Основы финансовых вычислений

Старцева Евгения Николаевна

startseva.syktsu@gmail.com

T:\Институт ТНиИТ\Кафедра ПМИТО\Финансовая математика\

Финансовая математика охватывает определенный круг методов вычислений, необходимость в которых возникает всякий раз, когда в условиях любой финансовой, банковской или коммерческой операции оговариваются конкретные значения трех видов параметров:

- стоимостные характеристики;
- временные данные;
- процентные ставки.

Между перечисленными параметрами существуют функциональные зависимости. Изучение этих зависимостей и разработка на их основе методов решения финансовых задач определенного класса и является *предметом финансовой математики*.

Задачи финансовой математики:

- измерение конечных финансовых результатов операции для каждой из участвующих сторон;
- разработка планов выполнения финансовых операций;
- измерение зависимости конечных результатов операции от ее основных параметров;
- определение допустимых критических значений этих параметров и расчет параметров эквивалентного (безубыточного) изменения первоначальных условий и т.д.

Временная ценность денег

- принцип *изменения ценности денег во времени*

Следствие: *неправомерность суммирования* денежных величин, относящихся к разным моментам времени

Проценты и процентные ставки

$$P \longrightarrow S$$

Абсолютный прирост: $I = S - P$

- темп прироста $i_t = i = \dfrac{S - P}{P}$
- темп снижения $d_t = d = \dfrac{S - P}{S}$

Интервал времени, к которому относится процентная ставка, называют ***периодом начисления***.

Под ***процентными деньгами (процентами) I*** понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг.

Процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга называют ***наращением*** или ***ростом первоначальной суммы***.

процентные ставки

дискретные непрерывные

простые сложные

постоянные переменные

Простые проценты

Сущность простых процентов заключается в том, что они начисляются на одну и ту же величину капитала в течение всего срока ссуды.

Под ***наращенной суммой S*** (ссуды, долга, депозита, других видов инвестированных средств) понимается первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока.

Пусть P – первоначальная сумма денег,
i –ставка простых процентов (выражена в виде десятичной дроби).
Начисленные проценты за один период - Pi.

Процесс изменения суммы долга с начисленными простыми процентами:

P,

$P+Pi=P(1+i)$,

$P(1+i)+Pi=P(1+2i)$,

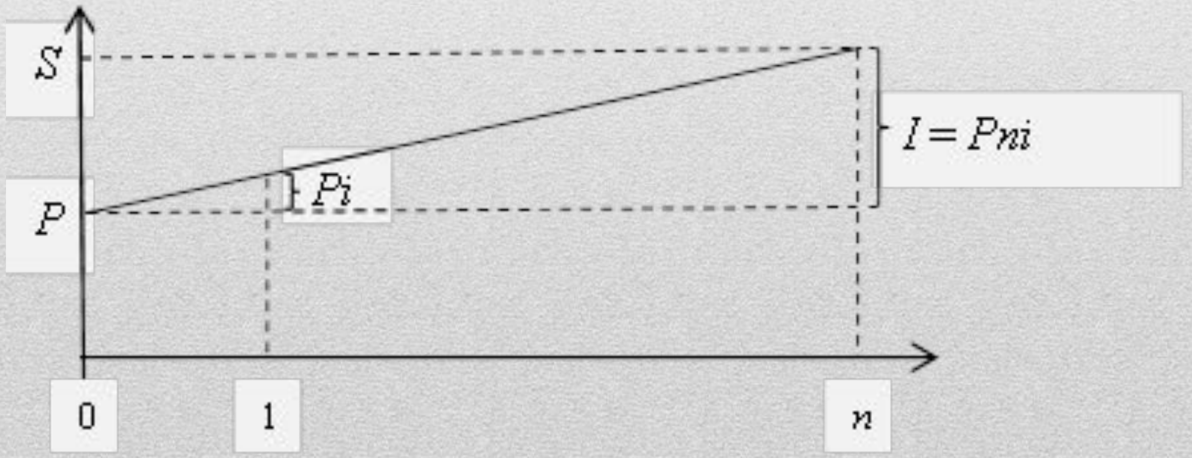
…,

$P(1+ni)$

Формула наращения по простым процентам:
$S = P(1+ni)$.

