ПОДГОТОВКА К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ №18 КИМ ЕГЭ ПО ИНФОРМАТИКЕ И ИКТ

Филиппов Владимир Ильич,

старший преподаватель кафедры информационно-коммуникационных технологий

Рекомендуемая схема выполнения задания №18

Преобразование логических выражений

- Определение элементарных высказываний.
- Замена переменных (при необходимости).
- Раскрытие импликации или эквиваленции.
- Преобразование с использованием законов алгебры логики.

Построение таблицы истинности

Запись ответа

Основные типы заданий №18 (образец 2015 г.)

18 Обозначим через $m\&n$ поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n. Так, например, $14\&5 = 1110_2\&0101_2 = 0100_2 = 4$.

Для какого наименьшего неотрицательного целого числа A формула

$$x\&25 \neq 0 \rightarrow (x\&17 = 0 \rightarrow x\&A \neq 0)$$

тождественно истинна (т.е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной x)?

18 Обозначим через **ДЕЛ(*n*, *m*)** утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m».

Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$\neg ДЕЛ(x, A) \rightarrow (ДЕЛ(x, 6) \rightarrow \neg ДЕЛ(x, 4))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

18 На числовой прямой даны два отрезка: P = [37; 60] и Q = [40; 77]. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$$(x \in P) \rightarrow (((x \in Q) \land \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in P))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

18 На числовой прямой даны два отрезка: P = [37; 60] и Q = [40; 77]. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$$(x \in P) \rightarrow (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in P))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

1. Преобразуем импликацию.

$$\neg(X \ni P) \vee \left(\left((X \ni Q) \wedge \neg(X \ni A)\right) \rightarrow \neg(X \ni P)\right) =$$

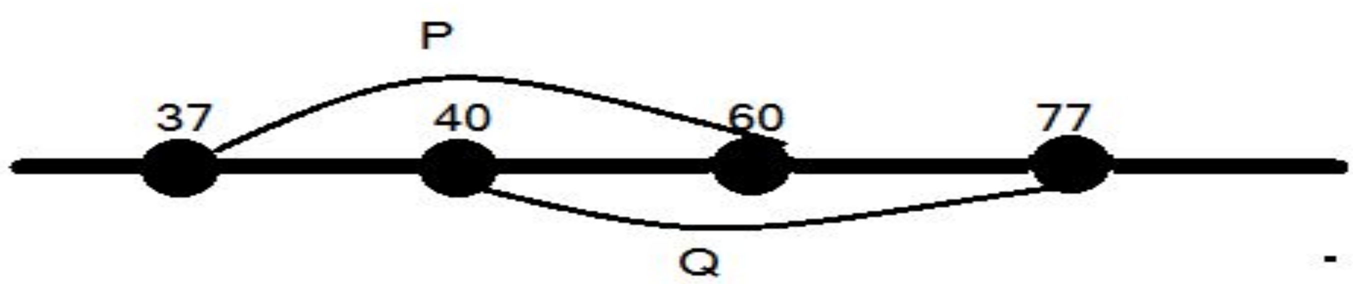
$$\neg(X \ni P) \vee \neg(X \ni Q) \vee (X \ni A) \vee \neg(X \ni P) =$$

$$\neg(X \ni P) \vee \neg(X \ni Q) \vee (X \ni A) = \quad (1)$$

$$\neg((X \ni P) \vee (X \ni Q)) \vee (X \ni A) =$$

$$(X \ni P) \wedge (X \ni Q) \rightarrow (X \ni A) \quad (2)$$

2. Обозначим интервалы на числовой оси



18 На числовой прямой даны два отрезка: P = [37; 60] и Q = [40; 77]. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$$(x \in P) \to (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in P))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

3. Построим таблицу истинности для одного из значений заданного интервала для формулы:

$$\neg(X \ni P) \vee \neg(X \ni Q) \vee (X \ni A)$$

Интервал X	Значение X	¬(X∋P)	¬(X∋Q)	(X∋A)	Итог
(-∞; 37]	5	1	1	любое	1
[37; 40]	38	0	1	любое	1
[40; 60]	50	0	0	1	1
[60; 77]	70	1	0	любое	1
[77; +∞)	80	1	1	любое	1

4. Нас интересует интервал от 40 до 60. Его длина 20.

