

**Методика решения
задания 18
ЕГЭ-2016
по информатике**

**учитель информатики ГБОУ СОШ
№2107**

Зуева Ю.В.

zueva@2107school.ru

Что необходимо знать:

Логические операции:

\neg *инверсия* (логическое отрицание),

\wedge *конъюнкция* (логическое умножение),

пересечение - \cap

\vee *дизъюнкция* (логическое сложение),

объединение -
 \cup

Дополнительные операции:

\rightarrow *импликация* (логическое следование)

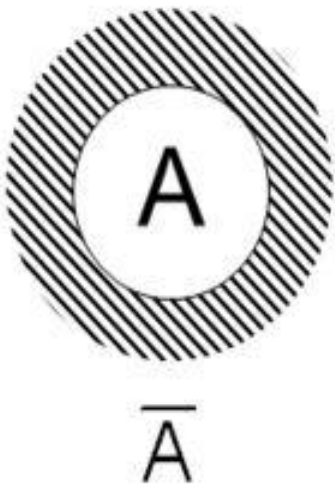
Свойство импликации: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$

\equiv *эквивалентность* (логическое равенство)

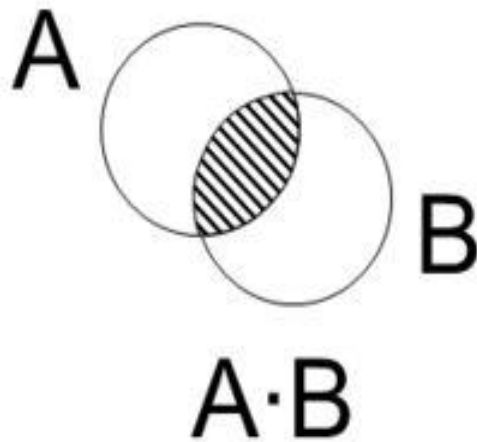


Что необходимо знать:

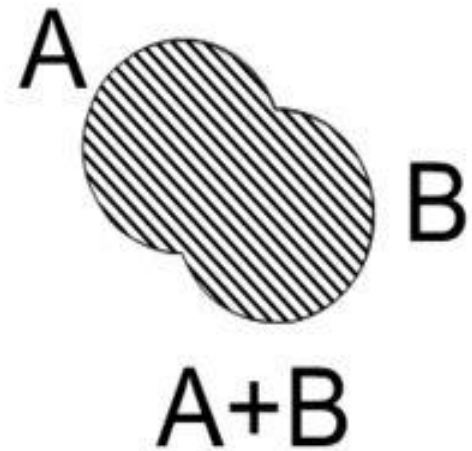
Круги Эйлера — геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами, для



инверсия



конъюнкция
(пересечение)



дизъюнкция
(объединение)

Приложение

Разбор заданий 18

На числовой прямой даны два отрезка:

$P = [20, 50]$ и $Q = [10, 60]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in A)) \wedge ((x \in A) \rightarrow (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x . Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) $[5, 40]$ 2) $[15, 54]$ 3) $[30, 58]$ 4) $[5, 70]$



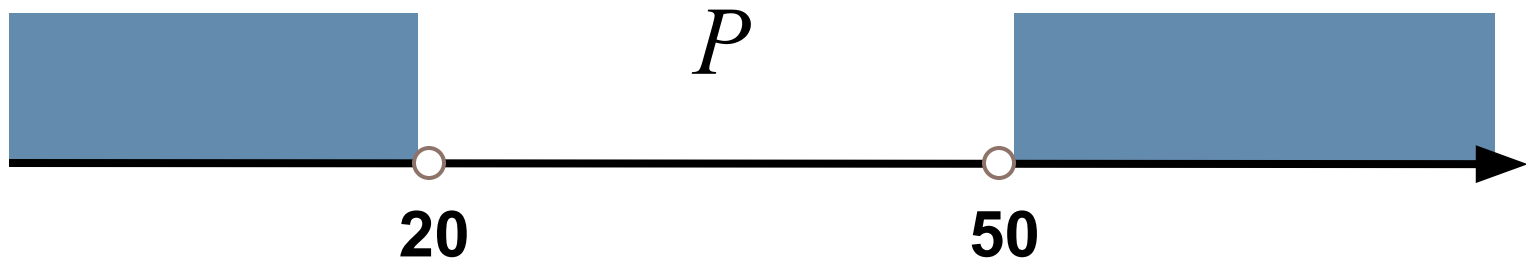
Преобразуем: $((x \in P) \rightarrow (x \in A)) \wedge ((x \in A) \rightarrow (x \in Q)) = 1$

