

# XVIII Командная олимпиада школьников Санкт- Петербурга по информатике и программированию

Разбор задач

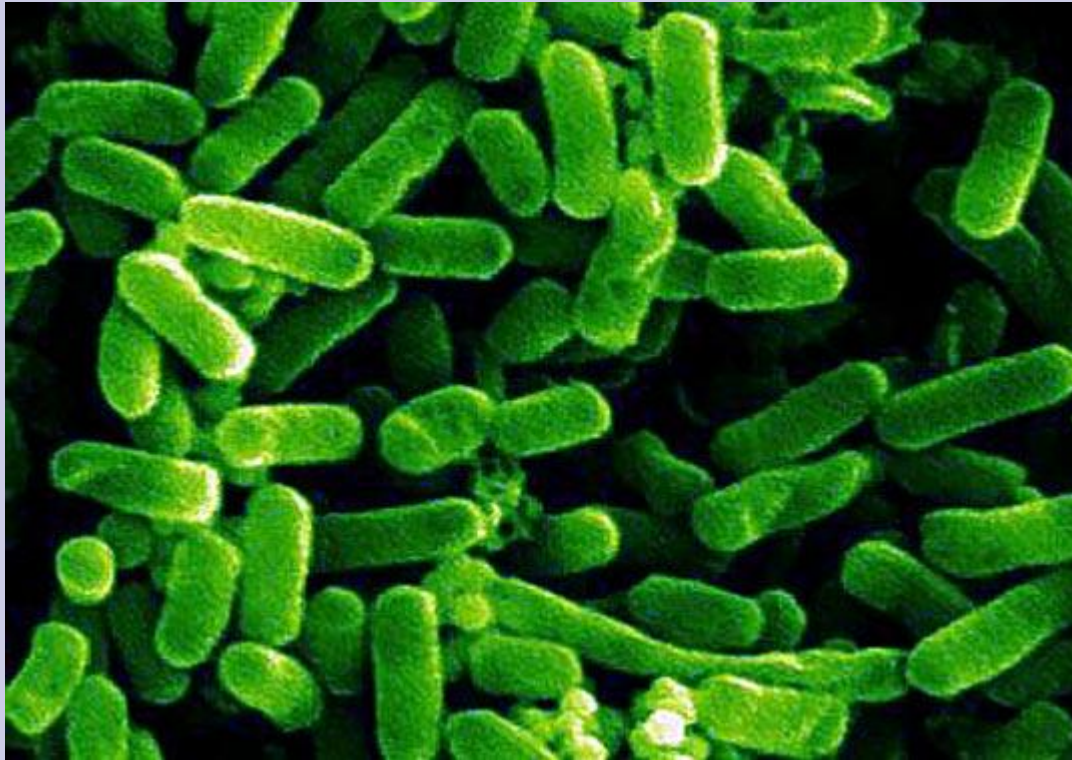
31 октября 2010 года

Санкт-Петербург



# Задача А

# Бактерии



- Автор задачи – Михаил Дворкин
- Условие – Михаил Дворкин
- Подготовка тестов – Сергей Мельников
- Разбор – Антон Ахи

# Постановка задачи

- Дано целое число  $n$
- За один шаг можно:
  - Разделить  $n$  на любой его простой делитель
  - Возвести число  $n$  в квадрат
- Требуется за минимальное число шагов получить число  $m$

# Идея решения

- Определить, возможно ли получить  $m$ 
  - Разложить  $m$  на простые делители
  - Если хотя бы один из них не является делителем  $n$ , то ответ «Impossible»

# Нахождение решения

- Рассмотреть задачу с конца — получить из  $t$  число  $n$ , если разрешены операции:
  - Извлечь корень
  - Домножить на произвольное простое число

# Решение

- Разложить оба числа на простые множители
- Пока существует простой делитель, который входит в  $m$  в большей степени, чем в  $n$ , доводим каждый простой делитель  $m$  до четной степени и извлекаем корень
- Домножаем на оставшиеся простые

# Почему это работает?

- Единственный способ уменьшить показатель простого делителя — извлечение корня, которое возможно лишь при условии четности всех степеней
- Перед любым извлечением корня невыгодно увеличивать показатель более чем на один



# Задача В

## Шахматная

### ГОЛОВОЛОМКА



- Автор задачи – Виталий Аксенов
- Условие – Сергей Поромов
- Подготовка тестов – Владимир Ульянов
- Разбор – Антон Ахи