18 На числовой прямой даны два отрезка: P = [37; 60] и Q = [40; 77]. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$$(x \in P) \to (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in P))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

3. Построим таблицу истинности для одного из значений заданного интервала для формулы:

$$(X \ni P) \wedge (X \ni Q) \to (X \ni A)$$

Интервал X	Значение X	$(X \ni P)$	$(X \ni Q)$	$(X \ni P) \wedge (X \ni Q) = Z$	$Z \to (X \ni A)$
(-∞; 37]	5	0	0	0	1 или 0
[37; 40]	38	1	0	0	1 или 0
[40; 60]	50	1	1	1	1
[60; 77]	70	0	1	0	1 или 0
[77; +∞)	80	0	0	0	1 или 0

4. Нас интересует интервал от 40 до 60. Его длина 20.

Практикум

На числовой прямой даны два отрезка: P = [25, 50] и Q = [32, 47]. Отрезок A таков, что формула

$$(\neg (x \in A) \rightarrow \neg(x \in P)) \rightarrow ((x \in A) \rightarrow (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной ***x***. Какова наибольшая возможная длина отрезка A?

На числовой прямой даны два отрезка: P = [25, 37] и Q = [32, 47]. Отрезок A таков, что формула

$$((x \in A) \wedge \neg(x \in P)) \rightarrow ((x \in P) \wedge (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной ***x***. Какова наибольшая возможная длина отрезка A?

18 Обозначим через $m\&n$ поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n. Так, например, $14\&5 = 1110_2\&0101_2 = 0100_2 = 4$.

Для какого наименьшего неотрицательного целого числа A формула

$$x\&25 \neq 0 \rightarrow (x\&17 = 0 \rightarrow x\&A \neq 0)$$

тождественно истинна (т.е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной x)?

1. Преобразуем импликацию.

$$x\&25 \neq 0 \rightarrow ((x\&17 = 0) \rightarrow (x\&A \neq 0)) =$$

$$(x\&25 = 0) \vee ((x\&17 = 0) \rightarrow (x\&A \neq 0)) =$$

$$(x\&25 = 0) \vee (x\&17 \neq 0) \vee (x\&A \neq 0) = (1)$$

$$(x\&25 \neq 0) \wedge (x\&17 = 0) \rightarrow (x\&A \neq 0) \ (2)$$

Пояснение. Есть множество чисел, в которых представлены степени числа 2: 1, 2, 4, 8 и 16 .

Число 25 - одно из множества чисел P, в которых представлены числа 16, 8 и 1.

Число 17 - одно из множества чисел Q, в которых представлены числа 16 и 1.

18 Обозначим через $m\&n$ поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n. Так, например, $14\&5 = 1110_2\&0101_2 = 0100_2 = 4$.

Для какого наименьшего неотрицательного целого числа A формула

$$x\&25 \neq 0 \rightarrow (x\&17 = 0 \rightarrow x\&A \neq 0)$$

тождественно истинна (т.е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной x)?

2. Построим двоичный код для чисел 25 и 17.

$25_{10}=11001_2$, $17_{10}=10001_2$.

3. Построим таблицу истинности для формулы $(x\&25 = 0)\vee(x\&17 \neq 0)\vee(x\&A \neq 0)$. **Число x - разрядное слагаемое двоичной системы счисления из множества {1, 2 4, 8, 16}**

Число Х, его двоичный код				Итог
1, 00001	0	1	любое	1
2, 00010	1	0	любое	1
4, 00100	1	0	любое	1
8, 01000	0	0	1	1
16,10000	0	1	любое	1

4. Из таблицы истинности, что искомое число А должно содержать двоичный разряд на третьей позиции. Поэтому искомое минимальное

18 Обозначим через $m\&n$ поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n. Так, например, $14\&5 = 1110_2\&0101_2 = 0100_2 = 4$.

Для какого наименьшего неотрицательного целого числа A формула

$$x\&25 \neq 0 \rightarrow (x\&17 = 0 \rightarrow x\&A \neq 0)$$

тождественно истинна (т.е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной x)?

2. Построим двоичный код для чисел 25 и 17. $25_{10}=11001_2$, $17_{10}=10001_2$.

