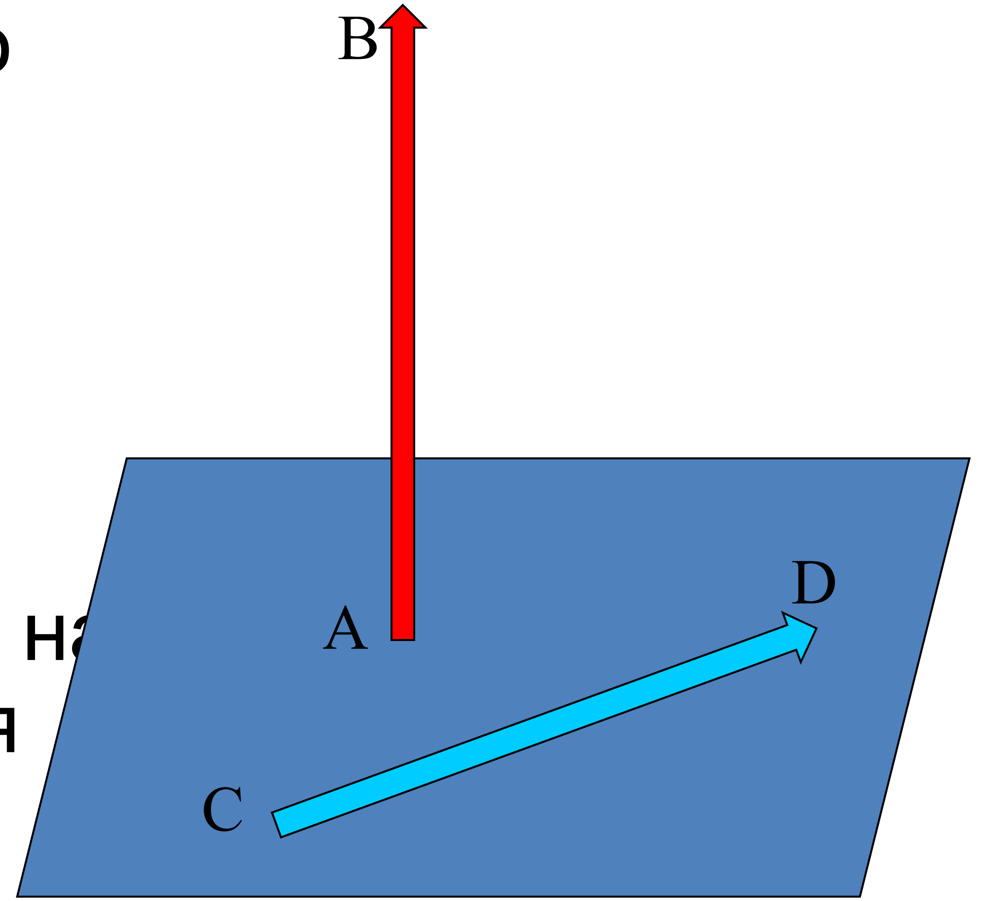
Векторы в пространстве

Понятие вектора

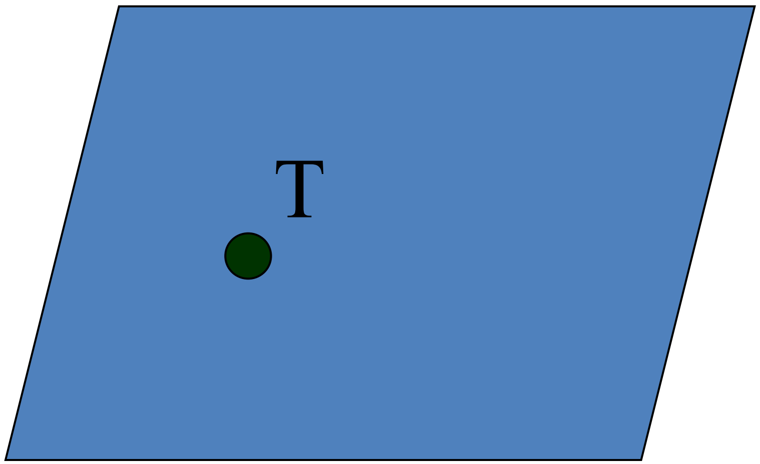
Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется вектором.

Направление вектора на рисунках отмечается стрелкой.



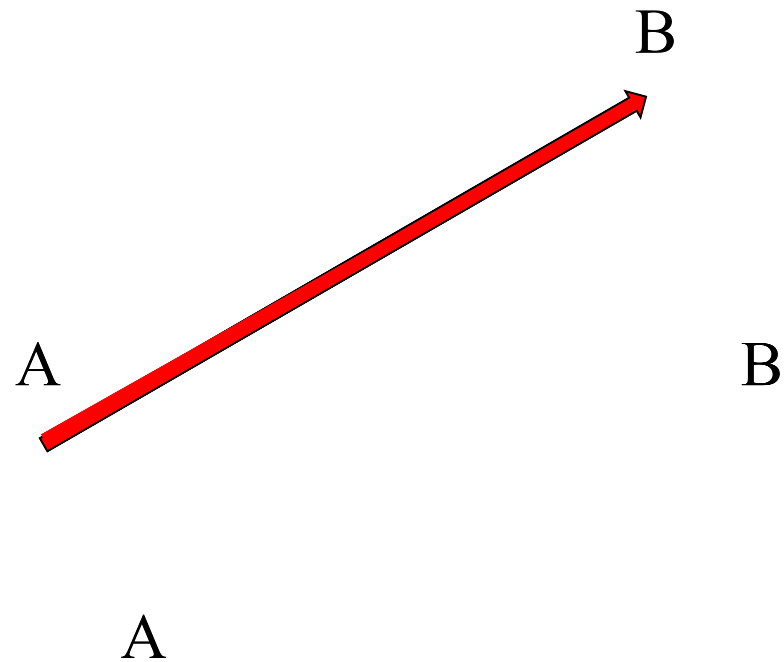
Нулевой вектор

- Любая точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется нулевым.
- Начало и конец нулевого вектора совпадают и он не имеет какого – либо определённого направления.



$\overrightarrow{TT}$ – нулевой вектор

Длина вектора



Длиной ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. $\overrightarrow{AB}$

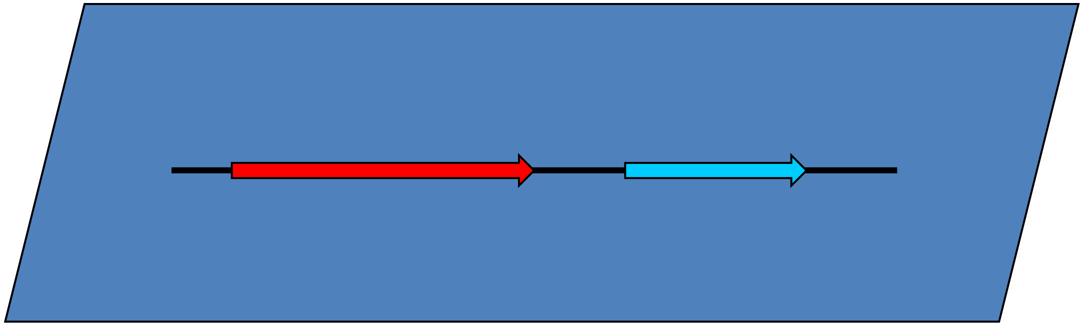
Длина вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ обозначается так: .

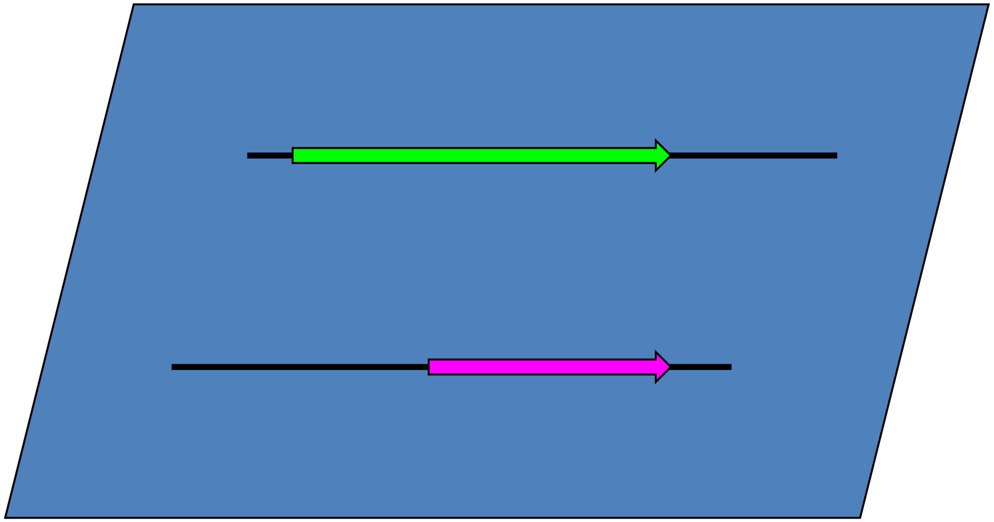
Длина нулевого вектора считается равной нулю.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$$

