

Задачи на построение

Календарно-тематическое планирование

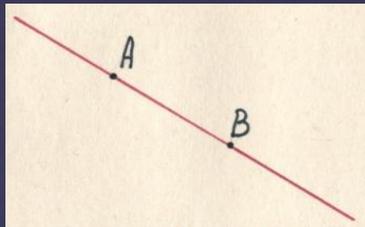
№ п/п	Кол-во уроков	Тема	Результат	Универсальные учебные (познавательные) действия
Задачи на построение – 9 часов.				
1-2	2	Задачи на построение	Уметь выполнять основные построения с помощью циркуля и линейки; решать простейшие задачи на построение.	Использовать простейшие задачи на построение для решения более сложных задач. Обосновывать рациональность выбора способа решения задач. Развивать аналитическое и логическое мышление. Сопоставлять полученный результат с условием задачи. Анализировать возможные случаи.
3-4	2	Семинар по теме «Задачи на построение»		
5-8	4	Практикум по теме «Задачи на построение»		
9	1	Практическая работа по теме «Задачи на построение»		

Структура темы.

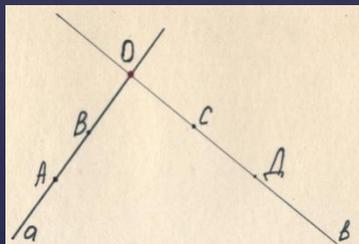
Основные построения:

П1. Проводить на плоскости произвольную прямую.

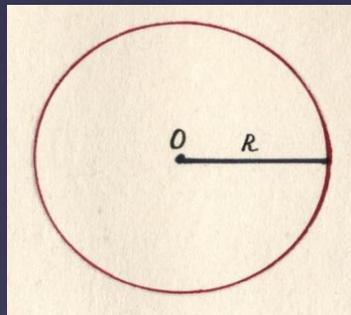
П2. Построение прямой, проходящей через две данные точки.



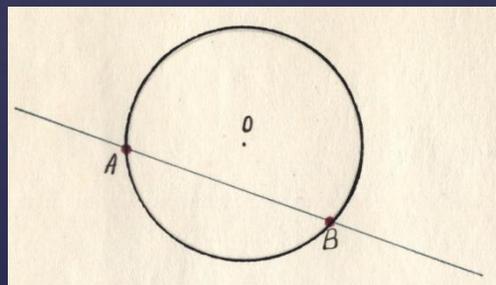
П3. Нахождение точки пересечения двух прямых.



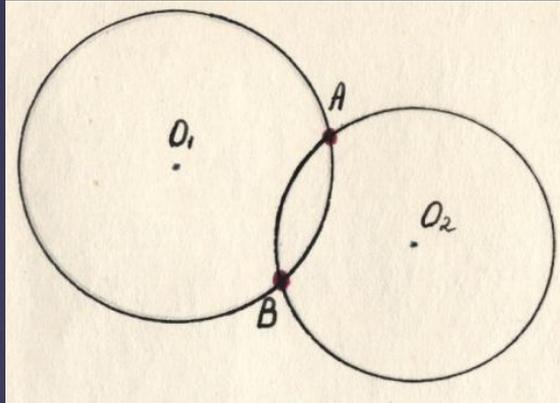
П4. Построение окружности с заданным центром и радиусом.



П5. Нахождение точек пересечения прямой и окружности, если они существуют.



П6. Нахождение точек пересечения двух окружностей, если они существуют.



П7. Выбирать на прямой, или на окружности, или вне их произвольную точку.

Решить задачу на построение – значит, свести ее решение к конечному числу основных построений П1-П7.

Выполните следующие геометрические построения (составить план построения задач):

- Построить отрезок, равный данному. (П1, П7, П4, П5)
- Построить угол, равный данному. (П1, П7, П4, П5, П4, П6, П2)
- Построить биссектрису данного угла. (П4, П5, П4, П4, П6, П2)
- Разделить данный отрезок пополам. (П4, П4, П6, П2, П3)
- Через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной прямой. (Рассмотреть два случая: данная точка лежит на прямой и данная точка не принадлежит прямой.)

