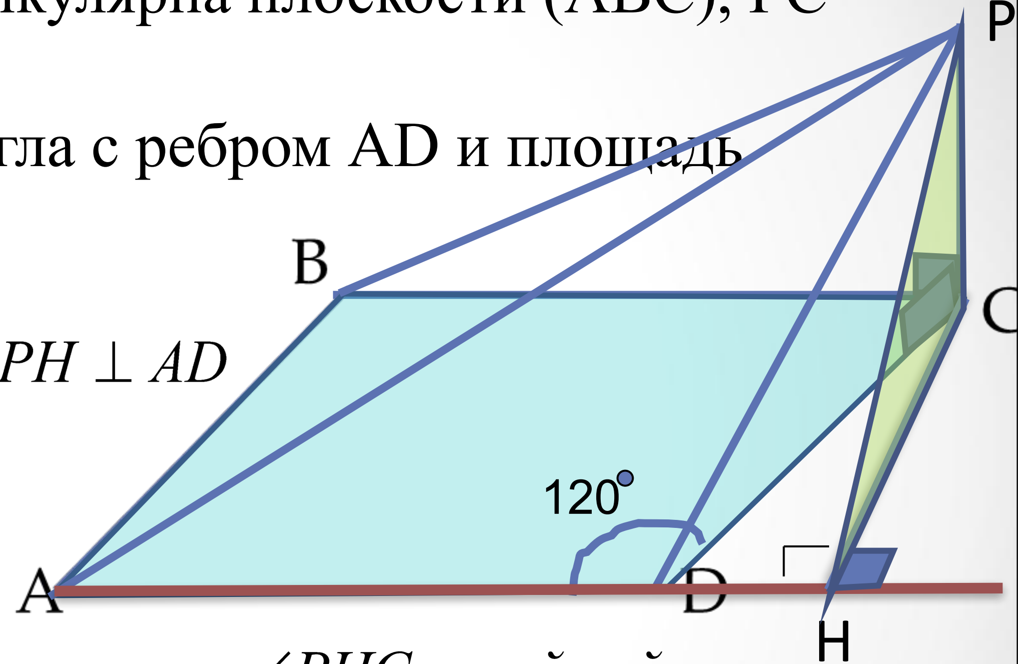
DC= 6 см , прямая PC перпендикулярна плоскости (ABC), PC= 9 см.

Найти величину двугранного угла с ребром AD и площадь параллелограмма.

$\angle ADC = 120^0$

Решение:

$PC \perp (ABC), CH \perp AD, \Rightarrow по ТТП \ PH \perp AD$



$\angle PHC$ *линейный*

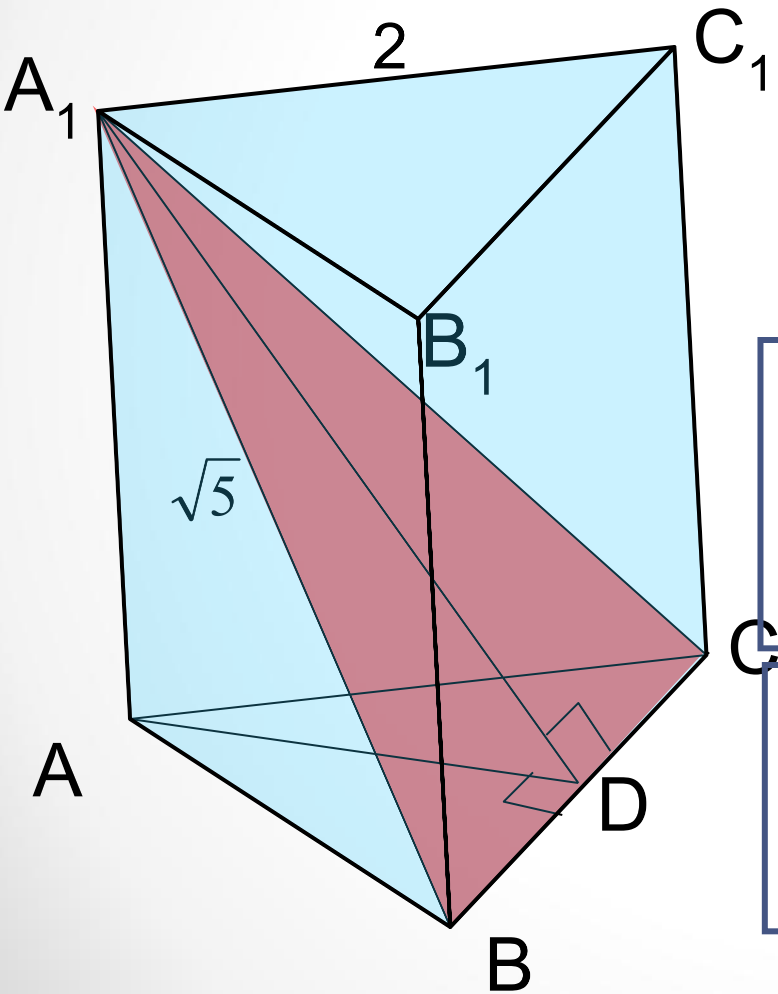
$$\Delta DCH: \quad CH = 6\sin 60^0 = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\Delta PHC: \quad tgPHC = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \angle PHC = 60^0$$

$$S_{ABCD} = CH \cdot AD = 8 \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

Задача (Решение с помощью построения линейного угла)

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.