Коллинеарные векторы

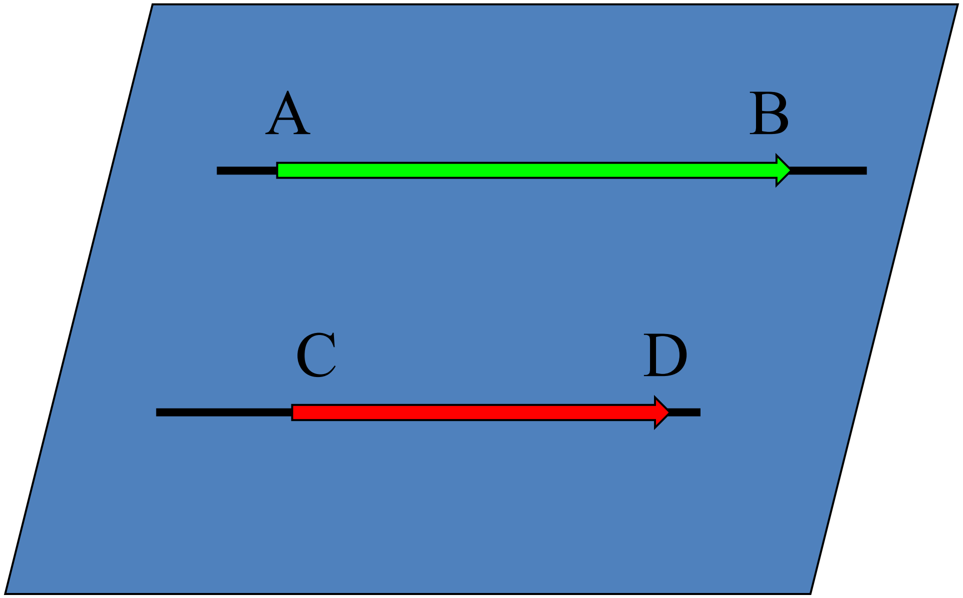
Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.





Сонаправленные векторы

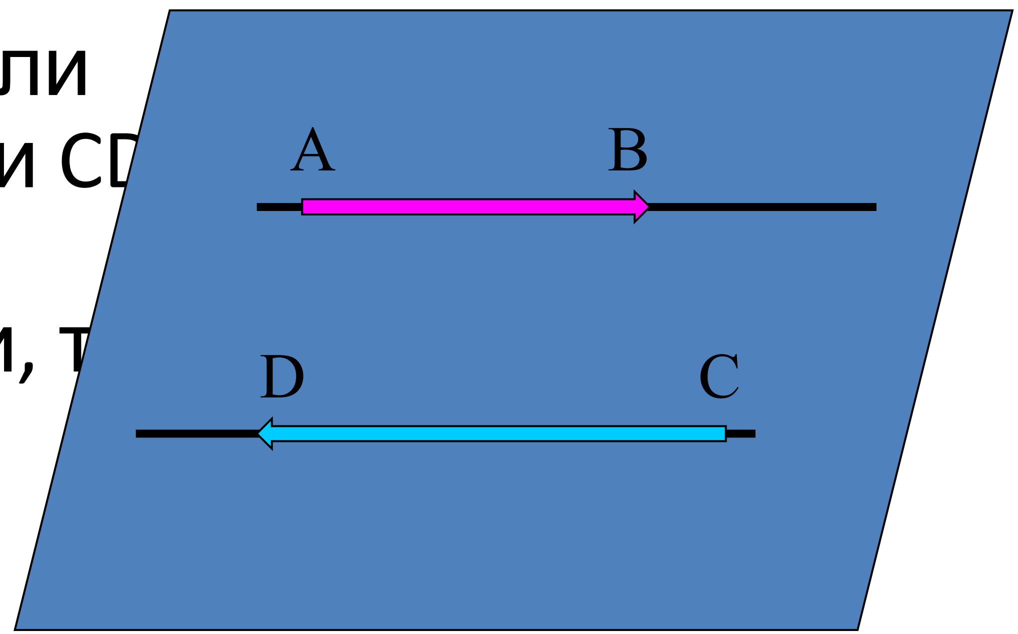
Если два ненулевых вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и если при этом лучи AB и CD сонаправлены, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются сонаправленными и



$$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$$

Противоположно направленные векторы

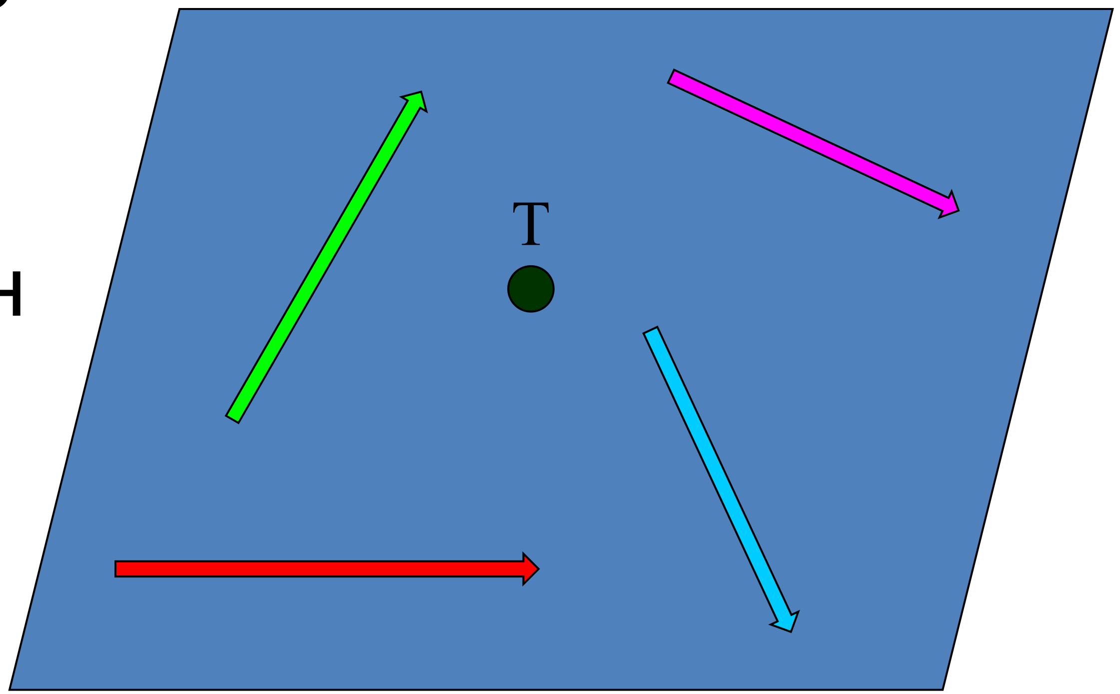
Если два ненулевых вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и если при этом лучи AB и CD не являются сонаправленными, т векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются противоположно направленными.



$$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$$

Сонаправленность нулевого вектора

Нулевой вектор условимся считать сонаправленным с любым вектором.



