


ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Старцева Евгения Николаевна

startseva.syktsu@gmail.com

Т:\Институт ТНиИТ\Кафедра ПМИТО\Финансовая
математика\



Финансовая математика охватывает определенный круг методов вычислений, необходимость в которых возникает всякий раз, когда в условиях любой финансовой, банковской или коммерческой операции оговариваются конкретные значения трех видов параметров:

- стоимостные характеристики;
 - временные данные;
 - процентные ставки.
-

Между перечисленными параметрами существуют функциональные зависимости. Изучение этих зависимостей и разработка на их основе методов решения финансовых задач определенного класса и является предметом финансовой математики.

Задачи финансовой математики:

- измерение конечных финансовых результатов операции для каждой из участвующих сторон;
 - разработка планов выполнения финансовых операций;
 - измерение зависимости конечных результатов операции от ее основных параметров;
 - определение допустимых критических значений этих параметров и расчет параметров эквивалентного (безубыточного) изменения первоначальных условий и т.д.
-

Временная ценность денег

- принцип *изменения ценности денег во времени*

Следствие: *неправомерность суммирования*

денежных величин, относящихся к разным
моментам времени

Проценты и процентные ставки

$$P \longrightarrow S$$

Абсолютный прирост: $I = S - P$

- темп прироста $i_t = i = \frac{S - P}{P}$

- темп снижения $d_t = d = \frac{S - P}{S}$

Интервал времени, к которому относится процентная ставка, называют *периодом начисления*.

Под *процентными деньгами (процентами) I* понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг.

Процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга называют *наращением* или *ростом первоначальной суммы*.



Простые проценты

Сущность простых процентов заключается в том, что они начисляются на одну и ту же величину капитала в течение всего срока ссуды.

Под **наращенной суммой S** (ссуды, долга, депозита, других видов инвестированных средств) понимается первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока.

Пусть P – первоначальная сумма денег,
 i – ставка простых процентов (выражена в виде десятичной дроби).

Начисленные проценты за один период - Pi .

Процесс изменения суммы долга с начисленными простыми процентами:

P ,

$$P + Pi = P(1 + i),$$

$$P(1 + i) + Pi = P(1 + 2i),$$

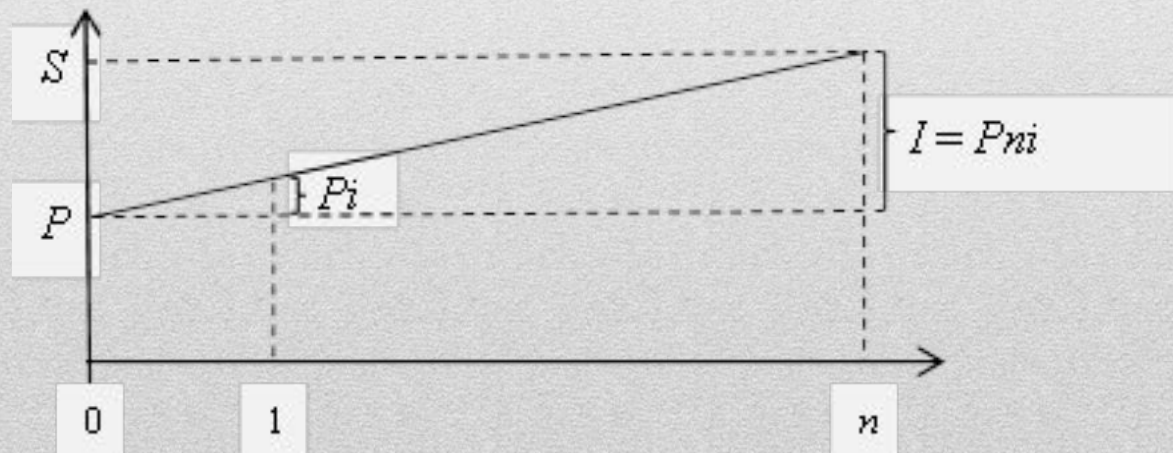
...

$$P(1 + ni)$$

Формула наращенния по простым процентам:
 $S = P(1+ni)$.