# Условие задачи

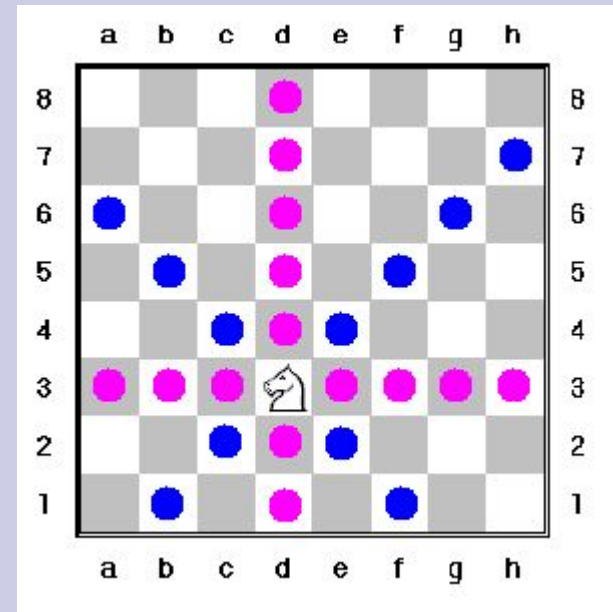
- Дано расположение коня на доске
- Требуется поставить ладью и слона на доску, чтобы они били коня, но не били друг друга

# Как решать?

- Если слон или ладья бьют коня, то конь их не бьет
- Позичий на доске мало
- Переберем все возможные позиции ладьи и слона, из которых они бьют коня
- Проверим, что поставленные фигуры не бьют друг друга

# Интересные клетки

- Ладья бьет все поля в том же столбце или строке
- Слон бьет все поля с такой же разницей номеров строки и столбца



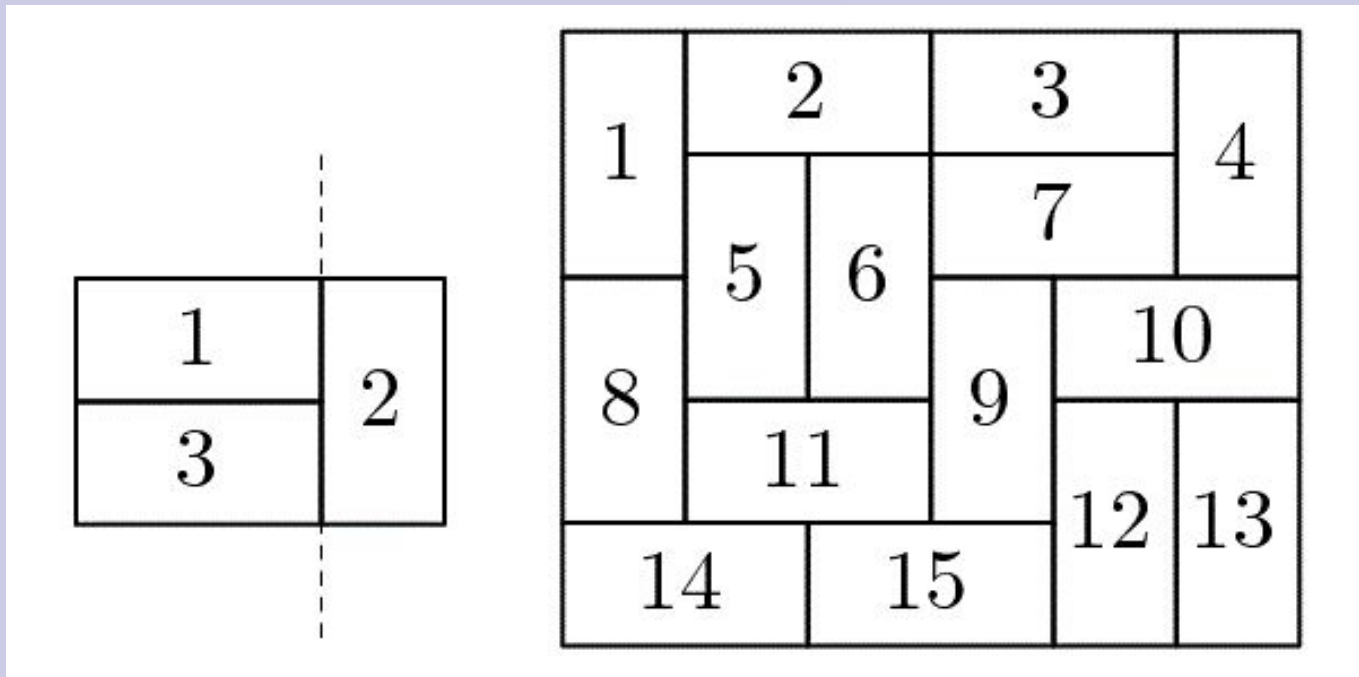
# Задача С

# Шоколад



- Автор задачи – Виталий Аксенов
- Условие – Антон Ахи
- Подготовка тестов – Нияз Нигматуллин
- Разбор – Сергей Поромов