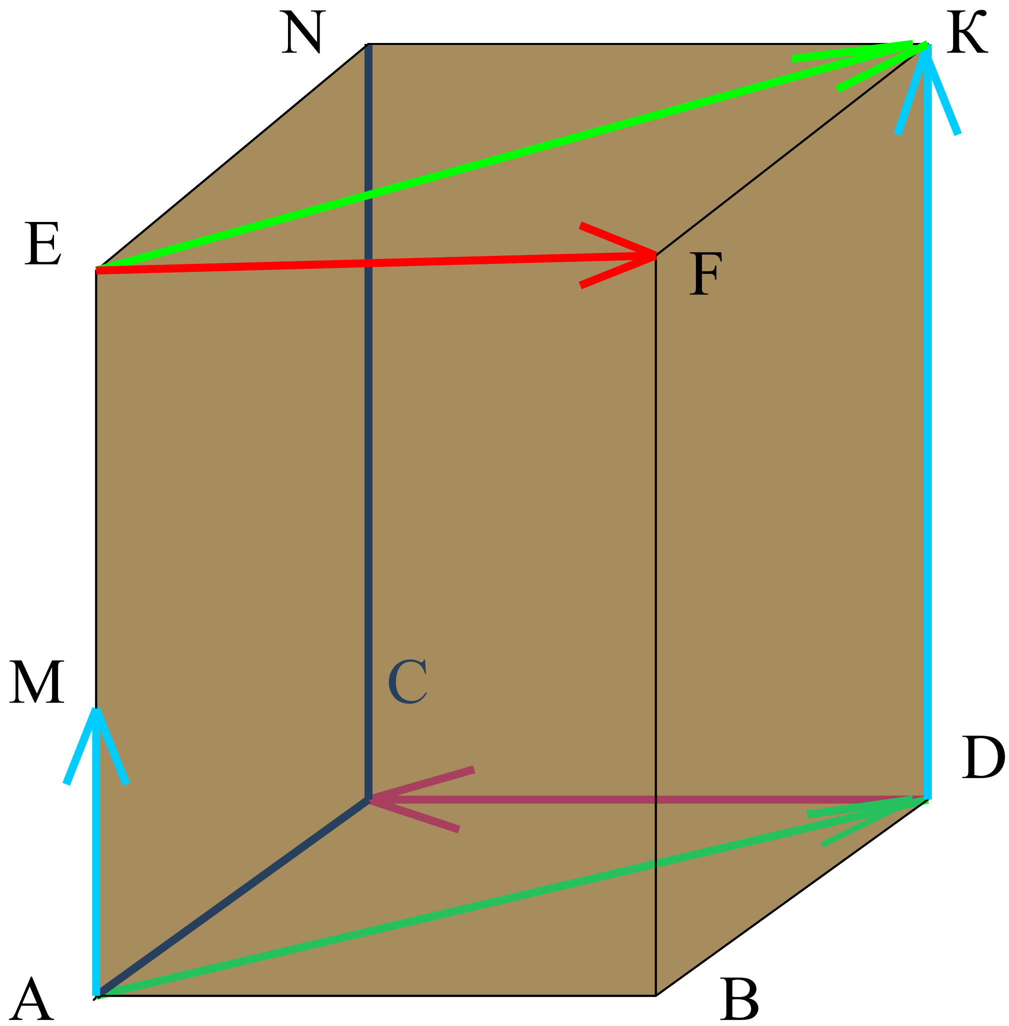
Векторы в параллелепипеде

$\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KD}$

$\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EK}$

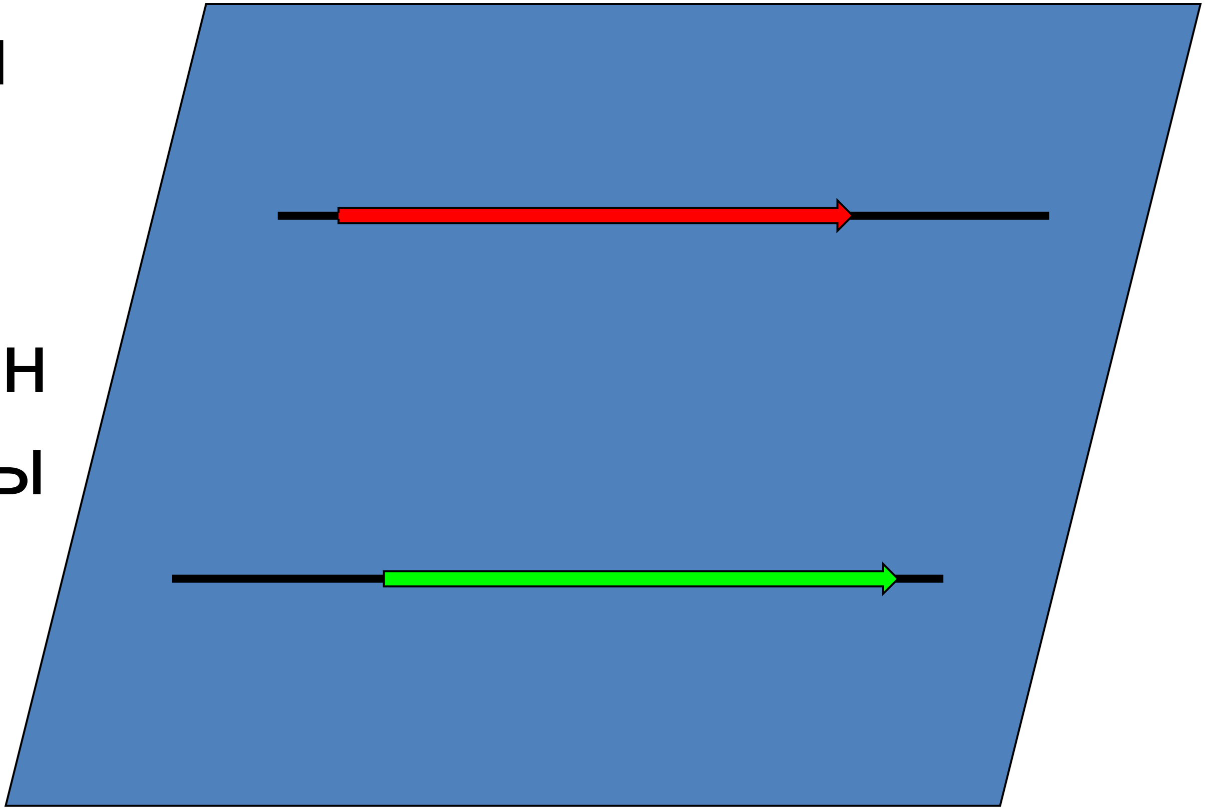
$\overrightarrow{EF} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$

Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AM}$ не являются ни сонаправленным и, ни противоположно направленными, так как они не коллинеарны.



Равные векторы

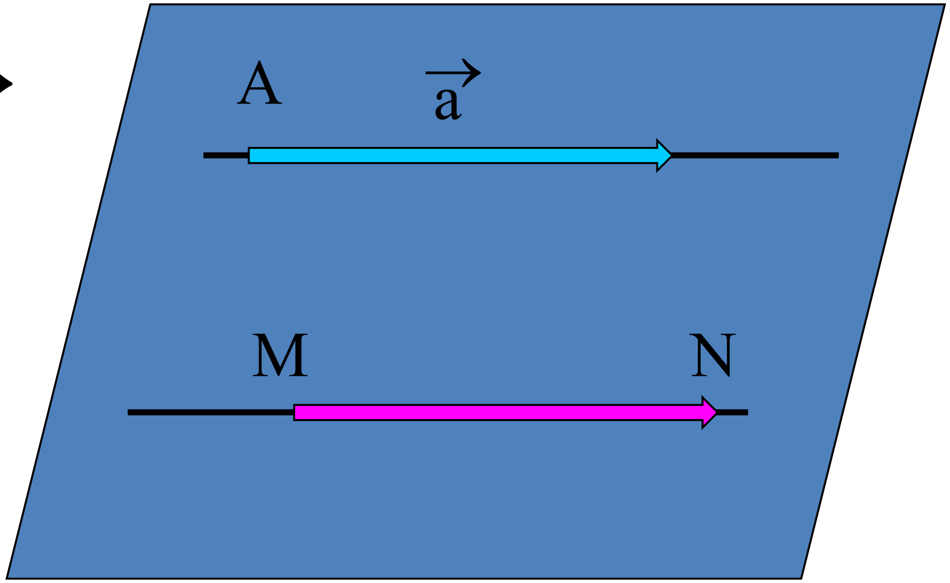
Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.



Равенство векторов

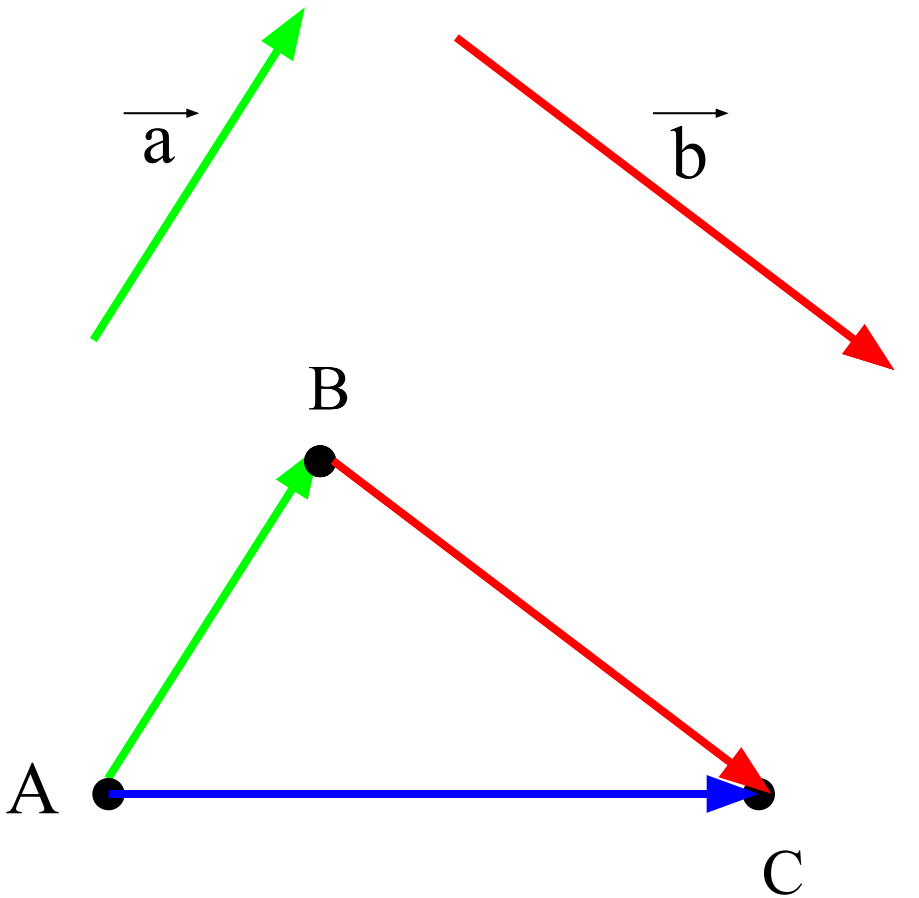
Если точка A - начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ отложен от точки A.