Этапы решения задач на построение:

- **Анализ (или поиск решения задачи).**

Цель – найти содержательную связь между данными и искомыми элементами. Начинают его с предположения, что задача уже решена и искомая фигура построена. Выполняется чертеж (возможно от руки), на котором вместе с данными фигурами нарисована и искомая фигура, и по которому ведется поиск решения.

- **Построение.**

Цель – выполнение всех основных задач согласно вывода анализа по конкретным данным в задаче. Состоит из последовательного перечисления основных шагов построения и непосредственного построения искомой фигуры.

- **Доказательство.**

Цель – проверить на построенной фигуре соблюдение всех условий задачи. Заключается в обосновании, что данная фигура удовлетворяет условиям задачи.

- **Исследование.**

Цель – выяснить условия существования и число решений. Состоит в разрешении двух вопросов: при любых ли данных задача имеет решение, и если имеет, то сколько? Проводится по плану построения.

Ключевые задачи.

1. Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.
2. Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.
3. Построить треугольник по трем сторонам.
4. Построить треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведенной из вершины этого угла.

Задания для совместной деятельности:

1. Дан треугольник ABC . Построить: а) биссектрису AK ; б) медиану BM ; в) высоту CH .
2. Даны прямая a и отрезок AB . Построить прямую p , параллельную прямой a , так, чтобы расстояние между прямыми a и p было равно AB .
3. Даны пересекающиеся прямые a и b и отрезок MN . На прямой a построить точку, удаленную от прямой b на расстоянии MN .
4. Построить прямоугольный треугольник: а) по двум катетам; б) по катету и прилежащему к нему острому углу.
5. Построить равнобедренный треугольник: а) по боковой стороне и углу, противолежащему основанию; б) по основанию и углу при основании.
6. Построить треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведенной к этой стороне.

Задания для самостоятельной деятельности:

1. Построить треугольник по стороне, медиане, проведенной к одной из двух других сторон, и углу между данными стороной и медианой.
2. Построить равнобедренный треугольник: а) по боковой стороне и углу при основании; б) по основанию и боковой стороне; в) по основанию и медиане, проведенной к основанию.
3. С помощью циркуля и линейки построить угол, равный: а) 45° ; б) 30° ; в) 60° ; г) 120° ; д) 75° .
4. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из этих сторон.
5. Дан треугольник ABC . Построить отрезок DE , параллельный прямой AC , так, чтобы точки D и E лежали на сторонах AB и BC и $DE = AD + CE$.

Практическая работа.

1 вариант.

1. Дан треугольник ABC. Построить медиану BM и биссектрису угла BMC.
2. Построить равнобедренный треугольник по тупому углу и медиане, исходящей из его вершины.
3. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.
4. *С помощью циркуля и линейки построить угол, равный 105° .*

2 вариант.

1. Дан треугольник ABC. Построить его биссектрису BM и середину отрезка BM.
2. Построить равнобедренный треугольник по боковой стороне и биссектрисе угла при вершине.
3. Построить прямоугольный треугольник по катету и прилежащему к нему острому углу.
4. *С помощью циркуля и линейки построить угол, равный 165° .*

Методы решения задач на построение:

1. Метод геометрических мест точек (ГМТ)

2. Метод геометрических преобразований:

а) метод симметрии (осевой и центральной);

б) метод параллельного переноса;

в) метод поворота;

г) метод подобия.