# О чем задача?





# Как решать?

- Перебрать всевозможные вертикальные и горизонтальные разрезы
- Проверить, можно ли хоть один из них провести: с разных сторон от разреза должны быть различные дольки, то есть различные числа

# Задача D

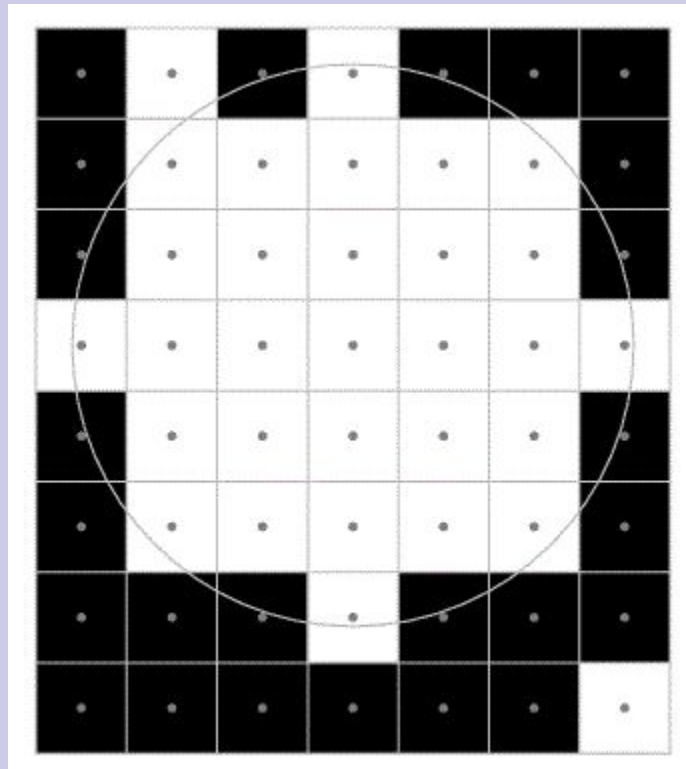
## Луна



- Автор задачи – Юрий Петров
- Условие – Юрий Петров
- Подготовка тестов – Владимир Ульянцев
- Разбор – Сергей Поромов

# О чем задача?

- Необходимо найти луну на фотографии



# Как решать?

- Ограничения небольшие – можно и достаточно проверить всевозможные положения и размеры луны, выбрать наибольший размер
- Не забыть, что луна должна быть целиком на фотографии

# Как проверить луну?

- Проверить, что все точки фотографии на расстоянии не более радиуса от центра луны белые
- Расстояние можно считать в целых числах:  $\|x - x_0\|^2 + \|y - y_0\|^2 \leq r^2$
- Проверка работает за  $O(w \cdot h)$ .

# Задача E

## Ожерелье



- Автор задачи – Михаил Дворкин
- Условие – Сергей Поромов
- Подготовка тестов – Нияз Нигматуллин
- Разбор – Сергей Мельников



# Как решать?

- Ожерелий из двух, трех, четырех и пяти жемчужин нет
- Для остальных возьмем ожерелье

1 1 0 1 0 ... 0

Оно подходит, так как ось может проходить лишь через 1, но все такие оси не являются осями симметрии

# Альтернативное решение

- Генерируем случайное ожерелье
- Проверяем, есть ли ось симметрии

# Задача F Гонки



- Автор задачи – жюри олимпиады
- Условие – Антон Банных
- Подготовка тестов – Виталик Аксенов
- Разбор – Сергей Мельников

# За какое время проедет машина?

- Проедет  $x \operatorname{div} (tv)$  целых сегментов длиной  $tv$ , сделает между ними  $x \operatorname{div} (tv) - 1$  зарядок батареей
- Если  $x \bmod (tv)$  не 0, то надо проехать ещё, а для этого зарядить батарею
- Таким образом, число зарядок:  $\operatorname{ceil}(x / (tv)) - 1$
- Остальное время едет со скоростью  $v$

# Как решать?

- Время для одной машины

$$x / v + (\text{ceil}(x / (tv)) - 1) * t$$

- Сравнить время, за которое машины достигнут финиша

# Задача G Робот



- Автор задачи – Михаил Дворкин
- Условие – Михаил Дворкин
- Подготовка тестов – Алексей Цыпленков
- Разбор – Алексей Цыпленков