От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.



Правило треугольника

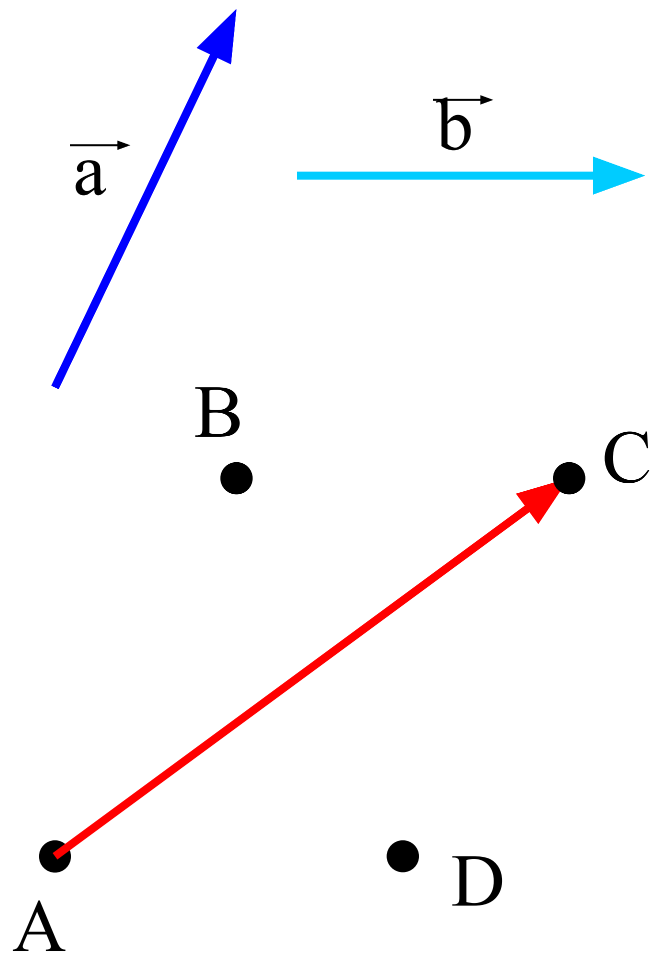
Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора. Отметим произвольную точку A и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$. Затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

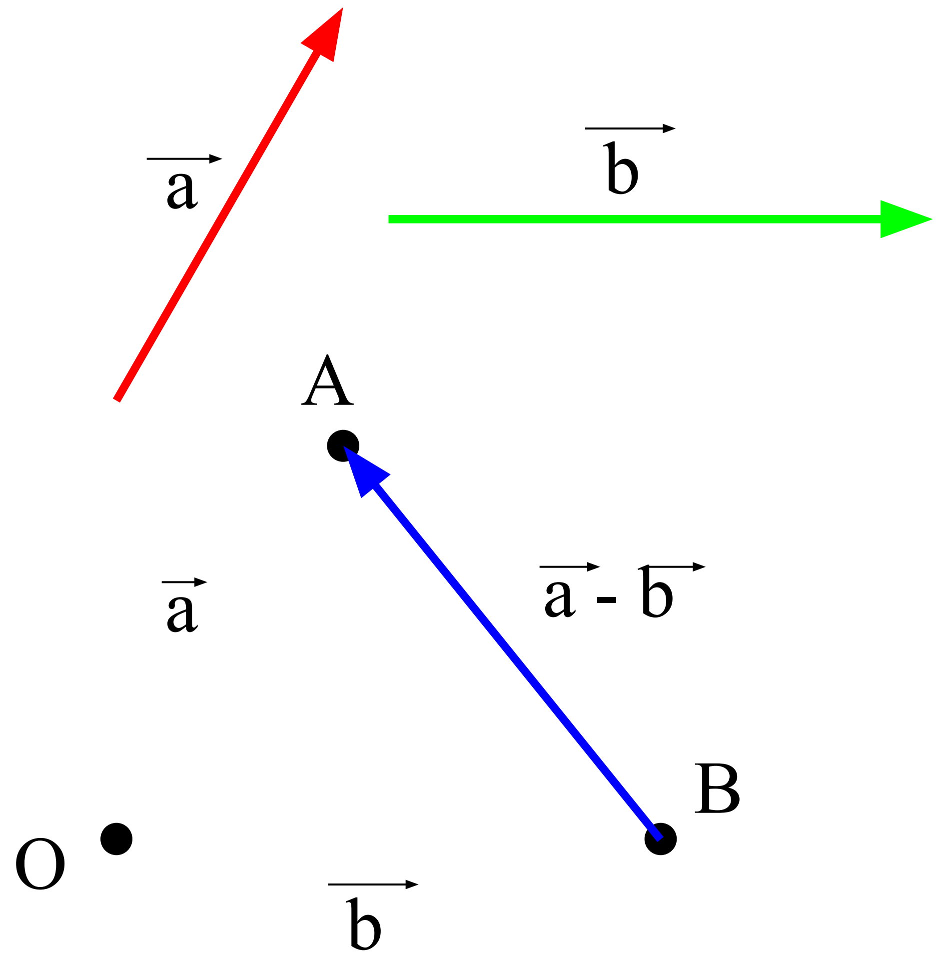
Правило параллелограмма

Чтобы сложить неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно отложить от какой-нибудь точки А векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ и построить параллелограмм ABCD. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ равен $\vec{a} + \vec{b}$.



Вычитание векторов

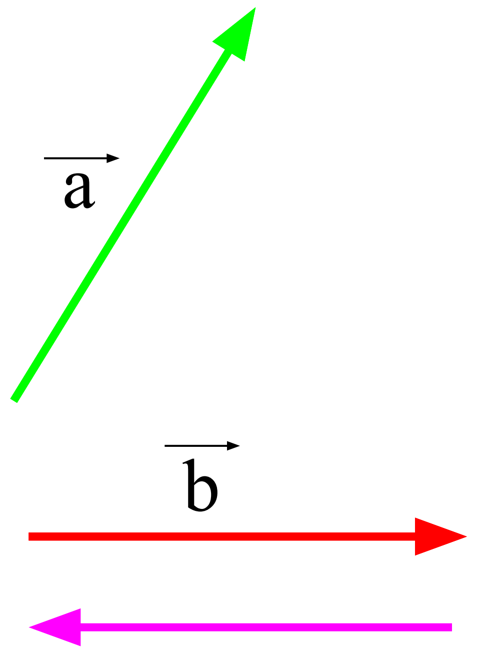
Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

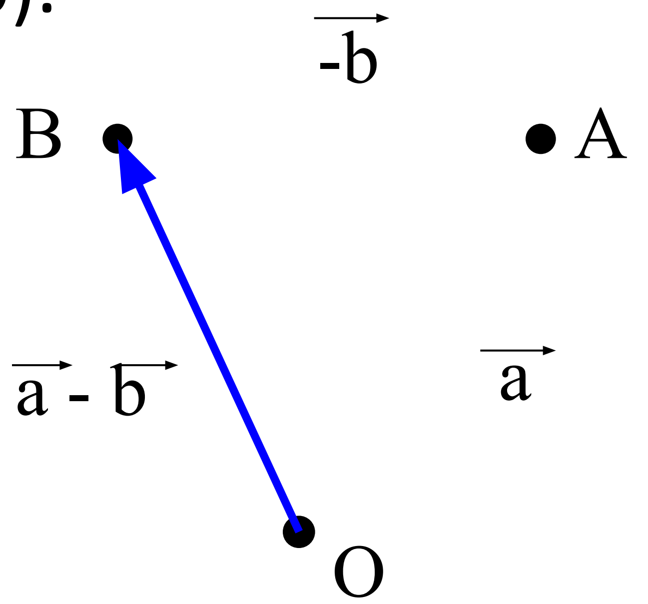


Вычитание векторов

Теорема:

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (\vec{-b})$.