$$(\neg(x \in P) \vee (x \in A)) \wedge (\neg(x \in A) \vee (x \in Q)) = 1$$

$$\neg(x \in P) = x \notin P$$

$$((x \notin P) \vee (x \in A)) \wedge ((x \notin A) \vee (x \in Q))$$

Рассмотрим первую часть уравнения, учитывая $P = [20, 50]$

$$(x \notin P) \vee (x \in A) = 1$$


отрезок A должен полностью перекрывать отрезок P

- 1) $[5, 40]$ 2) $[15, 54]$ 3) $[30, 58]$ 4) $[5, 70]$

Рассмотрим вторую часть уравнения, учитывая $Q = [10, 60]$

$$(x \notin A) \vee (x \in Q) = 1$$



Заметим, что во второй части уравнения $(x \notin A)$, следовательно A находится внутри отрезка $[10, 60]$

2) $[15, 54]$

4) $[5, 70]$

Ответ: 2

Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение $(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \rightarrow (((x \in \{4, 8, 12, 116\}) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x . Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A .

Обозначим $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $Q = \{4, 8, 12, 116\}$

Запишем логическое выражение:

$$(x \in P) \rightarrow (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in P)) = 1$$

Преобразуем выражение, используя свойство импликации:

$$(x \notin P) \vee \neg((x \in Q) \wedge (x \notin A)) \vee (x \notin P) = 1$$

Упрощаем по законам де Моргана и ассоциативности:

$$(x \notin P) \vee (x \notin Q) \vee (x \in A) \vee (x \notin P) = 1$$



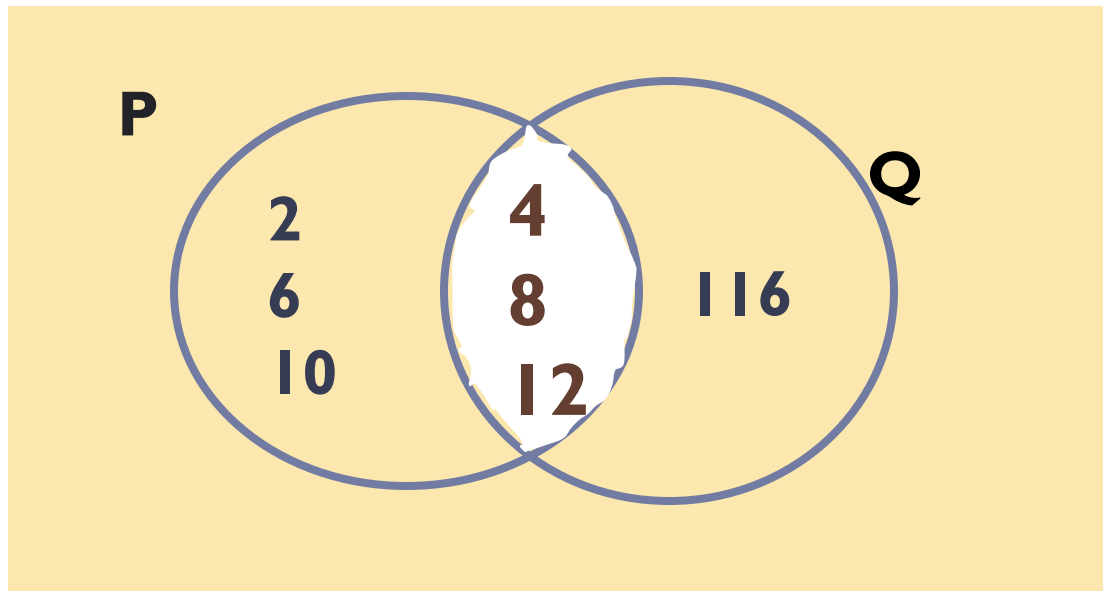
Преобразуем по закону идемпотентности (правило равносильности):

$$(x \notin Q) \vee (x \notin P) \vee (x \in A) = 1$$

Переходим к множествам

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \quad Q = \{4, 8, 12, 116\}$$