3. Алгебраический метод

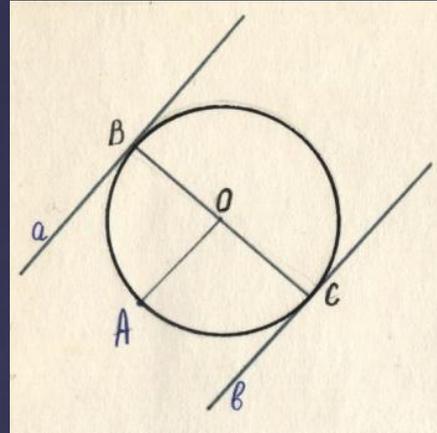
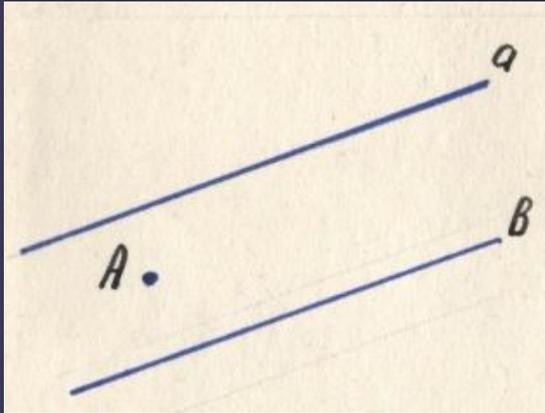
1. Метод геометрических мест точек (ГМТ)

Метод геометрических мест состоит в следующем. Разбиваем условие задачи на две части. Каждая часть определяет ГМТ. Тогда пересечение этих двух ГМТ определит искомую точку, к которой свелась данная задача.

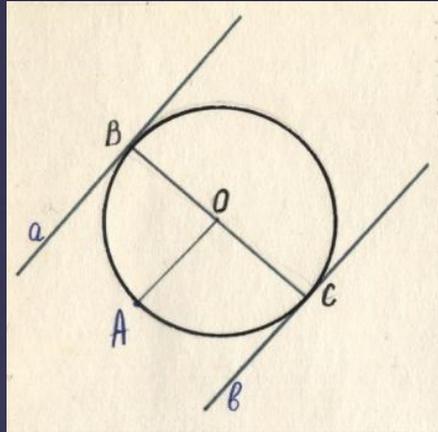
В школьном курсе геометрии рассматриваются следующие ГМТ:

1. ГМТ, равноудаленных от двух данных точек.
2. ГМТ, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых.
3. ГМТ, удаленных от данной прямой на данное расстояние.
4. ГМТ, равноудаленных от двух данных параллельных прямых.

Задача. Даны две параллельные прямые и точка между ними. Построить окружность, касающуюся обеих прямых и проходящую через заданную точку.



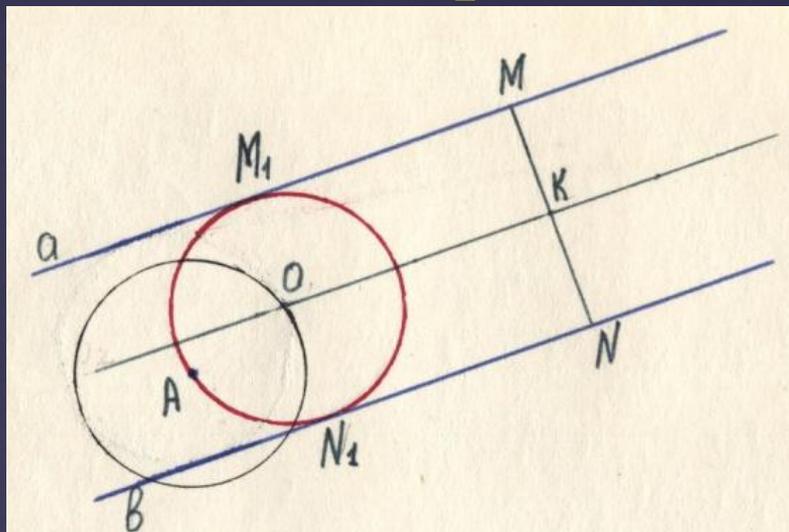
Анализ: Допустим, что задача решена и окр (O, OA) – искомая. Для решения задачи необходимо найти центр окружности, т.е. сводим задачу к нахождению одной точки. $BO = OC = OA = r$. Разобьем условие на две части, каждая из которых приводит к геометрическому месту точек.



- $BO = OC$ – прямая, параллельная прямой a и равноотстоящая от прямых a и b .
- $AO = r$ – окр (A, r) .