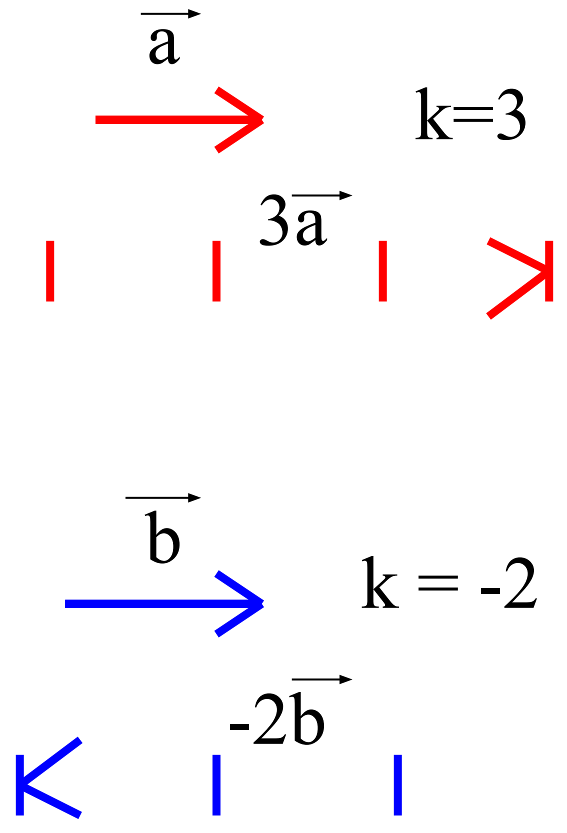




Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|*|\vec{a}|$, причём векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k<0$.

Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.



Компланарные векторы

Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

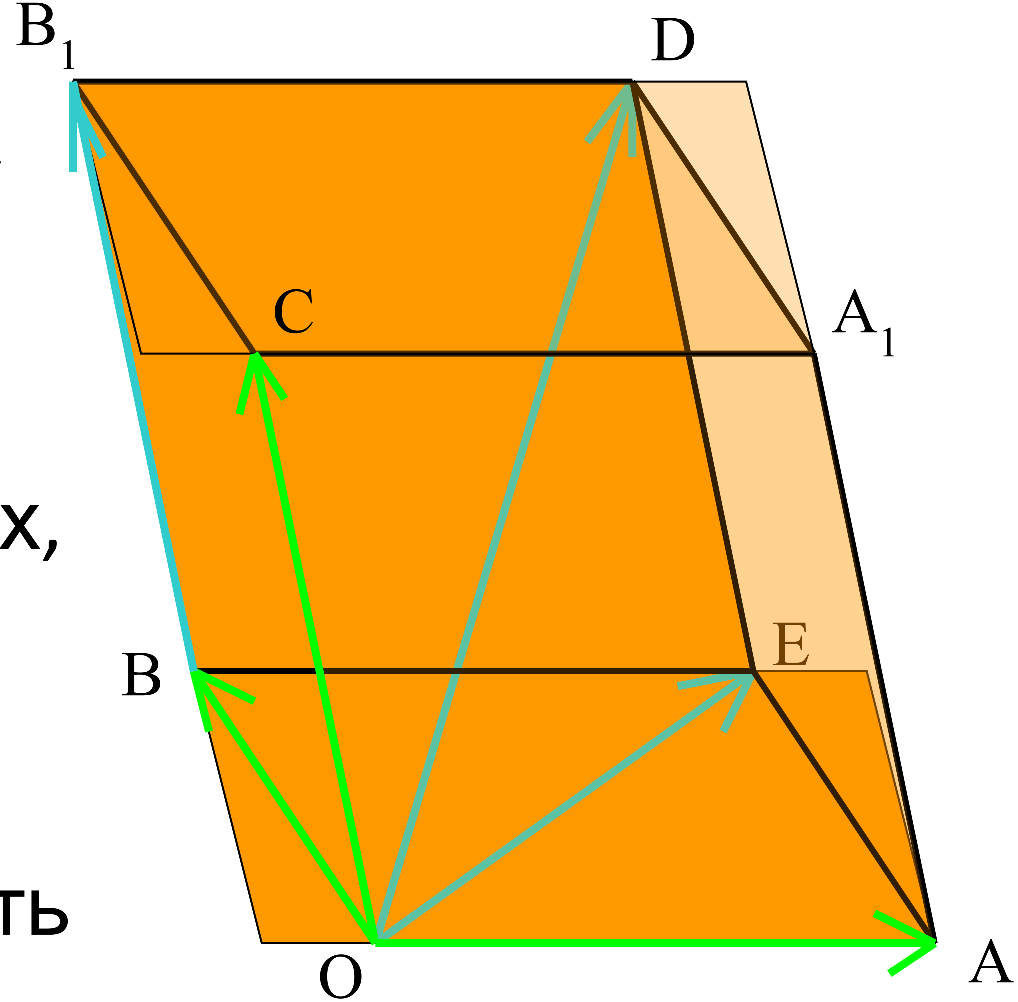
Векторы называются компланарными, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости

Компланарные векторы

Любые два вектора компланарны.

Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.

Три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и не компланарными



$\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ – компланарны

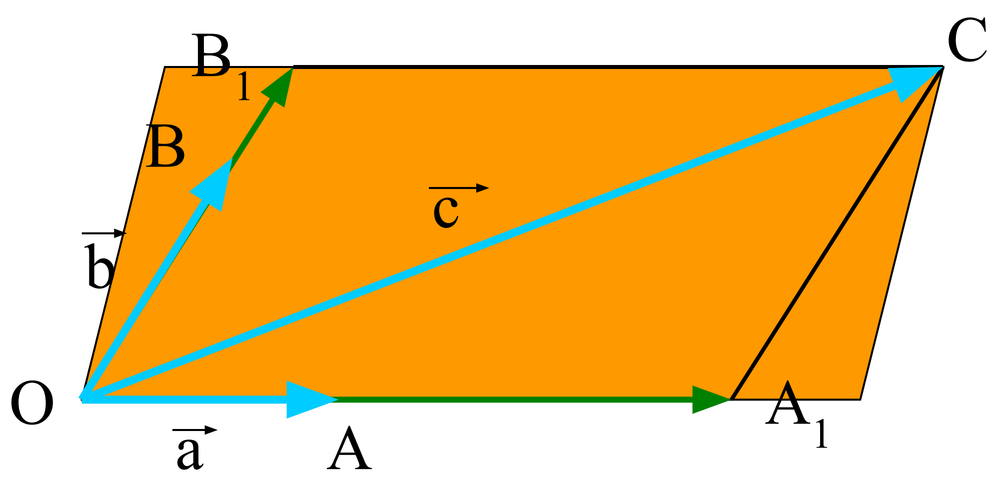
$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ – не компланарны

Признак компланарности трёх векторов

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. представить в виде:

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b},$$

Где x и y – некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

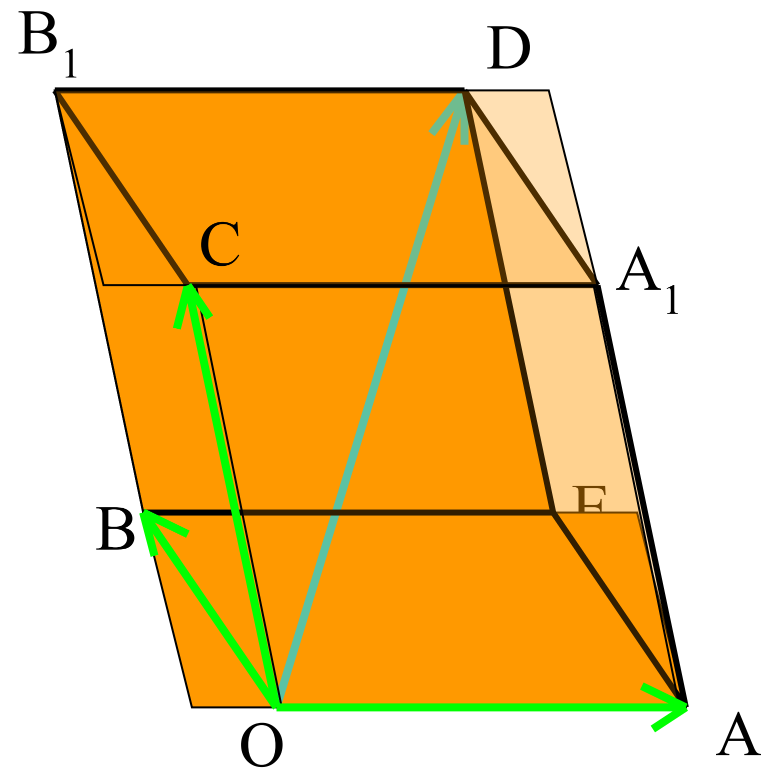


Обратное утверждение

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Правило параллелепипеда

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – некомпланарные векторы. Отложим от произвольной точки O пространства векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ и построим параллелепипед так, чтобы отрезки OA, OB и OC были его рёбрами. Тогда диагональ OD этого параллелепипеда изображает сумму векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