Множитель $(1+ni)$ называется *множителем наращения.*

$S = P + I$, где $I=Pni$.



Пример 1. Ссуда величиной 700 рублей выдана на 4 года при ставке простых процентов, равной 20% годовых. Определить величину процентного платежа и сумму накопленного долга.

Решение.

$I = Pni = 700 \cdot 4 \cdot 0{,}2 = 560$ руб. – проценты за 4 года;

$S = P + I = 700 + 560 = 1260$ руб.

или

$S = P(1+ni) = 700 \cdot (1 + 4 \cdot 0{,}2) = 700 \cdot (1 + 0{,}8) =$
$=1260$руб. – наращенная сумма.

Замечание. Увеличение процентной ставки i или срока n в k раз одинаковым образом влияет на множитель наращения, который увеличится в $(1+kni)/(1+ni)$ раз.

- Для примера 1: если $i_н = 2i$, то $I_н=2I$,
а S увеличится в $(1+2\cdot4\cdot0,2)/(1+4\cdot0,2)=$ 1,44 раза

Практика начисления простых процентов

Начисление простых процентов обычно используется в двух случаях:

(1) при заключении краткосрочных контрактов, срок которых не превышает года ($n \leq 1$);

(2) в случае, если проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются.

$$n = \frac{t}{K},$$

где n – срок ссуды, измеренный в долях года;

t – срок операции (в днях);

K – число дней в году (временная база)

- K =
  - 365(366) (точный процент)
  - 360 (обыкновенный процент)

- t может быть
  - точным
  - приближенным

<u>день выдачи и день погашения считаются за один день!</u>

Варианты, применяемые на практике:

- точные проценты с точным числом дней ссуды (схема *k*/365, британская практика);
- обыкновенные проценты с точным числом дней (схема *k* /360, французская практика);
- обыкновенные проценты с приближенным числом дней (схема 30/360, германская практика).

Пример 2. Ссуда в размере 10000 руб. выдана 20.01 до 5.09 включительно под 18% годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока при начислении простых процентов?

Решение. Предварительно определим число дней ссуды *t*. Точное число дней: (31-20)+28+31+30+31+30+31+31+5=228, приближенное – (30-20)+30·7+5=225.

1) Точные проценты с точным числом дней (*k*/365).

S = 10000·(1+(228/365)·0,18) = 11124,38руб.

2) Обыкновенные проценты с точным числом дней (*k* /360).

S = 10000·(1+(228/360)·0,18)= 11140,00 руб.

3) Обыкновенные проценты с приближенным числом дней (30/360).

S = 10000·(1+(225/360)·0,18) = 11125,00 руб.

Простые переменные ставки

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_m i_m) = P(1 + \sum_{j=1}^{m} n_j i_j)$$

где P – первоначальная сумма,

i_j – ставка простых процентов в периоде с номером j,

n_j – продолжительность периода j – периода начисления по ставке i_j.

Как изменится наращенная величина, если начисленные проценты не выплачиваются периодически, а реинвестируются вместе с первоначальной суммой?

Дисконтирование и учет по простым ставкам.

Расчет P по S называется ***дисконтированием*** суммы S.

Величину P, найденную дисконтированием, называют ***современной величиной*** (***текущей стоимостью***) суммы S.

Проценты в виде разности $D = S - P$ называют ***дисконтом*** или ***скидкой***.

Процесс начисления и удержания процентов вперед (в виде дисконта) называют *учетом*.

Дисконт может определяться через процентную ставку или в виде абсолютной величины.

Приведение – это определение любой стоимостной величины на некоторый момент времени.

НАСТОЯЩЕЕ		БУДУЩЕЕ
✓исходная сумма ✓процентная ставка	наращение ----------------->	возвращаемая сумма
современная величина	дисконтирование <-----------------	✓ожидаемая к поступлению сумма ✓ставка дисконтирования

Логика финансовых операций

Математическое дисконтирование.