1 способ: Построим круги Эйлера для множеств



Ответ: 24



2 способ:

$$(x \notin Q) \vee (x \in A) \vee (x \notin P) = 1$$

*Если $(x \notin Q)=1$ или $(x \notin P)=1$, то $(x \in A)$ - любые значения

*Если $(x \notin Q)=0$ и $(x \notin P)=0$, то $(x \in A)=1$

Переходим к множествам

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \quad Q = \{4, 8, 12, 116\}$$

Рассмотрим какие элементы множества входят одновременно в P и Q

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \quad Q = \{4, 8, 12, 116\}$$

Именно эти числа должны быть минимальным множеством $A_{\min} = \{4, 8, 12\}$

Ответ: 24



Введём выражение $M \ \& \ K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите **наибольшее натуральное число A** , такое что выражение

$$(X \ \& \ A \neq 0) \rightarrow ((X \ \& \ 20 = 0) \rightarrow (X \ \& \ 5 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

Упростим логическое выражение:

$$\neg(X \ \& \ A \neq 0) \vee (\neg(X \ \& \ 20 = 0) \vee (X \ \& \ 5 \neq 0)) = 1$$

$$(X \ \& \ A = 0) \vee (X \ \& \ 20 \neq 0) \vee (X \ \& \ 5 \neq 0) = 1$$



$$(X \& A = 0) \vee (X \& 20 \neq 0) \vee (X \& 5 \neq 0) =$$

1

Рассмотрим случай:

$$(X \& A = 0) = 1$$

$$(X \& 20 \neq 0) = 0$$

$$(X \& 5 \neq 0) = 0$$

Y1	Y2	Y1 \vee Y2
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Преобразуем логические выражения:

$$X \& A = 0$$

$$X \& 20 = 0$$

$$X \& 5 = 0$$

Для данных уравнений составим маску X

$$X \& 20 = 0$$

Представим числа в двоичной системе счисления:

$$20_{10} = 16 + 4 = 10100_2$$

$$X_{10} = ??????_2$$

Выполним поразрядную конъюнкцию:

$$\begin{array}{r} 20_{10} = 10100_2 \\ X_{10} = ??????_2 \\ \hline 00000_2 \end{array}$$

Составим маску для X , где $*$ - любое двоичное число

$$X = 0*0**$$



$$X \& 5 = 0$$

Представим числа в двоичной системе счисления:

$$5_{10} = 4 + 1 = 00101_2$$

$$X_{10} = 0*0**_2$$

Выполним поразрядную конъюнкцию

$$\begin{array}{r} 5_{10} = 00101_2 \\ X_{10} = 0*0**_2 \\ \hline 00000_2 \end{array}$$

Составим маску для $X=0*0*0$



$X \& A = 0$

Выполним поразрядную конъюнкцию, представим $A_{10} = abcde_2$, где a, b, c, d, e – двоичные цифры.

$$\begin{array}{r} X_{10} = 0*0*0_2 \\ A_{10} = abcde_2 \\ \hline 00000_2 \end{array}$$

Получим $b=0, d=0$,
 a, c, e – любые двоичные цифры.

$$A_{10} = a0c0e_2$$

$$A \max = 10101_2 = 16 + 4 + 1 = 21_{10}$$

Введём выражение $M \ \& \ K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число A , такое что выражение

$$(X \ \& \ 49 \neq 0) \rightarrow ((X \ \& \ 33 = 0) \rightarrow (X \ \& \ A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

Преобразуем логическое выражение:

$$(X \ \& \ 49 \neq 0) \rightarrow ((X \ \& \ 33 = 0) \rightarrow (X \ \& \ A \neq 0)) = 1$$

$$\neg (X \ \& \ 49 \neq 0) \vee (\neg (X \ \& \ 33 = 0) \vee (X \ \& \ A \neq 0)) = 1$$

$$(X \ \& \ 49 = 0) \vee (X \ \& \ 33 \neq 0) \vee (X \ \& \ A \neq 0) = 1$$



$$(X \& 49 = 0) \vee (X \& 33 \neq 0) \vee (X \& A \neq 0) = 1$$

Рассмотрим случай:

$$(X \& A \neq 0) = 1$$

$$(X \& 33 \neq 0) = 0$$

$$(X \& 49 = 0) = 0$$

Преобразуем:

$$X \& A \neq 0$$

$$X \& 33 = 0$$

$$X \& 49 \neq 0$$

Рассмотрим поразрядную конъюнкцию для выражения: $X \& 33 = 0$

Представим числа в двоичной системе счисления:

$$33_{10} = 32 + 1 = 100001_2$$

$$X_{10} = ??????_2$$



$$X \& 33 = 0$$

Выполним поразрядную конъюнкцию:

$$\begin{array}{r} 33_{10} = 100001_2 \\ X_{10} = \text{?????}_2 \\ \hline 000000_2 \end{array}$$