# О чем задача

- Робот переместился из начала координат в точку  $A(x, y)$ , при этом робот поворачивал только на 90 градусов направо или налево
- Дана последовательность поворотов
- Определить длины отрезков пути робота или некорректность пути

# Как решать?

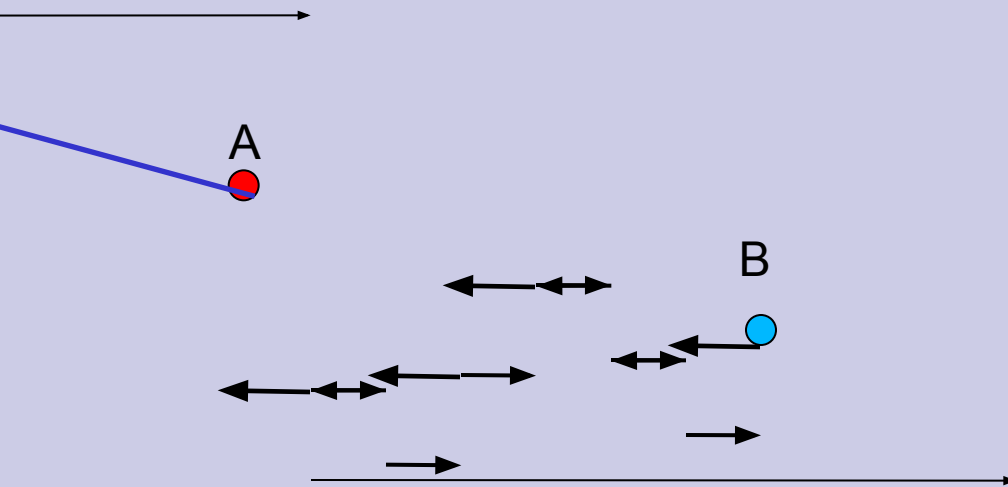
- Длина каждого отрезка пути не меньше 1 и не больше  $10^6$
- Для каждого направления (вверх, вниз, вправо, влево) найдем, есть ли отрезок пути робота, на котором он движется по этому направлению

- Пусть робот попадет в точку  $B$ , если всегда будет смещаться на 1
- Чтобы попасть из  $B$  в  $A$ , нужно дополнительно сместиться на вектор  $A - B$
- Разложим вектор  $A - B$  по направлениям:
 
$$A - B = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(все числа  $k_1, k_2, k_3, k_4$  неотрицательны и не менее двух были равны нулю)

- Если все направления, коэффициенты при которых не равны 0, были найдены в пути робота, то ответ существует и строится следующим образом:
- Длины всех отрезков принять за 1
- Для каждого направления с ненулевым  $k$  взять один произвольный отрезок движения по этому направлению и увеличить его длину на  $k$

- Если какого-то направления с ненулевым  $k$  нет в пути, то ответа не существует



# Задача Н Санта



- Автор задачи – Виталий Аксенов
- Условие – Сергей Мельников
- Подготовка тестов – Алексей Цыпленков
- Разбор – Алексей Цыпленков

# О чем задача

- Даны два списка из  $K$  и  $M$  натуральных чисел, каждое не больше  $N$ . Найти все числа от 1 до  $N$ , которых нет в этом списке.
- Каждое число встречается в списках не более одного раза.



# Как решать?

- Так как каждое число встречается в списках не более одного раза, то количество чисел, которых нет в списке, равно  $N - K$
- Так как  $N$  невелико, то за один линейный проход по спискам можно отметить все числа, которые в них есть
- За линейный проход по массиву пометок вывести все числа, которых нет