Вывод: Центром искомой окружности будет точка пересечения двух найденных геометрических мест: прямой $c \parallel a$ и равноотстоящей от прямых a и b и окр (A, r) , где r – половина расстояния между данными прямыми.

План построения.



1. Строим $NM \perp a$.
2. Строим точку K : $MK = NK$.
3. Проводим через K прямую $c \parallel a$.
4. Строим окр (A, r) , где $r = |MK| = |NK|$.
5. O – точка пересечения окр (A, r) и прямой c .
6. Строим окр (O, r) .

Доказательство.

1. $A \in \text{окр}(A, r)$ – по построению.
2. $OM_1 = MK$ (т.к. $c \parallel a$), $a \perp OM_1$ (т.к. $M_1N_1 \parallel MN$)
следовательно, a – касательная к $\text{окр}(O, r)$.
3. Аналогично, b – касательная к $\text{окр}(O, r)$.
Значит, $\text{окр}(O, r)$ – искомая.

Исследование.

Прямая c всегда существует и единственна.

Окружность $\text{окр}(A, r)$ всегда существует. Точки их пересечения всегда существуют, т.к. A удалена от c на расстояние менее половины расстояния между прямыми a и b .

Задача имеет два решения, т.к. $\text{окр}(A, r)$ пересекается с прямой c в точках O и O_1 .

2. Метод геометрических преобразований

Применение движений при решении задач на построение заключается в том, что при анализе кроме исходной и искомой фигуры рассматривают еще вспомогательные фигуры, полученные из данных в результате некоторого движения, которые также можно построить с помощью циркуля и линейки.

Каждое движение откладывает свой отпечаток на метод.

Например,

параллельный перенос позволяет сближать удаленные фигуры или их части;

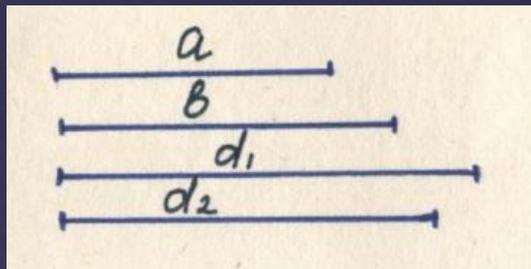
методом центральной симметрии пользуются, если данную и искомую фигуры связывает отрезок с серединой в данной точке.

Метод подобия чаще всего используют таким образом:

1) анализируют все условия, которые накладываются в задаче на искомую фигуру, и выделяют из них те, которые позволяют построить сначала фигуру, подобную искомой.

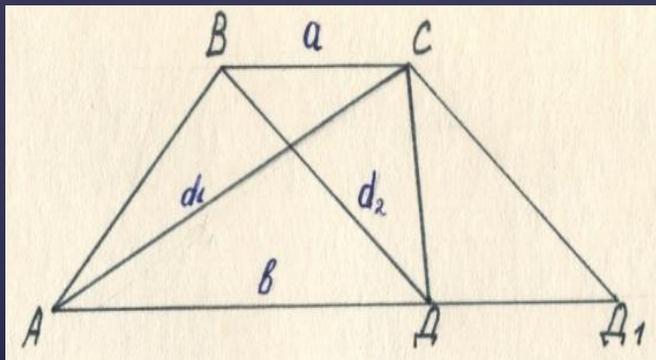
2) возвращаются к условию, от которого временно отказались, и, пользуясь им, находят коэффициент, переводящий построенную фигуру в искомую. Далее строят искомую фигуру.

Задача. Построить трапецию по основаниям и диагоналям.



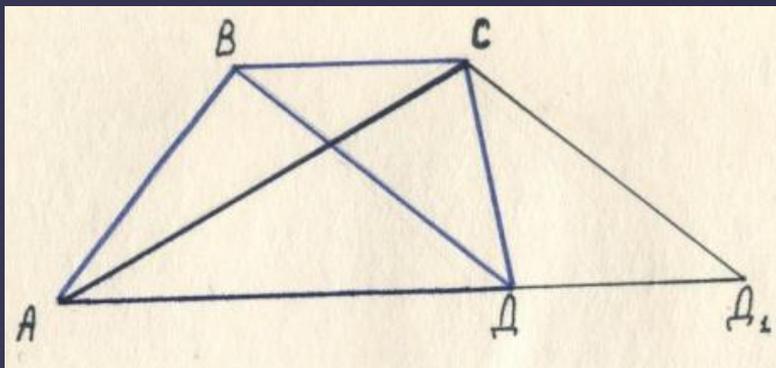
Анализ.