1) Построим плоскость CBA$_1$ Перпендикуляр из точки A1на плоскость (ABC) – точка A, A1D – наклонная, AD проекция наклонной на (ABC). Тогда угол ADA1 – это линейный угол двугранного угла между плоскостями (ABC) и (BA1C).

2) Из ΔABC:

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}.$$

3) Из $\Delta A1BD$:

$$A_1D = \sqrt{A_1B^2 - BD^2} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2.$$

4) Из $\Delta A1AD$:

$$\cos\alpha = \frac{AD}{A_1D};$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

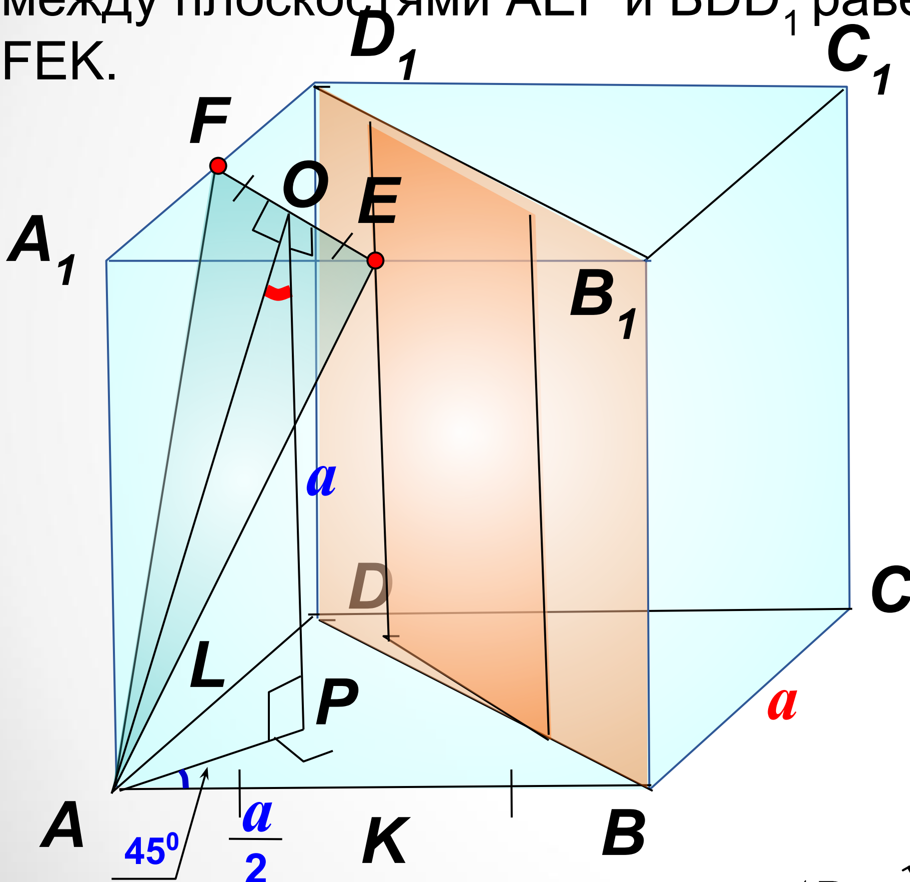
Из $\Delta A1AD$:

$$\alpha = 30$$

Задача (решение построением параллельной плоскости)

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F середины ребер соответственно A_1B_1 и A_1D_1. Найдите тангенс угла между плоскостями AEF и BDD_1.

1) Заменим плоскость DBB_1 на параллельную плоскостьFEKL. Угол между плоскостями AEF и BDD_1 равен углу между плоскостями AEF и FEK.



2) Ребро двугранного угла – FE.

3) Строим линейный угол двугранного угла AFEK.

4) Найдем два элемента треугольника AOP. Пусть ребро куба равно a (или 1).

5) Из ΔAPK:

$$\cos 45^0 = \frac{AP}{AK};$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AP}{\frac{a}{2}};$$

$$AP = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2};$$

$$AP = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

6) Из ΔAOP:

$$tgAOP = \frac{AP}{OP};$$

$$tgAOP = \frac{a\sqrt{2}}{4} : a;$$

$$tgAOP = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Домашнее задание

- В прямоугольном параллелепипеде ABCDA1B1C1D1 точка N – середина ребра CD , AB = 3 , BC = 2 , BB1 = 2. Найдите угол между плоскостями AB1N и ABC .
- В правильной четырехугольной пирамиде SABCD с основанием ABCD сторона основания равна 3, а боковое ребро равно 5. Найдите угол между плоскостями ABC и ACM, где точка M делит ребро BS так, что BM : MS = 2 : 1.