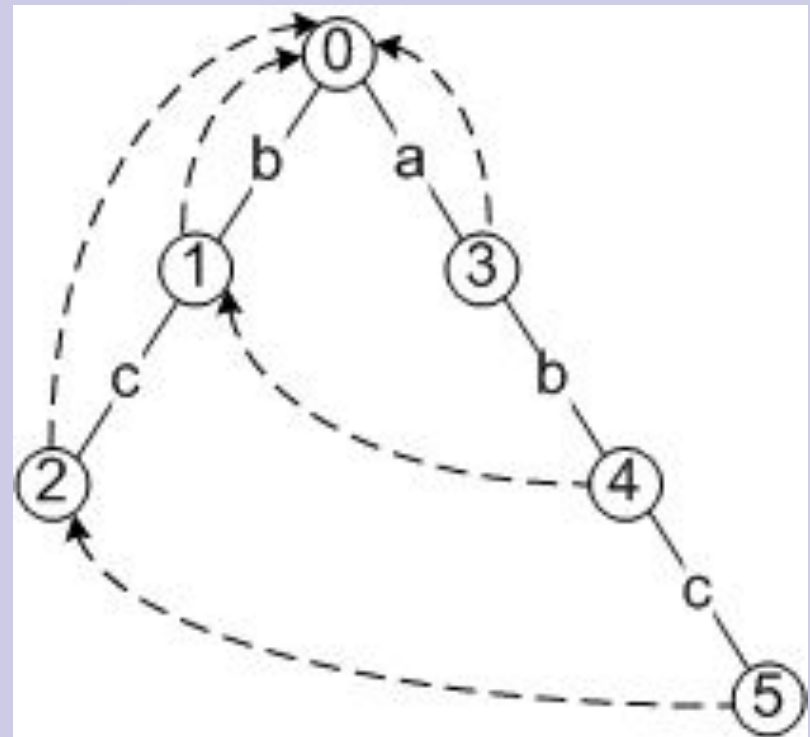
# Задача I. Подстрока

a	b	a	c	a	b	a
---	---	---	---	---	---	---

- Автор задачи – Антон Банных
- Условие – Антон Банных
- Подготовка тестов – Антон Банных
- Разбор – Антон Банных

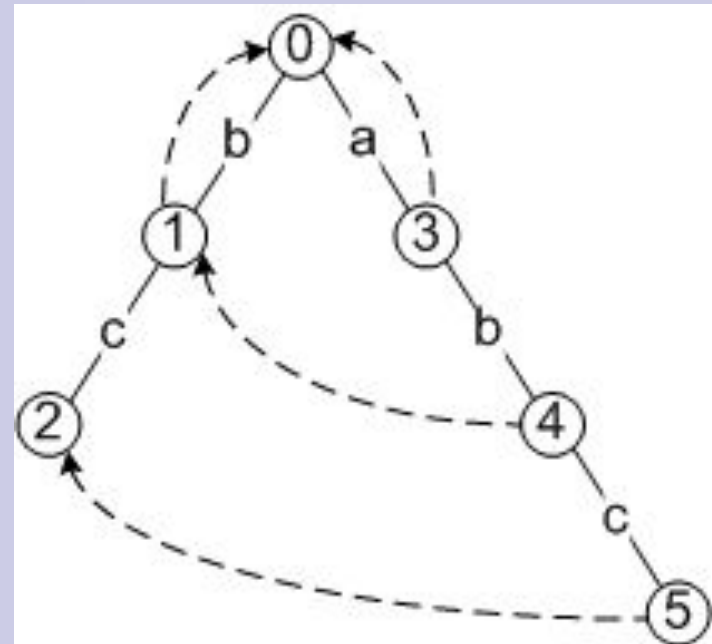
# Решение

- Ахо-Корасик
- Строка abc
- Запросы:
  - 2 3 bc
  - 2 3 abc



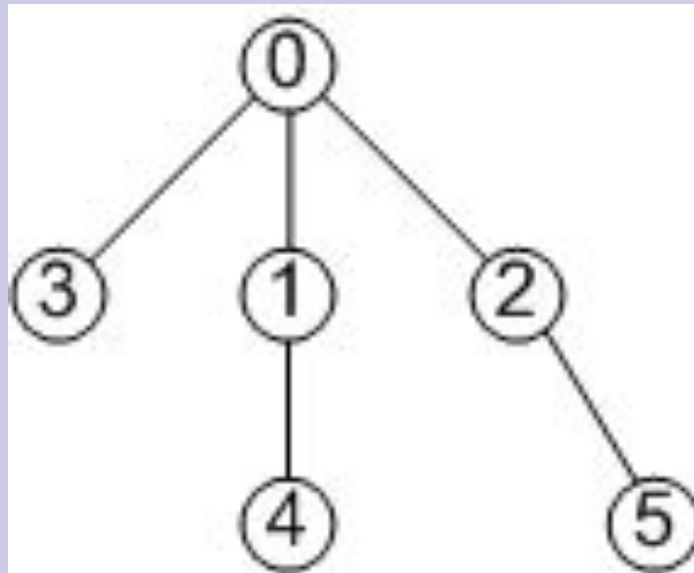
# Решение

- Для каждого префикса строки запишем, в какой вершине автомата мы оказались
- а – 3
- ab – 4
- abc - 5