Допустим, что задача решена. $ABCD$ – искомая трапеция.
 $BC = a$, $AD = b$, $AC = d_1$, $BD = d_2$.



Подвергнем параллельному переносу диагональ d_2 на вектор $BC = a$.
Тогда $BD \rightarrow CD_1$. Вывод: $\triangle ACD_1$ можно построить по трем сторонам:
 $AD_1 = a + b$, $AC = d_1$, $CD_1 = d_2$.
Точка $D \in AD_1$ и удалена от D_1 на расстоянии a . Точка $B = \text{окр}(D, d_2) \cap BC$, $BC \parallel AD_1$.

План построения.



1. Строим $\triangle ACD_1$ по трем сторонам: $AD_1 = a + b$, $AC = d_1$, $CD_1 = d_2$.
2. Строим VD как образ CD_1 при параллельном переносе на вектор BC .
3. Проводим AB и BC .

Доказательство.

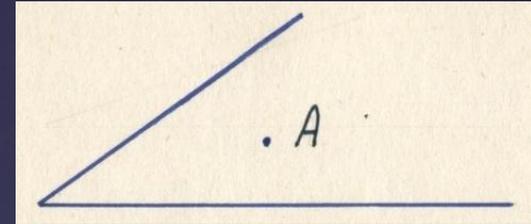
1. $AC = d_1$ – по построению.
 2. $VD = CD_1 = d_2$ – по свойствам параллельного переноса.
 3. $BC = DD_1 = a$ – как отрезки параллельных прямых, заключенных между параллельными прямыми.
 4. $AD = AD_1 - DD_1 = a + b - a = b$.
- $ABCD$ – искомая трапеция.

Исследование.

Задача имеет решение, когда $|d_1 - d_2| < a + b < d_1 + d_2$.

Метод подобия

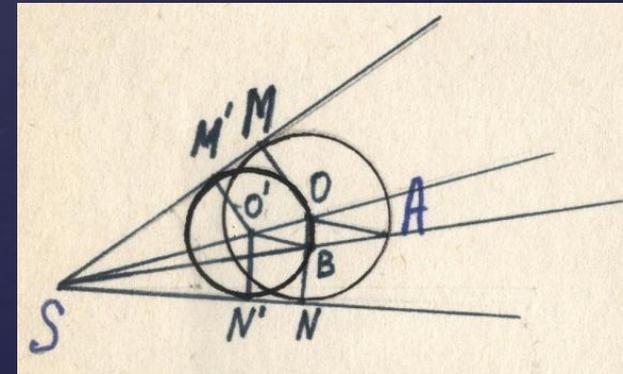
Задача. Построить окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через данную точку A .



Анализ.

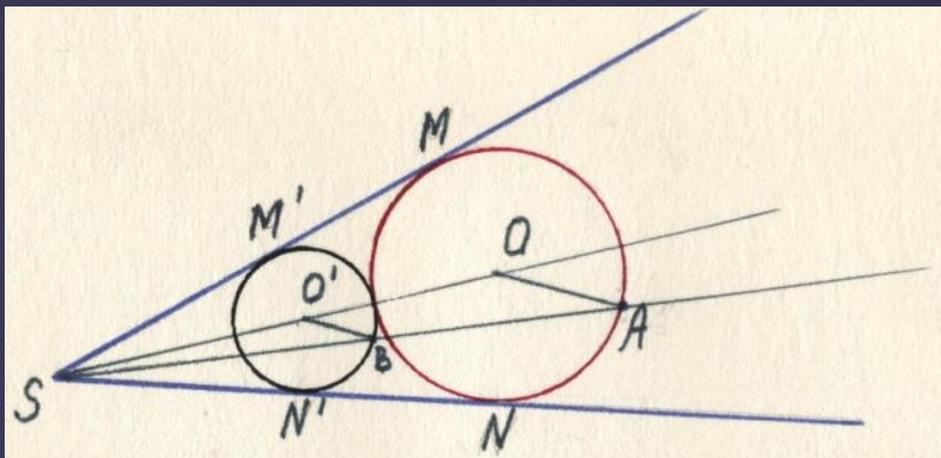
Допустим, что задача решена. Окр (O, OA) – искомая.