Множитель $(1+ni)$ называется множителем наращенния.

$S = P + I$, где $I = Pni$.



Пример 1. Ссуда величиной 700 рублей выдана на 4 года при ставке простых процентов, равной 20% годовых. Определить величину процентного платежа и сумму накопленного долга.

Решение.

$I = Pni = 700 \cdot 4 \cdot 0,2 = 560$ руб. – проценты за 4 года;

$S = P + I = 700 + 560 = 1260$ руб.

или

$S = P(1+ni) = 700 \cdot (1 + 4 \cdot 0,2) = 700 \cdot (1 + 0,8) = 1260$ руб. – наращенная сумма.

Замечание. Увеличение процентной ставки i или срока n в k раз одинаковым образом влияет на множитель наращенения, который увеличится в $(1+kni)/(1+ni)$ раз.

Для примера 1: если $i_H = 2i$, то $I_H = 2I$,
а S увеличится в $(1+2 \cdot 4 \cdot 0,2)/(1+4 \cdot 0,2) = 1,44$ раза

Практика начисления простых процентов

Начисление простых процентов обычно используется в двух случаях:

(1) при заключении краткосрочных контрактов, срок которых не превышает года ($n \leq 1$);

(2) в случае, если проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются.

$$n = \frac{t}{K},$$

где n – срок ссуды, измеренный в долях года;

t – срок операции (в днях);

K – число дней в году (временная база)



день выдачи и день погашения считаются за один день!

Варианты, применяемые на практике:

- точные проценты с точным числом дней ссуды (схема $k/365$, британская практика);
 - обыкновенные проценты с точным числом дней (схема $k /360$, французская практика);
 - обыкновенные проценты с приближенным числом дней (схема $30/360$, германская практика).
-

Пример 2. Ссуда в размере 10000 руб. выдана 20.01 до 5.09 включительно под 18% годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока при начислении простых процентов?

Решение. Предварительно определим число дней ссуды t .
Точное число дней: $(31-20)+28+31+30+31+30+31+31+5=228$,
приближенное – $(30-20)+30 \cdot 7+5=225$.

1) Точные проценты с точным числом дней ($k/365$).

$$S = 10000 \cdot (1 + (228/365) \cdot 0,18) = 11124,38 \text{руб.}$$

2) Обыкновенные проценты с точным числом дней ($k/360$).

$$S = 10000 \cdot (1 + (228/360) \cdot 0,18) = 11140,00 \text{руб.}$$

3) Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ($30/360$).

$$S = 10000 \cdot (1 + (225/360) \cdot 0,18) = 11125,00 \text{руб.}$$

Простые переменные ставки

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \dots + n_m i_m) = P(1 + \sum_{j=1}^m n_j i_j)$$

где P – первоначальная сумма,

i_j – ставка простых процентов в периоде с номером j ,

n_j – продолжительность периода j – периода начисления по ставке i_j .

Как изменится наращенная величина, если начисленные проценты не выплачиваются периодически, а реинвестируются вместе с первоначальной суммой?

Дисконтирование и учет по простым ставкам.

Расчет P по S называется *дисконтированием* суммы S .

Величину P , найденную дисконтированием, называют *современной величиной (текущей стоимостью)* суммы S .

Проценты в виде разности $D = S - P$ называют *дисконтом* или *скидкой*.

Процесс начисления и удержания процентов вперед (в виде дисконта) называют *учетом*.

Дисконт может определяться через процентную ставку или в виде абсолютной величины.

Приведение — это определение любой стоимостной величины на некоторый момент времени.

НАСТОЯЩЕЕ		БУДУЩЕЕ
✓ исходная сумма ✓ процентная ставка	наращение ----->	возвращаемая сумма
современная величина	дисконтирование <-----	✓ ожидаемая к поступлению сумма ✓ ставка дисконтирования

Логика финансовых операций

Математическое дисконтирование.