# Решение

- Рассмотрим дерево, образованное суффиксными ссылками

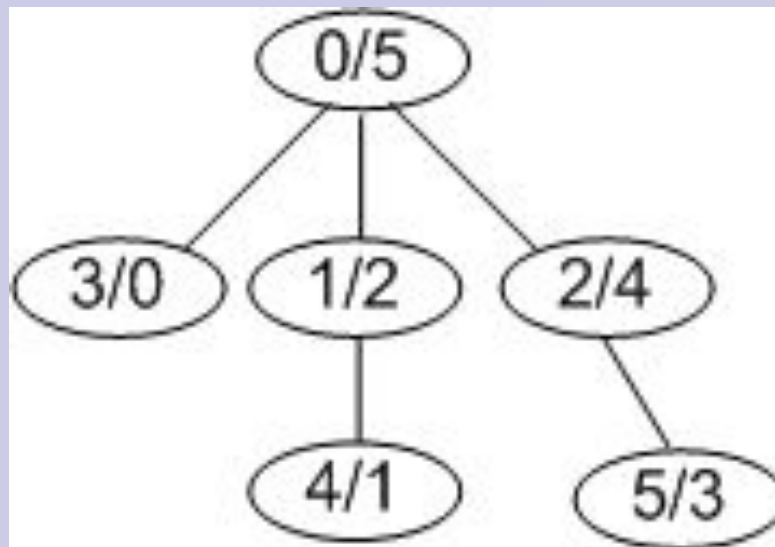


# Решение

- Для каждого запроса нужно определить, встречалась ли вершина из соответствующего поддеревя в отрезке

# Решение

- Перенумеруем вершины в порядке выхода из обхода в глубину





# Решение

- Вершины одного поддерева имеют последовательные номера
- Пусть пара (префикс, номер вершины) — точка
- Запрос — есть ли точка в прямоугольнике

# Решение

- Двумерное дерево отрезков —  $O(n \log n)$
- Одномерное дерево отрезков на сумму
- События:
  - Начало прямоугольника
  - Конец прямоугольника
  - Точка

# Задача I. Подстрока

a	b	a	c	a	b	a
---	---	---	---	---	---	---

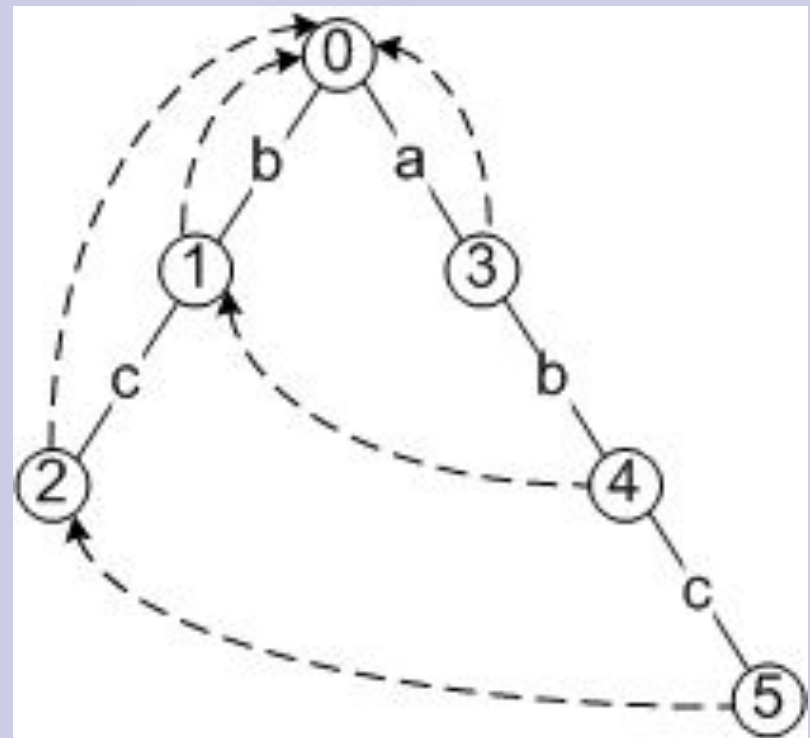
- Автор задачи – Антон Банных
- Условие – Антон Банных
- Подготовка тестов – Антон Банных
- Разбор – Антон Банных