Если отбросить требование, чтобы искомая окружность проходила через данную точку, то задача становится неопределенной и будет бесчисленное множество окружностей, касающихся сторон данного угла. Их центры лежат на биссектрисе данного угла. Эти окружности гомотетичные с центром в вершине S и коэффициентом равным отношению радиусов. Следовательно, искомая окружность гомотетична любой из этих окружностей. Для точки A будет соответственной точкой точка пересечения этой вспомогательной окружности с прямой SA .



Вывод: O – пересечение биссектрисы и прямой $OA \parallel O'B$, где O' – центр вспомогательной окружности, точка $B = \text{окр}(O', ON') \cap SA$.

План построения.



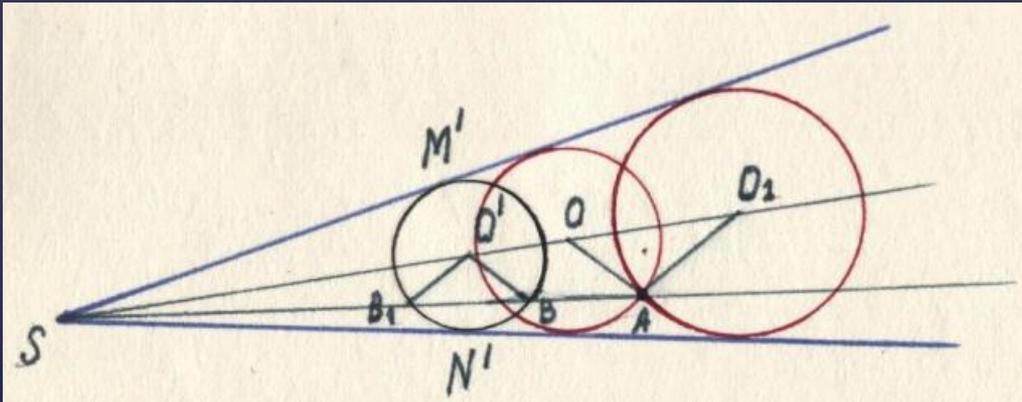
1. Строим биссектрису данного угла.
2. Строим произвольную окружность с центром на биссектрисе и касающуюся сторон угла - окр $(O', O'N')$.
3. Находим точку $B = \text{окр}(O', O'N') \cap SA$.
4. Находим центр искомой окружности – $O = SO' \cap AO$, $AO \parallel O'B$.
5. Строим окр (O, AO) .

Доказательство.

1. $A \in \text{окр}(O, AO)$ – по построению.
2. $OM = ON = OA = r$ – по свойствам гомотетии.
окр (O, AO) – искомая.

Исследование.

Задача имеет два решения.



3. Алгебраический метод

Сущность этого метода состоит в следующем: проводя анализ, задачу стараются свести к отысканию одного отрезка или нескольких. Длины искомых отрезков выражаются через длины данных отрезков, а затем по полученной формуле строится искомый отрезок.