Составим маску для X , где $*$ - любое двоичное число

$$X = 0*****0$$



$X \& 49 \neq 0$

Представим числа в двоичной системе счисления:

$$49_{10} = 32 + 16 + 1 = 110001_2$$

$$X_{10} = 0*****0_2$$

Выполним поразрядную конъюнкцию

$$\begin{array}{r} 49_{10} = 110001_2 \\ X_{10} = \underline{0*****0_2} \\ \hline 010000_2 \end{array}$$

Составим маску для $X=01****0$



$X \& A \neq 0$

Выполним поразрядную конъюнкцию, представим $A_{10} = abcdef_2$, где a, b, c, d, e, f – двоичные цифры.

$$\begin{array}{l} X_{10} = 01***0_2 \\ A_{10} = \frac{abcdef_2}{0b???0_2} \end{array}$$

Заметим, что $b=1$, для любых значений X

$$A_{\min} = 010000_2 = 16_{10}$$



Обозначим через $M \& N$ поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел M и N . Так, например, $14 \& 5 = 1110_2 \& 0101_2 = 0100_2 = 4$. Для какого наименьшего неотрицательного целого числа A формула

$$(x \& 29 \neq 0) \rightarrow ((x \& 17 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$$

тождественно истинна (т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной x)?

Упростим логическое выражение:

$$\neg(X \& 29 \neq 0) \vee (\neg(X \& 17 = 0) \vee (X \& A \neq 0)) = 1$$

$$(X \& 29 = 0) \vee ((X \& 17 \neq 0) \vee (X \& A \neq 0)) = 1$$



$$(X \& 29 = 0) \vee (X \& 17 \neq 0) \vee (X \& A \neq 0) = 1$$

Рассмотрим случай:

$$(X \& A \neq 0) = 1$$

$$(X \& 17 \neq 0) = 0$$

$$(X \& 29 = 0) = 0$$

Преобразуем:

$$X \& A \neq 0$$

$$X \& 17 = 0$$

$$X \& 29 \neq 0$$

Рассмотрим поразрядную конъюнкцию для выражения: $X \& 17 = 0$

Представим числа в двоичной системе счисления:

$$17_{10} = 16 + 1 = 10001_2$$

$$X_{10} = ?????_2$$



$$X \& 17 = 0$$

Выполним поразрядную конъюнкцию:

$$\begin{array}{r} 17_{10} = 10001_2 \\ X_{10} = ?????_2 \\ \hline 00000_2 \end{array}$$

Составим маску для X , где $*$ - любое двоичное число

$$X = 0***0$$



$X \& 29 \neq 0$

Представим числа в двоичной системе счисления:

$$29_{10} = 16 + 8 + 4 + 1 = 11101_2$$

$$X_{10} = 0****0_2$$

Выполним поразрядную конъюнкцию

$$\begin{array}{r} 29_{10} = 11101_2 \\ X_{10} = 0****0_2 \\ \hline 0??00_2 \end{array}$$

Составим маски для X :

$$X=01**0$$

$$X=0*1*0$$

$$X=011*0$$



$X \& A \neq 0$

Выполним поразрядную конъюнкцию, представим

$$A_{10} = abcde_2,$$

где a, b, c, d, e – двоичные цифры.

$$X_{10} = 01**0_2$$

$$A_{10} = \frac{abcde_2}{0b??0_2}$$

$$X_{10} = 0*1*0_2$$

$$A_{10} = \frac{abcde_2}{0?c?0_2}$$

$$X_{10} = 011*0_2$$

$$A_{10} = \frac{abcde_2}{0bc?0_2}$$

Заметим, что $b=1$ и $c=1$ для всех масок X

$$A_{\min} = 01100_2 = 8 + 4 = 12_{10}$$



СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- <http://kpolyakov.narod.ru/download/BI5.doc>
- <http://ege.yandex.ru/informatics>
- <http://ege-go.ru/zadania/grb/bI5/>
- Демовариант ЕГЭ по информатике 2016
- <http://kpolyakov.narod.ru/download/egeI8.doc>
- тренировочная работа по информатике от 02.12.15