Разложение вектора по двум некомпланарным векторам

Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде:

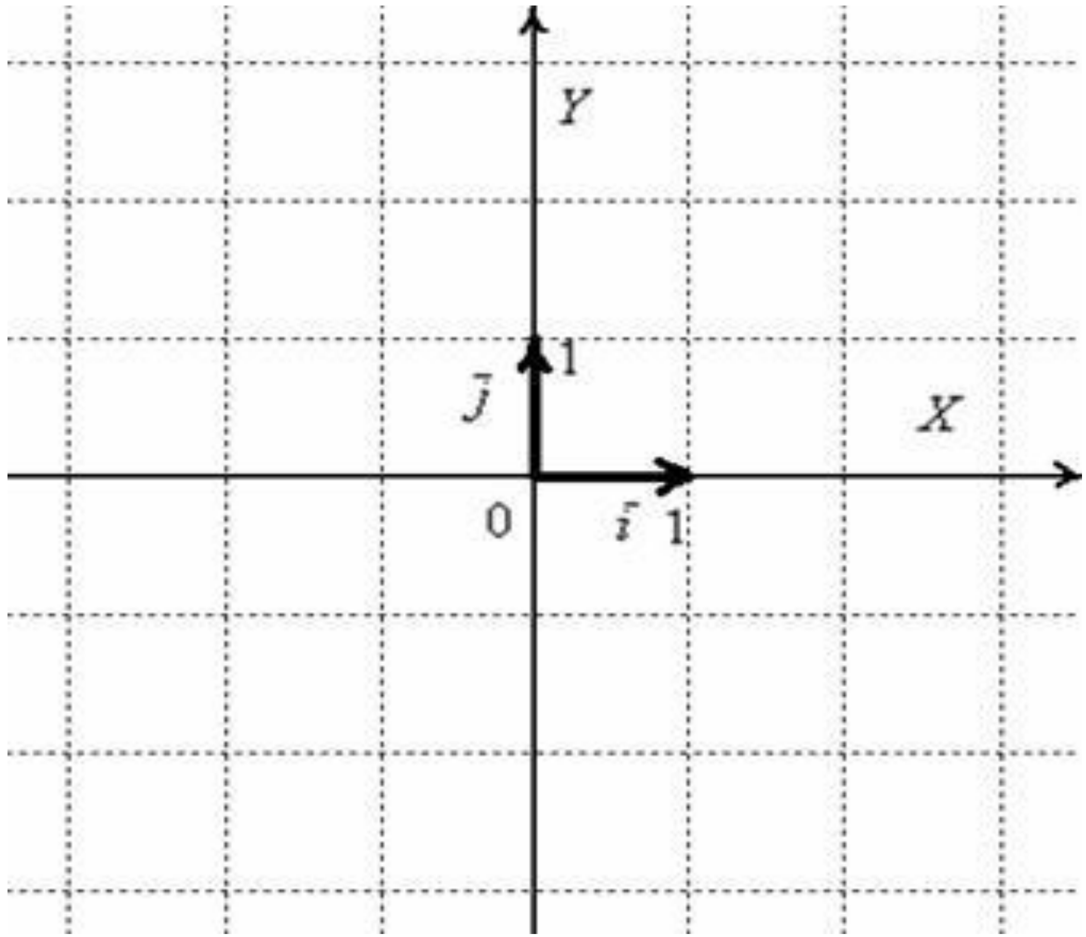
$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c},$$

где x, y и z – некоторые числа, то говорят, что вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Числа x, y и z называются коэффициентами разложения.

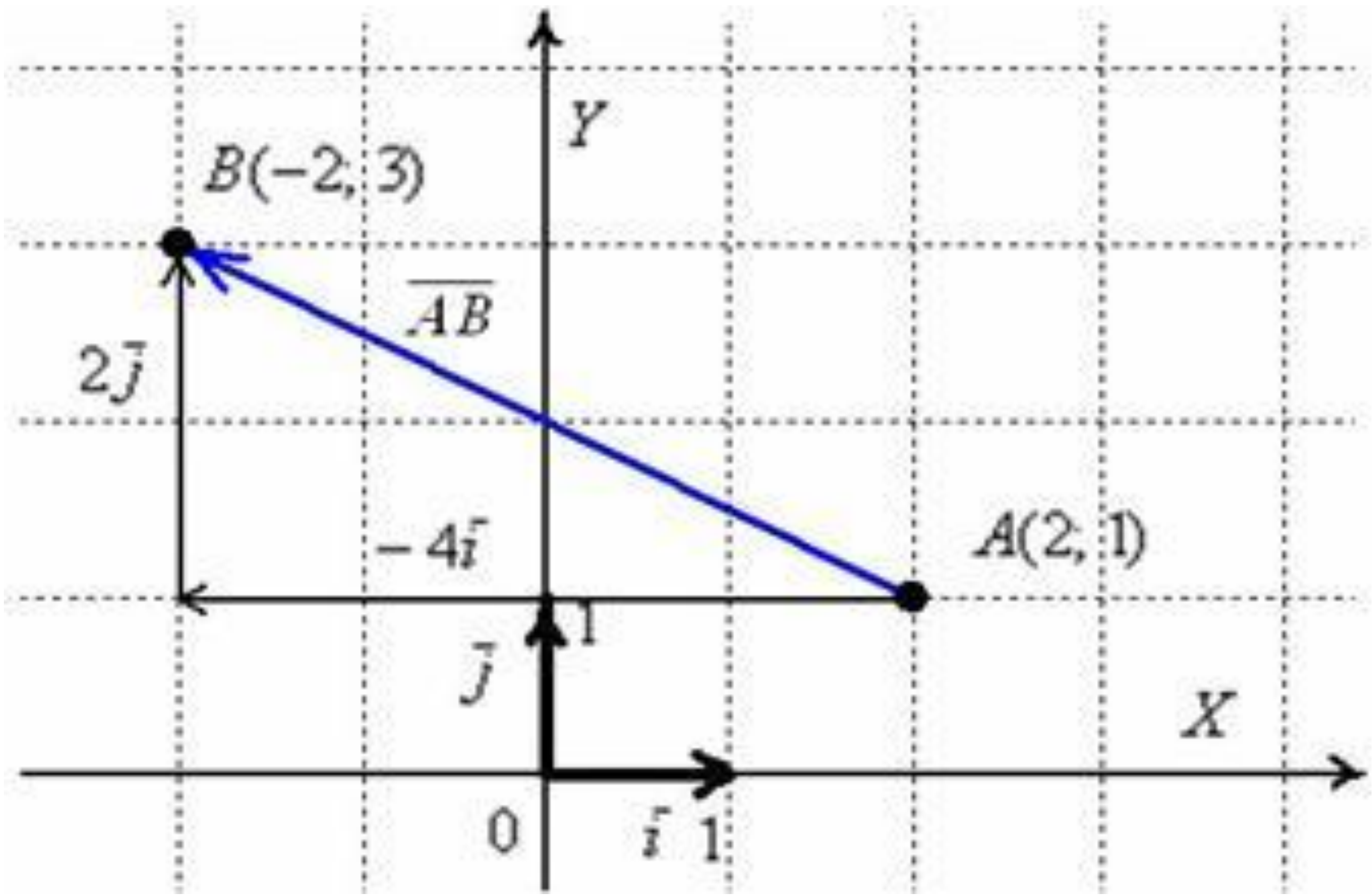
Теорема

Любой вектор можно разложить по трём данным некомпланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