Простейшие формулы, используемые в алгебраическом методе:

$$x = a \pm b$$

$$x = \frac{ab}{c}$$

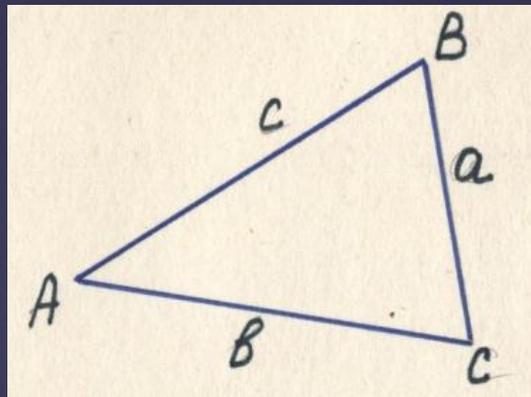
$$x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$x = \frac{p}{q} \cdot a$$

$$x = \sqrt{ab}$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Задача. Принимая вершины треугольника со сторонами a , b , c за центры трех окружностей, построить эти окружности так, чтобы они касались друг друга извне.



Анализ.

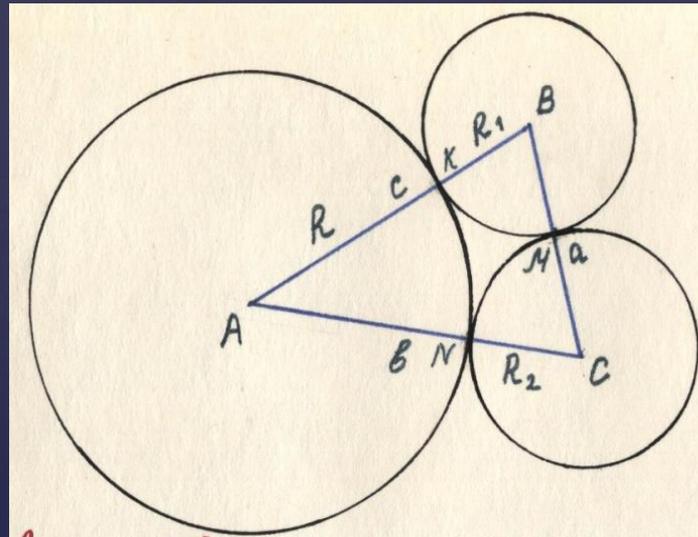
Допустим, что задача решена. Окр (A, R) , окр (B, R_1) , окр (C, R_2) – искомые.

Пусть $R = x$. Тогда $R_1 = c - x$,

$$R_2 = b - x,$$

$$BC = R_1 + R_2 = a$$

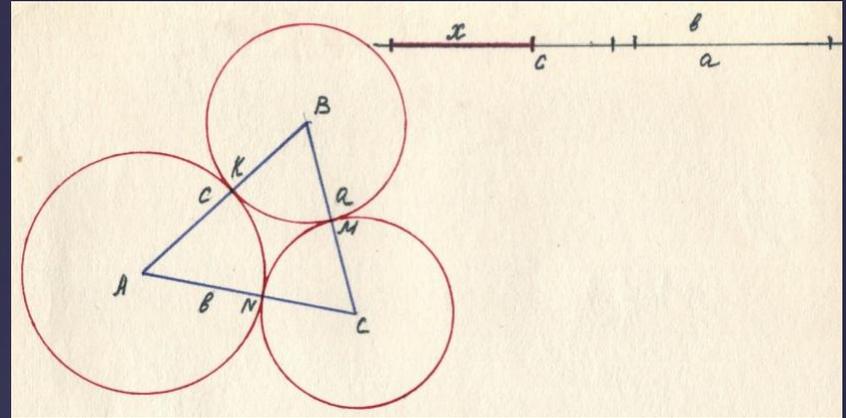
$c - x + b - x = a$, отсюда
$$x = \frac{c + b - a}{2}$$



План построения.

1. Строим отрезок $x = \frac{c + b - a}{2}$

2. Строим окр (A, R), окр (B, R₁),
окр (C, R₂), где R = x,
R₁ = c - x,
R₂ = b - x.



Доказательство.

По построению центрами окружностей являются вершины. Сумма радиусов двух окружностей равна соответствующей стороне. Следовательно, построенные окружности касаются извне. Таким образом, окр (A, R), окр (B, R₁), окр (C, R₂) – искомые.

Исследование.

Отрезок x по заданной формуле всегда может быть построен, т.к. в любом треугольнике

$c + b > a$. Следовательно, задача всегда имеет решение и единственное.

Спасибо за внимание!