3. Построим таблицу истинности для формулы $(x\&25 \neq 0)\wedge(x\&17 = 0)\rightarrow(x\&A \neq 0)$ **.**

Число х - разрядное слагаемое двоичной системы счисления из множества {1, 2, 4, 8, 16}

Число X, его двоичный код.					Итог D→F
1, 00001	1	0	0	1	1
				0	1
2, 00010	0	1	0	0	1
				1	1
4, 00100	0	1	0	1	1
				0	1
8, 01000	1	1	1	1	1
				0	**0**
16,10000	1	0	0	1	1
				0	1

4. Из таблицы истинности, что искомое число А должно содержать двоичный разряд на третьей позиции. Поэтому искомое минимальное

Практикум

Введём выражение M & K, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число A, такое что выражение

$$(X \,\&\, 56 \neq 0) \rightarrow ((X \,\&\, 48 = 0) \rightarrow (X \,\&\, A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

Введём выражение M & K, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число A, такое что выражение

$$(X \,\&\, 35 \neq 0) \rightarrow ((X \,\&\, 31 = 0) \rightarrow (X \,\&\, A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

18. Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого **наименьшего** натурального числа A формула

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \to (\text{ДЕЛ}(x, 15) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 6))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

1. Введём обозначения A = **ДЕЛ(*x*, *A*)**, D_{15} = **ДЕЛ(*x*, 15)** , D_6 = **ДЕЛ(*x*, 6) и** D_N = **ДЕЛ(*x*,** N)

2. Введём множества:

- A –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие *A*
- D_{15} –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие D_{15}
- D_6 –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие D_6

2. Преобразуем импликацию.

$$A \to (D_{15} \wedge D_6) = \neg A \vee (D_{15} \wedge D_6)$$

18. Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого **наименьшего** натурального числа A формула

$$ДЕЛ(x, A) \to (ДЕЛ(x, 15) \wedge ДЕЛ(x, 6))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

3. Определелим числа, входящие во множество D_{15} **или** D_6: 6, 12, 15, 18, 24, 30, 45, 60.

4. Построим таблицу истинности для формулы $\neg A \vee (D_{15} \wedge D_6)$.

Число X	X кратно 15	X кратно 6	X кратно 6 И X кратно 15	X не кратно A	Итог
6	0	1	0	1	1
12	0	1	0	1	1
15	1	0	0	1	1
18	0	1	0	1	1
24	0	1	0	1	1
30	1	1	1	Любое	1
45	1	0	0	1	1
60	1	1	1	Любое	1

5. Необходимо выбрать первое из значений А, при котором высказывание «Х не кратно А» может принимать любое значение.

18. Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого **наименьшего** натурального числа A формула

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \to (\text{ДЕЛ}(x, 15) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 6))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

3. Определим числа, входящие во множество D_{15} **или** D_6**:** 6, 12, 15, 18, 24, 30, 45, 60.

4. Построим таблицу истинности для формулы $A \to (D_{15} \wedge D_6)$.

Число X	X кратно 15	X кратно 6	Z= (X кратно 6) И (X кратно 15)	X кратно A	Итог A→Z
6	0	1	0	1	1
				0	1
12	0	1	0	1	1
				0	1
15	1	0	**0**	1	1
				0	**1**
18	0	1	**0**	1	1
				0	**1**
24	0	1	**0**	1	1
				0	**1**
30	1	1	**1**	1	1
				0	**0**
45	1	0	**0**	**1**	**1**
				0	**1**
60	1	1	**1**	**1**	**1**
				0	**1**

18 Обозначим через **ДЕЛ**(*n*, *m*) утверждение «натуральное число *n* делится без остатка на натуральное число *m*».

Для какого наибольшего натурального числа *A* формула

¬**ДЕЛ**(*x*, *A*) → (**ДЕЛ**(*x*, 6) → ¬**ДЕЛ**(*x*, 4))

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной *x*)?

1. Введём обозначения A = **ДЕЛ(x, A)**, D_6 = **ДЕЛ(x, 6)** , D_4 = **ДЕЛ(x, 4).**

2. Введём множества:

- **А** –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие A
- D_6 –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие D_6
- D_4 –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие D_4

2. Преобразуем импликацию.

$$\neg A \to (D_6 \to \neg D_4) = A \lor (\neg D_6 \lor \neg D_4) = A \lor \neg(D_6 \land D_4) = (D_6 \lor D_4) \to A$$

18 Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m».