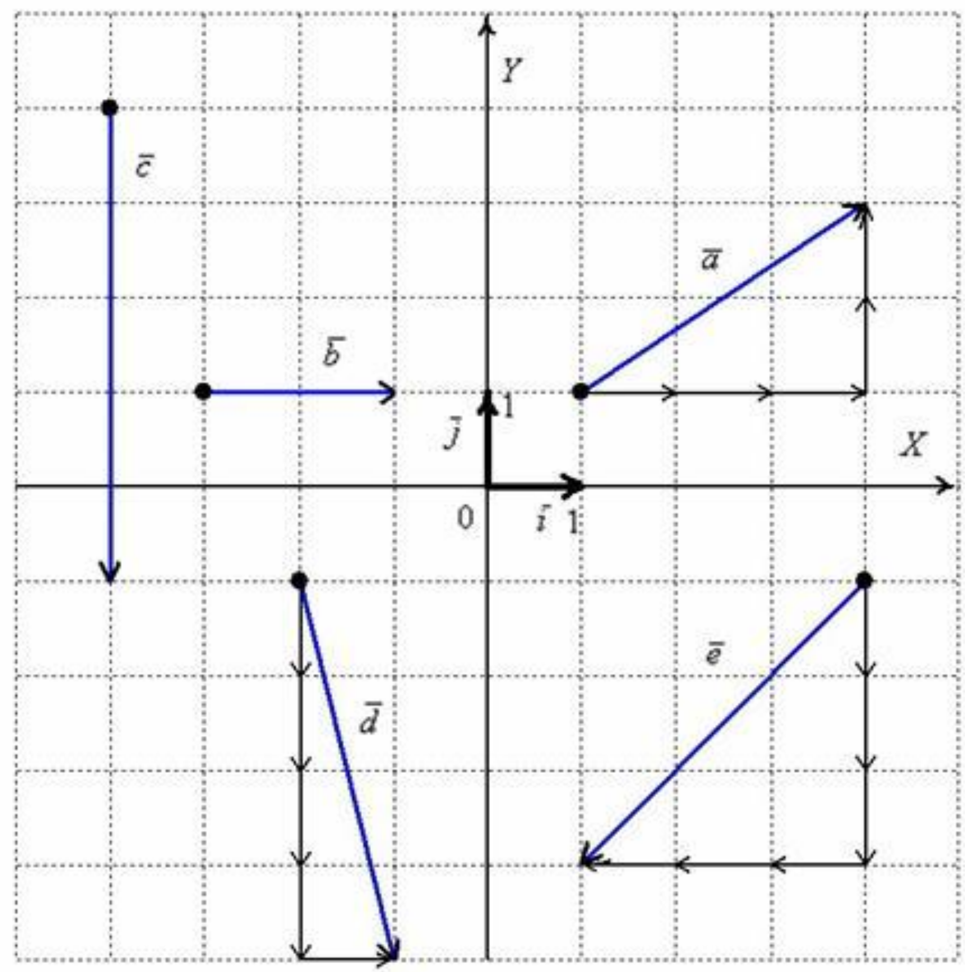
Координаты вектора на плоскости



Координаты вектора на плоскости



Координаты вектора на плоскости



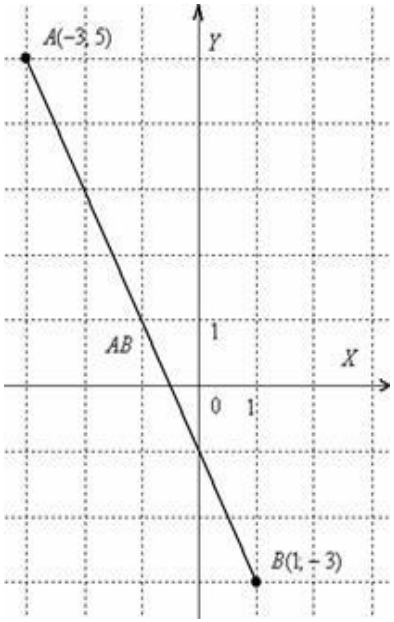
Координаты вектора на плоскости

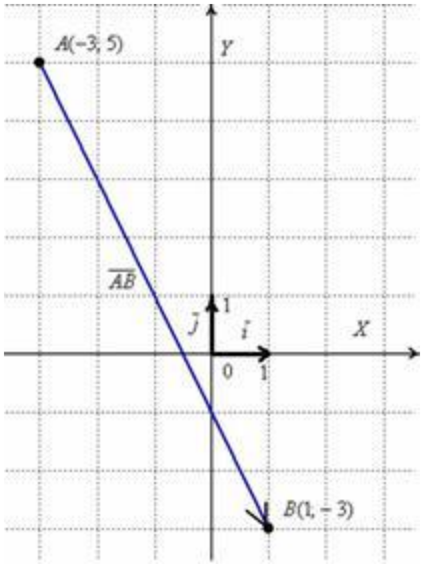
Даны точки $A(-3;\,5)$ $B(1;\,-3)$

Найти длину отрезка AB

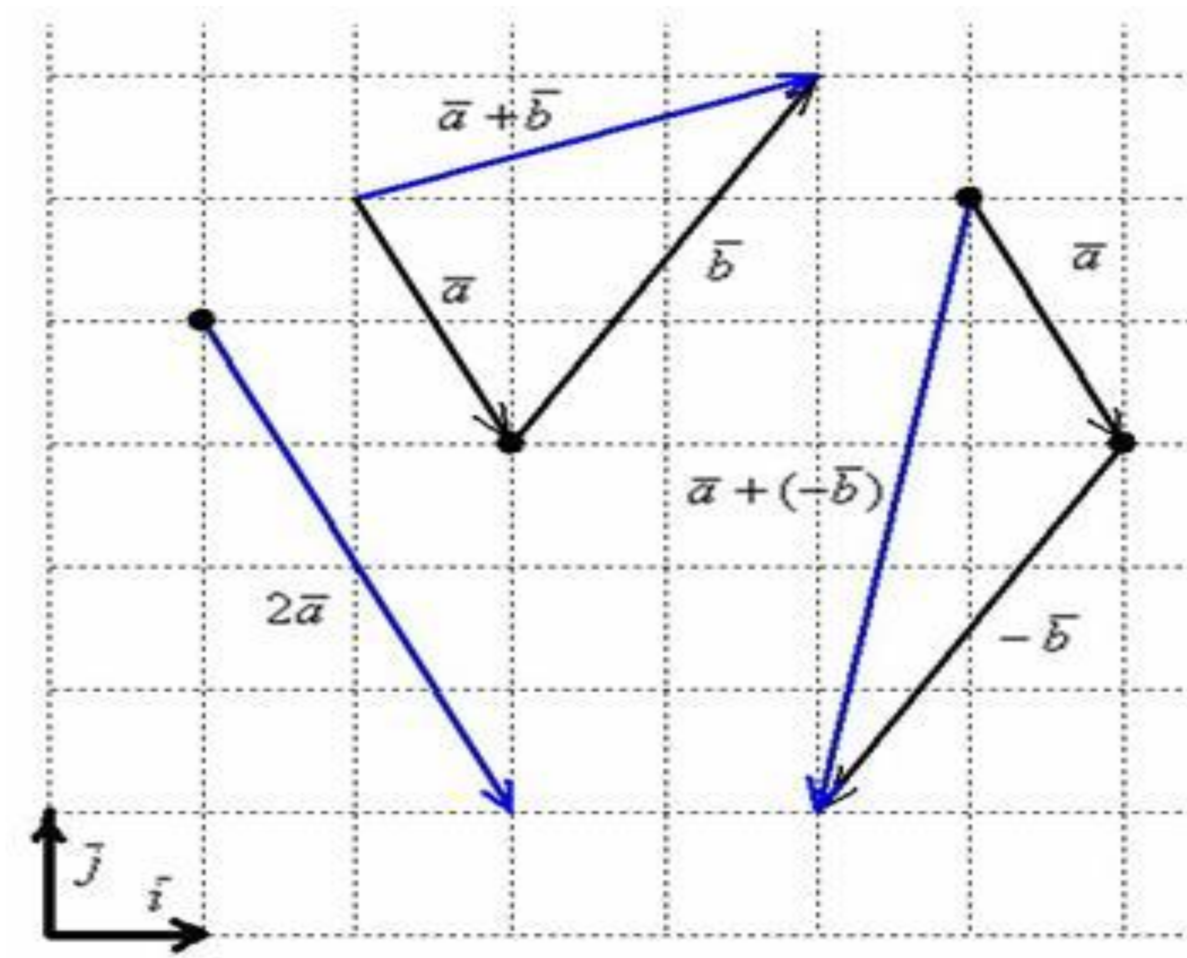
$$|AB| = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$|AB| = 4\sqrt{5}\ \text{ед.} \approx 8{,}94\ \text{ед.}$$