Если в прямой задаче $S=P(1+ni)$, то в обратной

$$P = S \frac{1}{1 + ni}. \quad \text{Дисконт суммы } S \text{ равен } D = S - P.$$

Пример 3. Через 145 дней после подписания договора должник выплатит 120 тыс. руб. Кредит выдан под 15% годовых. Какова первоначальная сумма долга при условии, что временная база равна 365 дням?

Решение. Первоначальная сумма долга

$$P = \frac{120000}{1 + \frac{145}{365} \cdot 0,15} = 113251,45 \text{ руб.}$$

Банковский или коммерческий учет.

Согласно этому методу проценты за пользование ссудой в виде дисконта начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока. При этом применяется учетная ставка d :

$$d = \frac{S - P}{S \cdot n}$$

Размер дисконта D , или суммы учета, равен

$$D = S \cdot n \cdot d.$$

Таким образом, $P = S - Snd = S \cdot (1 - nd)$.

Если d – годовая учетная ставка, то срок n измеряется в годах и показывает период времени от момента учета векселя до даты его погашения.

Что будет при $n > 1/d$?

Пример 4. Вексель выдан на сумму 30 тыс. рублей со сроком погашения 1.10.2001. Владелец векселя учел его в банке 27.07.2001 по учетной ставке 12% годовых. Найти дисконтированную величину векселя.

Решение. Дисконтный множитель
 $(1 - nd) = 1 - (66/360) \cdot 0,12 = 0,978$.

Дисконтированная величина векселя
 $P = 30 \cdot 0,978 = 29,34$ тыс.руб.

Наращение по учетной ставке.

$$S = P \frac{1}{1 - nd}$$

Пример 6. Для погашения своего долга величиной 500 тыс. рублей предприятие 11.04.2001. выдало банку вексель со сроком погашения 3.08.2001. Какова величина векселя, если учетная ставка составляет 14% годовых?

Решение. Множитель наращения

$$1/(1 - nd) = 1/(1 - (114/360) \cdot 0,14) = 1,0464.$$

Величина векселя $S = 500 \cdot 1,0464 = 523,2$ тыс. руб.

ставка	прямая задача	обратная задача
нараще- ния, i	наращение: $S = P (1 + ni)$	дисконтирование: $P = S / (1 + ni)$
учетная, d	дисконтирование: $P = S (1 - nd)$	наращение: $S = P / (1 - nd)$

Надо заметить, что рассмотренные два метода наращенния и дисконтирования – по ставке наращенния и учетной ставке – приводят к разным результатам даже тогда, когда эти ставки равны. При этом учетная ставка отражает фактор времени более жестко.

Так, например, при $i = d = 18\%$, сроке $n = 0,5$ и $P = 10000$ руб.

$$S = P(1 + ni) = 10000 \cdot 1,09 = 10900 \text{ руб.}, I = 900 \text{ руб.}$$

$$S = P / (1 - nd) = 10000 / 0,91 = 10989 \text{ руб.}, D = 989 \text{ руб.}$$

Срок ссуды.

$$n = \frac{S - P}{Pi}; \quad t = \frac{S - P}{Pi} K.$$

$$n = \frac{S - P}{Sd}; \quad t = \frac{S - P}{Sd} K.$$

Величина процентной ставки.

$$i = \frac{S - P}{Pn} = \frac{S - P}{Pt} K;$$

$$d = \frac{S - P}{Sn} = \frac{S - P}{St} K.$$

Срок в этих формулах имеет разный смысл: в первом случае это весь срок операции, а во втором – оставшийся срок до погашения.

Пример 7. Определить доходность операции для кредитора, если им предоставлена ссуда в размере 2 млн. руб. на 100 дней и контракт предусматривает сумму погашения долга 2,5 млн. руб. Доходность выразить в виде простой ставки процентов i . Временную базу принять равной 360 дней.

Решение. Воспользуемся полученной формулой:

$$i = \frac{S - P}{Pt} K = \frac{2,5 - 2}{2 \cdot 100} \cdot 360 = 0,9;$$

т.е. 90%.