Для какого наибольшего натурального числа A формула

$\neg$ДЕЛ(x, A) $\rightarrow$ (ДЕЛ(x, 6) $\rightarrow$ $\neg$ДЕЛ(x, 4))

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

3. Определим делители числа 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

4. Построим таблицу истинности для формулы $A \vee \neg(D_6 \wedge D_4)$.

Число X	X кратно 6	X кратно 4	НЕ (X кратно 6 И X кратно 4)	X кратно A	Итог
2	0	0	1	любое	1
3	0	0	1	любое	1
4	0	1	1	любое	1
6	1	0	1	любое	1
12	1	1	0	1	1
24	1	1	0	1	1

5. Необходимо выбрать первое из значений А, при котором высказывание «Х кратно А» должно принимать истинное значение.

6. Ответ – 12.

18 Обозначим через **ДЕЛ**(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m».

Для какого наибольшего натурального числа A формула

$\neg$ДЕЛ(x, A) $\rightarrow$ (ДЕЛ(x, 6) $\rightarrow$ $\neg$ДЕЛ(x, 4))

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

3. Определим делители числа 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

4. Построим таблицу истинности для формулы $(D_6 \vee D_4) \rightarrow A$.

Число X	X кратно 6	X кратно 4	Z= (X кратно 6) ИЛИ (X кратно 4)	F= X кратно A	Итог Z→F
2	0	0	0	1	1
				0	1
3	0	0	0	0	1
				1	1
4	0	1	**1**	1	1
				0	**0**
6	1	0	**1**	1	1
				0	**0**
12	1	1	**1**	1	1
				0	**0**
24	1	1	**1**	1	1
				0	0

5. Необходимо выбрать первое из значений А, при котором высказывание «Z» состоит из двух истинных высказываний.

6. Ответ – 12.

Практикум

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого **наименьшего** натурального числа A формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, A) \land \neg\text{ДЕЛ}(x, 16)) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, 23)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого **наибольшего** натурального числа A формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, 40) \lor \text{ДЕЛ}(x, 64)) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, A)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Элементами множества А являются натуральные числа. Известно, что выражение

$(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \to (((x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x.

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества А.

1. Введём обозначения

A = **X∈A**,

$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$,

$C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.

2. **Преобразуем импликацию.**

$$(x \in B) \to (((x \in C) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in B)) =$$

$$\neg(x \in B) \vee (\neg((x \in C) \wedge \neg(x \in A)) \vee \neg(x \in B) =$$

$$\neg(x \in B) \vee (\neg(x \in C) \vee (x \in A) \vee \neg(x \in B) =$$

$$\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C) \vee (x \in A) =$$

$$((x \in B) \wedge (x \in C)) \to (x \in A)$$

Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение

$(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \to (((x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x.

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A.

3. Построим таблицу истинности для формулы

$\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C) \vee (x \in A)$.

Число X	$\neg(x \in B)$	$\neg(x \in C)$	$x \in A$	Итог
2	0	1	Любое	1
3	1	0	Любое	1
6	0	0	1	1
8	0	1	Любое	1
9	1	0	Любое	1
10	0	1	Любое	1
12	0	0	1	1
15	1	0	Любое	1

4. Множество A минимально должно состоять из двух элементов: 6 и 12.

Элементами множества А являются натуральные числа. Известно, что выражение

$(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \rightarrow (((x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x.

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества А.

Число X	x∈B	x∈C	Z=(x∈B)⋀(x∈C)	F= (x∈A)	Итог Z→F
2	1	0	0	1	1
				0	1
3	0	1	0	0	1
				1	1
4	1	0	**0**	1	1
				0	**1**
6	1	1	**1**	1	1
				0	0
8	1	0	**0**	1	1
				0	**1**
9	0	1	**0**	1	1
				0	**1**
10	1	0	**0**	1	**1**
				0	**1**
12	1	1	**1**	1	**1**
				0	**0**
15	0	1	**0**	1	**1**
				0	**1**

Практикум

Элементами множества А являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(x \in A) \to \neg(x \in \{1, 3, 7\}) \vee (\neg(x \in \{1, 2, 4, 5, 6\}) \wedge (x \in \{1, 3, 7\}))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной *x*. Определите **наименьшее** возможное количество элементов множества А.

Элементами множества А являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(x \in A) \to (\neg(x \in \{1, 2, 3, 4\}) \vee \neg(x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной *x*. Определите наименьшее возможное количество элементов множества А.