# Как решать?

- Ахо-Корасик
- Суффиксный массив
- Суффиксное дерево
- Суффиксный автомат

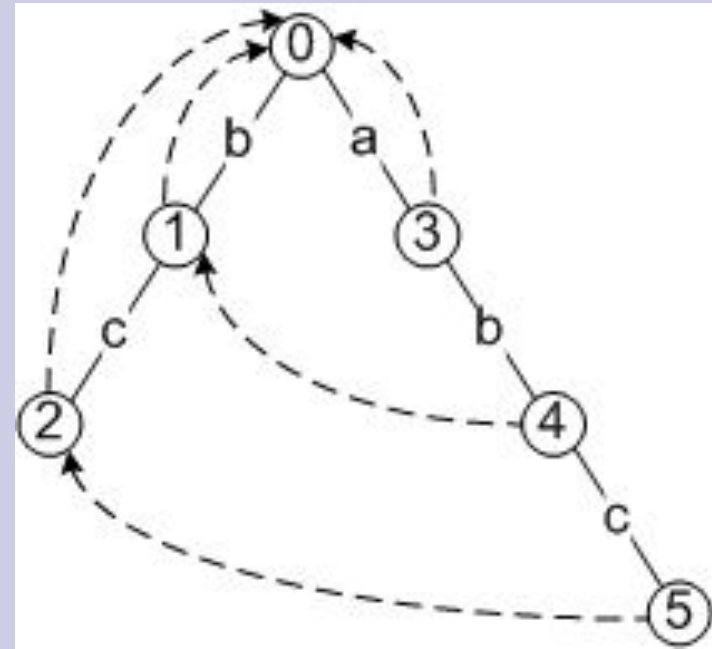
# Ахо-Корасик

- Строка abc
- Запросы:
  - 2 3 bc
  - 2 3 abc



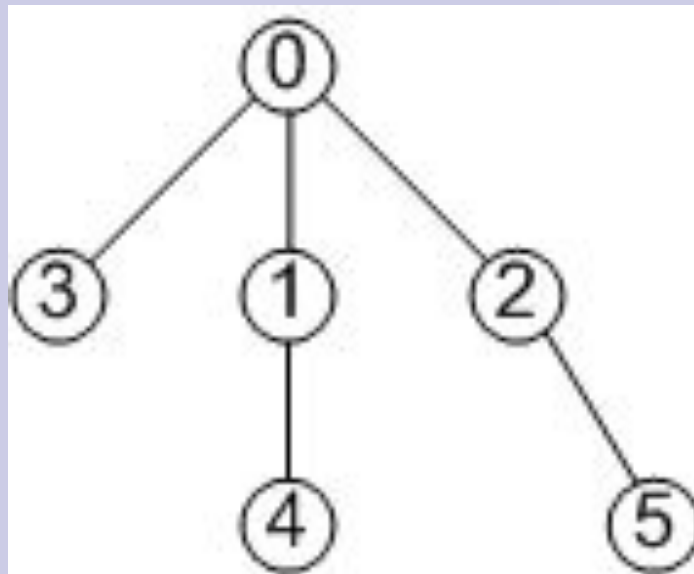
# Решение

- Для каждого префикса строки запишем, в какой вершине автомата мы оказались
- $a - 3$
- $ab - 4$
- $abc - 5$
- Обозначим этот массив  $L$



# Идея решения

- Рассмотрим дерево, образованное суффиксными ссылками



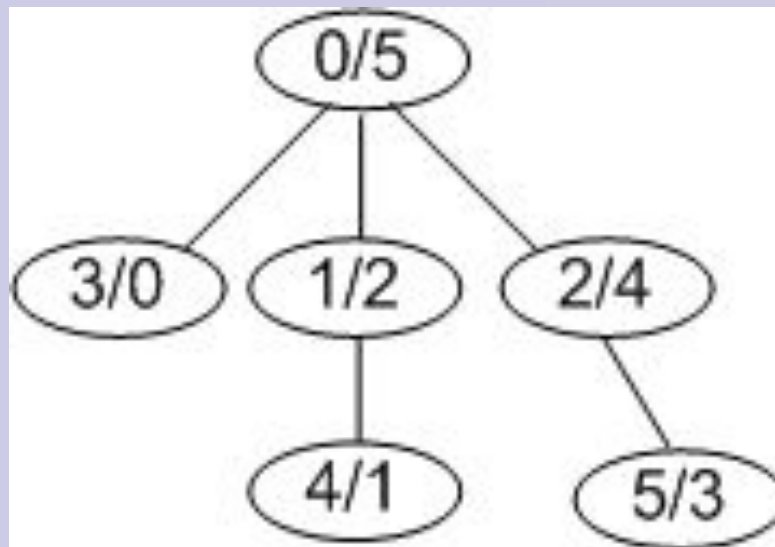


# Задача

- Запрос:  $l$ ,  $r$ , длина строки  $len$
- Строке соответствует вершина  $x$
- Определить, встречалась ли вершина из поддерева  $x$  в  $L[l + len - 1, r]$