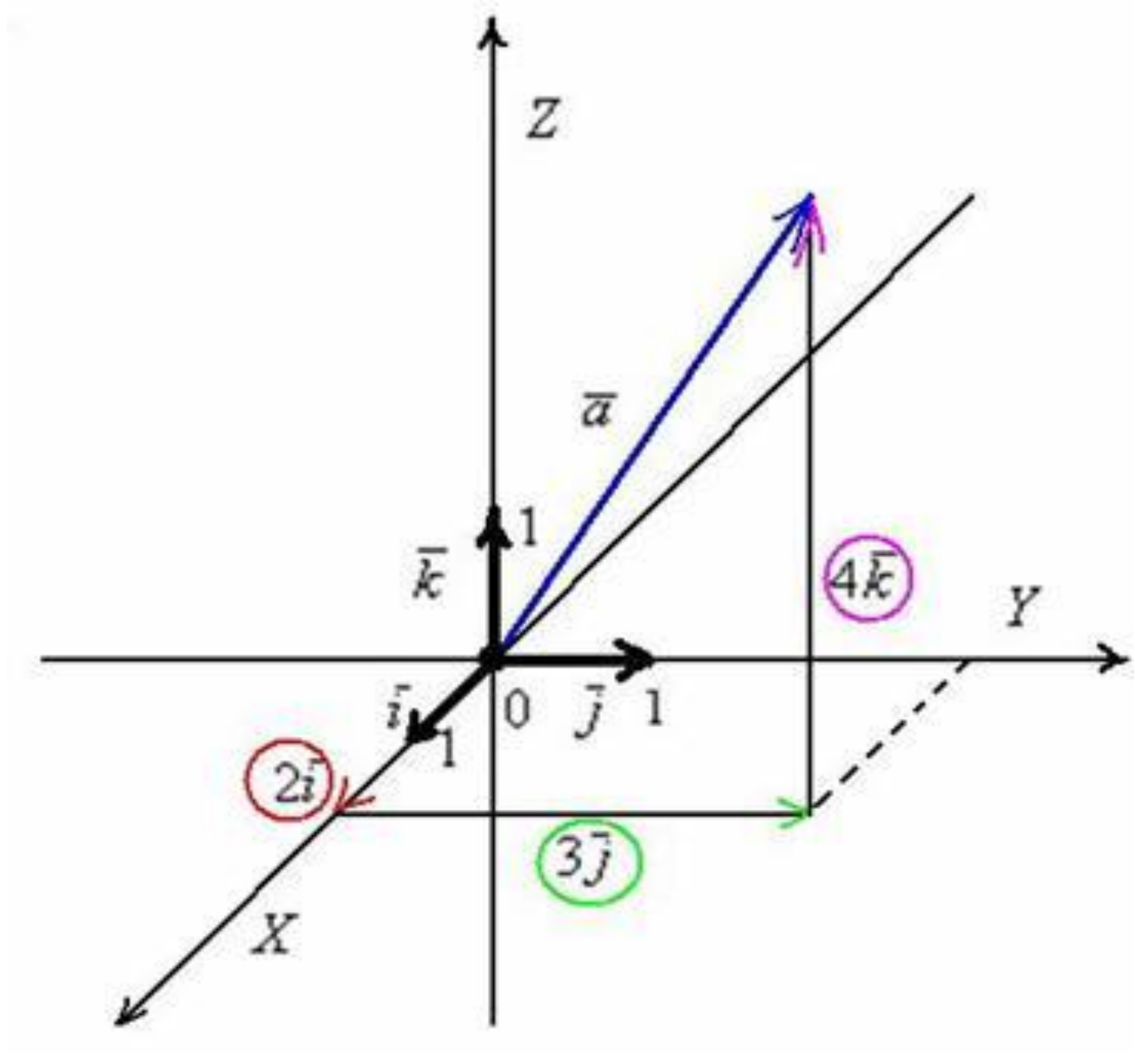




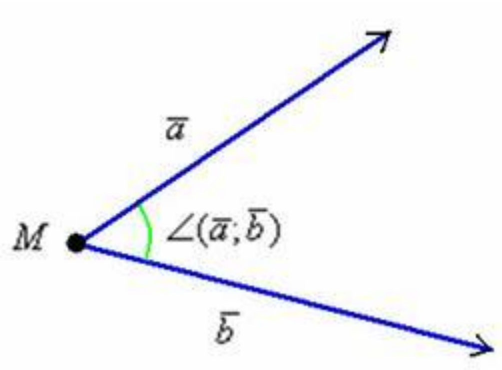
Действия с векторами на плоскости



Координаты вектора в пространстве



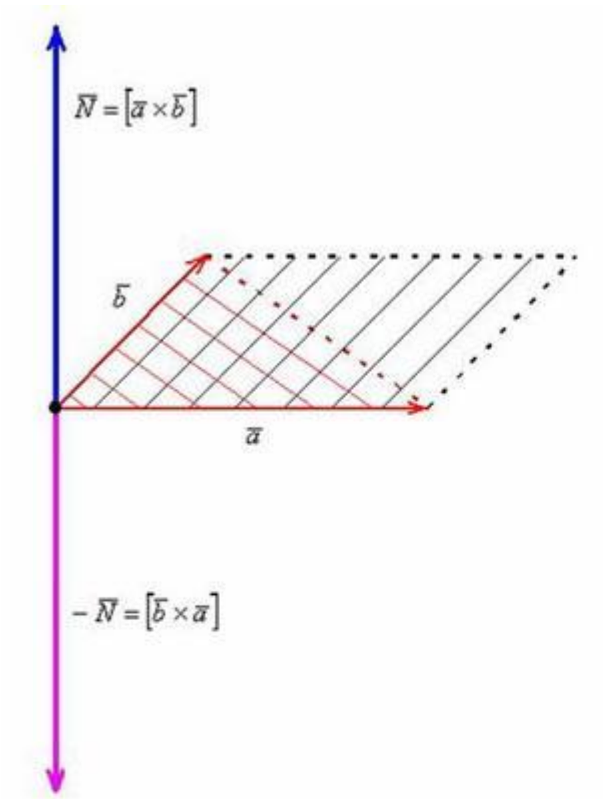
Скалярное произведение векторов



$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\angle(\overline{a};\overline{b})$$

$$\overline{a}\overline{b}=0\Rightarrow\overline{a}\perp\overline{b}$$

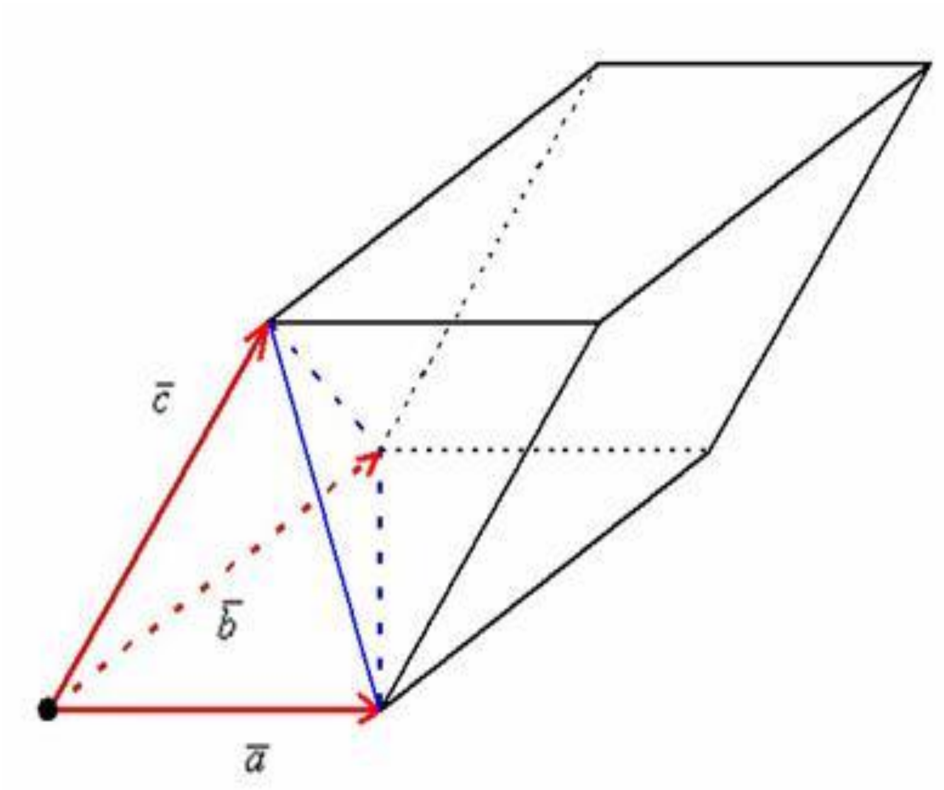
Векторное произведение коллинеарных векторов



$$\left[\overline{w}\times\overline{v}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$[v\times w] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}\cdot\bar{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}\cdot\bar{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\cdot\bar{k}$$

Смешанное произведение векторов



$$p = (\bar{v} \cdot \bar{w} \cdot \bar{s}) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix}$$

$$p = (\bar{v} \cdot \bar{w} \cdot \bar{s}) = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & s_1 \\ v_2 & w_2 & s_2 \\ v_3 & w_3 & s_3 \end{vmatrix}$$