Если в прямой задаче $S=P(1+ni)$, то в обратной

$$P = S\frac{1}{1+ni}.$$

Дисконт суммы S равен $D = S - P$.

Пример 3. Через 145 дней после подписания договора должник выплатит 120 тыс. руб. Кредит выдан под 15% годовых. Какова первоначальная сумма долга при условии, что временная база равна 365 дням?

Решение. Первоначальная сумма долга

$$P = \frac{120000}{1+{}^{145}/_{365}\cdot 0{,}15} = 113251{,}45 \text{ руб.}$$

Банковский или коммерческий учет.

Согласно этому методу проценты за пользование ссудой в виде дисконта начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока. При этом применяется учетная ставка d:

$$d = \frac{S - P}{S \cdot n}$$

Размер дисконта D, или суммы учета, равен $D = S \cdot n \cdot d$.

Таким образом, $P = S - Snd = S \cdot (1 - nd)$.

Если d – годовая учетная ставка, то срок n измеряется в годах и показывает период времени от момента учета векселя до даты его погашения.

Что будет при $n > 1/d$?

Пример 4. Вексель выдан на сумму 30 тыс. рублей со сроком погашения 1.10.2001. Владелец векселя учел его в банке 27.07.2001 по учетной ставке 12% годовых. Найти дисконтированную величину векселя.

Решение. Дисконтный множитель
$(1- nd) = 1- (66/360)\cdot 0{,}12 = 0{,}978.$

Дисконтированная величина векселя
$P = 30\cdot 0{,}978 = 29{,}34$ тыс.руб.

Наращение по учетной ставке.

$$S = P\frac{1}{1 - nd}$$

Пример 6. Для погашения своего долга величиной 500 тыс. рублей предприятие 11.04.2001. выдало банку вексель со сроком погашения 3.08.2001. Какова величина векселя, если учетная ставка составляет 14% годовых?

Решение. Множитель наращения $1/(1 - nd) = 1/(1 - (114/360)\cdot 0,14) = 1,0464$.

Величина векселя S=500·1,0464=523,2 тыс. руб.

ставка	прямая задача	обратная задача
наращения, i	наращение: $S = P\,(1 + ni)$	дисконтирование: $P = S\,/\,(1 + ni)$
учетная, d	дисконтирование: $P = S\,(1 - nd)$	наращение: $S = P\,/\,(1 - nd)$

Надо заметить, что рассмотренные два метода наращения и дисконтирования – по ставке наращения и учетной ставке – приводят к разным результатам даже тогда, когда эти ставки равны. При этом учетная ставка отражает фактор времени более жестко.

Так, например, при $i = d = 18\%$, сроке $n = 0{,}5$ и $P = 10000$ руб.

$S=P(1+ni)=10000\cdot 1{,}09= 10900$ руб., $I = 900$ руб.

$S=P/(1-nd)=10000/0{,}91= 10989$ руб., $D=989$ руб.

Срок ссуды.

$$n = \frac{S - P}{Pi}; \qquad t = \frac{S - P}{Pi} K.$$

$$n = \frac{S - P}{Sd}; \qquad t = \frac{S - P}{Sd} K.$$

Величина процентной ставки.

$$i = \frac{S - P}{Pn} = \frac{S - P}{Pt} K;$$

$$d = \frac{S - P}{Sn} = \frac{S - P}{St} K.$$

Срок в этих формулах имеет разный смысл: в первом случае это весь срок операции, а во втором – оставшийся срок до погашения.

Пример 7. Определить доходность операции для кредитора, если им предоставлена ссуда в размере 2 млн. руб. на 100 дней и контракт предусматривает сумму погашения долга 2,5 млн. руб. Доходность выразить в виде простой ставки процентов i. Временную базу принять равной 360 дней.

Решение. Воспользуемся полученной формулой:

$$i = \frac{S - P}{Pt} K = \frac{2{,}5 - 2}{2 \cdot 100} \cdot 360 = 0{,}9;$$

т.е. 90%.