# Решение

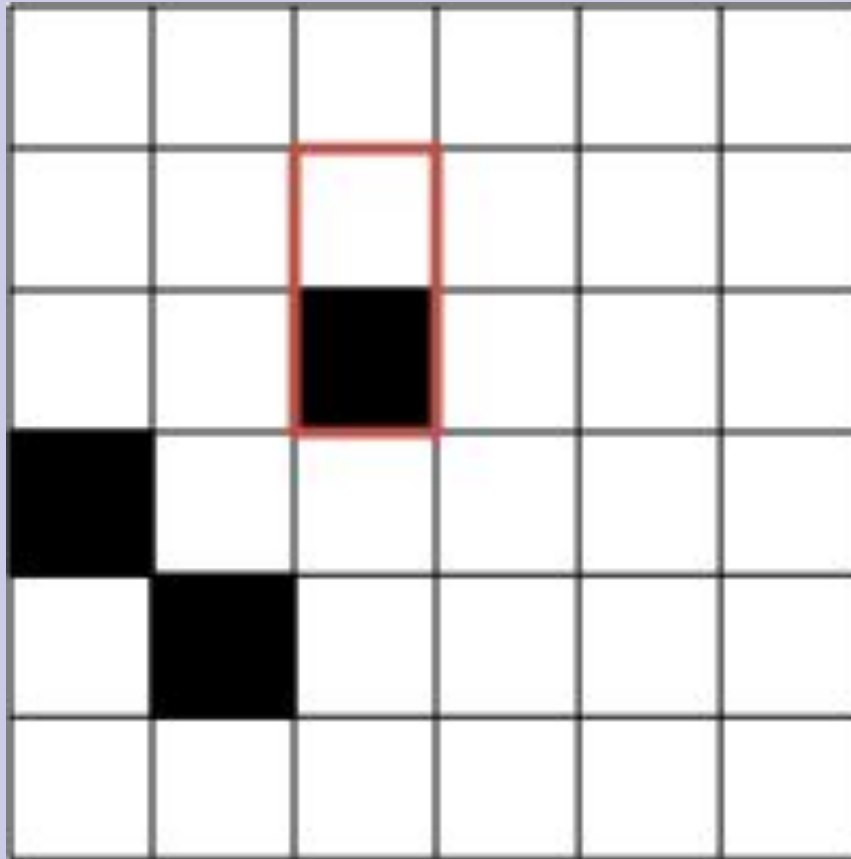
- Перенумеруем вершины в порядке выхода из обхода в глубину



# Решение

- Вершины одного поддерева имеют последовательные номера
- Пусть пара (префикс, номер вершины) – точка
- Запрос – есть ли точка в прямоугольнике

# Решение



# Решение

- Двумерное дерево отрезков:  $O(n \log^2 n)$
- Одномерное дерево отрезков на сумму
- События:
  - Начало прямоугольника
  - Конец прямоугольника
  - Точка

# Асимптотика

- Ахо-Корасик:  $O(n)$
- Перенумерация вершин:  $O(n)$
- Обработка запросов:  $O(n \log n)$

# Задача J

## Вода



- Автор задачи – Виталий Аксенов
- Условие – Антон Ахи
- Подготовка тестов – Антон Ахи
- Разбор – Антон Банных



# Как решать?

- Поддерживаем текущий уровень воды
- Поддерживаем суммарную скорость вытекания воды
- Обрабатываем события

# События

- Уровень воды достиг очередного отверстия
- Запрос на уровень воды
- Появление новой течи
- Устранение течи

# Решение

- Определяем ближайшее событие
- Вычисляем уровень воды к моменту наступления события
- Обрабатываем событие

# Реализация

- Выделим «интересные высоты» — те, которые встречаются в запросах
- Храним скорость вытекания воды через отверстия на высоте  $h$
- Событие — достижение «интересной высоты»

# Реализация

- Появление и починка течи — изменение соответствующего элемента массива и суммарной скорости вытекания
- Запрос на определение уровня воды — вывод текущего уровня
- Достижение «интересной высоты» — изменение суммарной скорости вытекания

# Асимптотика

- Выделение «интересных высот»
  - сортировка:  $O(n \log n)$
  - хеш-таблица:  $O(n)$
- Обработка событий:  $O(n)$
- Итого:  $O(n)$  или  $O(n \log n)$

Спасибо за внимание!  
Вопросы?

<http://neerc.ifmo.ru/school>