Комплексные числа

После изучения темы «Комплексные числа учащиеся должны:

Знать:

- **алгебраическую, геометрическую и тригонометрическую формы комплексного числа.**

Уметь:

- **производить над комплексными числами операции сложения, умножения, вычитания, деления, возведения в степень, извлечение корня из комплексного числа;**
- **переводить комплексные числа из алгебраической формы в геометрическую и тригонометрическую;**
- **пользоваться геометрической интерпретацией комплексных чисел;**
- **в простейших случаях находить комплексные корни уравнений с действительными коэффициентами.**

I. Подготовка к изучению нового материала

Какие числовые множества Вам знакомы?

N ⇒ **Z** ⇒ **Q** ⇒ **R**

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Числовая система	Допустимые алгебраические операции	Частично допустимые алгебраические операции
Натуральные числа, N	Сложение, умножение	Вычитание, деление, извлечение корней
Целые числа, Z	Сложение, вычитание, умножение	Деление, извлечение корней
Рациональные числа, Q	Сложение, вычитание, умножение, деление	Извлечение корней из неотрицательных чисел
Действительные числа, R	Сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней из неотрицательных чисел	Извлечение корней из произвольных чисел
Комплексные числа, C	Все операции	

Минимальные условия, которым должны удовлетворять комплексные числа:

C_1) Существует квадратный корень из , т.е. существует комплексное число, квадрат которого равен .

C_2) Множество комплексных чисел содержит все действительные числа.

C_3) Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяют обычным законам арифметических действий (сочетательному, переместительному, распределительному).

Выполнение этих минимальных условий позволяет определить все множество C комплексных чисел.

Мнимые числа

i = -1, i – мнимая единица

i, 2i, -0,3i — чисто мнимые числа

Арифметические операции над чисто мнимыми числами выполняются в соответствии с условием С3.

$$3i + 13i = (3 + 13)i = 16i$$
$$3i \cdot 13i = (3 \cdot 13)(i \cdot i) = 39i^2 = -39$$
$$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = -i$$

В общем виде правила арифметических операций с чисто мнимыми числами таковы:

$$ai + bi = (a + b)i; \qquad ai - bi = (a - b)i;$$
$$a(bi) = (ab)i; \qquad (ai)(bi) = abi^2 = -a$$

где *a* и *b* — действительные числа.

Комплексные числа

Определение 1. **Комплексным числом называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.**

$$z = a + bi \in C \Leftrightarrow a \in R, b \in R,$$

$$i - мнимая\ \ единица.$$

$$a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$$

Определение 2. **Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные части и равны их мнимые части:**

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c,\ b = d.$$

Классификация комплексных чисел

- **Комплексные числа**
  a* + *bi
  - **Действительные числа**
    b = o
    - **Рациональные числа**
    - **Иррациональные числа**
  - **Мнимые числа**
    b ≠ o
    - **Мнимые числа с ненулевой действительной частью**
      a ≠ 0, b ≠ 0.
    - **Чисто мнимые числа**
      a = 0, b ≠ 0.

Арифметические операции над комплексными числами

(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i

(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i

(a + bi)·(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Сопряженные комплексные числа

Определение: Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, **сопряженное данному.**

Если данное комплексное число обозначается буквой z, то сопряженное число обозначается $\bar{z}$:

$$z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$$

Из всех комплексных чисел действительные числа (и только они) равны своим сопряженным числам.

Числа *a + bi* и *a - bi называются взаимно сопряженными комплексными числами.*

Свойства сопряженных чисел

1. Сумма и произведение двух сопряженных чисел есть число действительное.

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a \qquad z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

2. Число, сопряженное сумме двух комплексных чисел, равно сумме сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

3. Число, сопряженное разности двух комплексных чисел, равно разности сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

4. Число, сопряженное произведению двух комплексных чисел, равно произведению сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

Свойства сопряженных чисел

5. Число, сопряженное *n*-ой степени комплексного числа z, равно *n*-ой степени числа, сопряженного к числу z, т.е.

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n, \quad n \in N$$

6. Число, сопряженное частному двух комплексных чисел, из которых делитель отличен от нуля, равно частному сопряженных чисел, т.е.

$$\overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)} = \frac{\overline{(a+bi)}}{\overline{(c+di)}}$$

Степени мнимой единицы

По определению первой степенью числа *i* является само число *i*, а второй степенью – число -1:

$$\boldsymbol{i^1 = i,\ i^2 = -1}$$

Более высокие степени числа *i* находятся следующим образом:

$$i^4 = i^3 \cdot i = -\cdot i^2 = 1;$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i;$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1 \text{ и т.д.}$$

Очевидно, что при любом натуральном *n*

$$\boldsymbol{i^{4n} = 1; \qquad i^{4n+1} = i;}$$

$$\boldsymbol{i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i.}$$

Извлечение квадратных корней из комплексных чисел в алгебраической форме.

- ***Определение***. Число *w* называют квадратным корнем из комплексного числа z, если его квадрат равен *z*: $w^2 = z$
- ***Теорема***. Пусть *z=a+bi* – отличное от нуля комплексное число. Тогда существуют два взаимно противоположных комплексных числа, квадраты которых равны *z*. Если b≠0, то эти два числа выражаются формулой:

$$w = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\cdot signb\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right], где$$

$$signb = \begin{cases} 1, если\, b > 0 \\ -1, если\, b < 0 \\ 0, если\, b = 0 \end{cases}$$

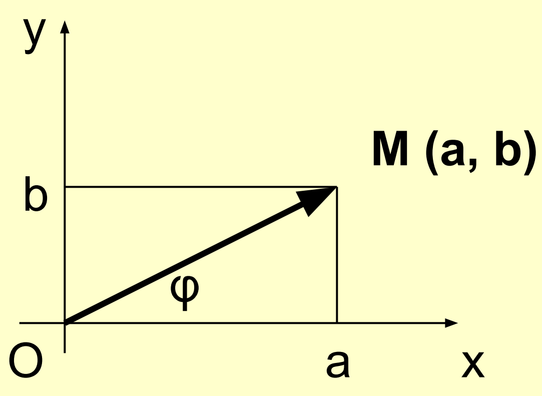
$$При\ \ b = 0,\, a > 0\ имеем: w = \pm\sqrt{a}, при\ b = 0, a < 0\ имеем: w = \pm i\sqrt{|a|}.$$

Геометрическое изображение комплексных чисел.

Комплексному числу z на координатной плоскости соответствует точка M(a, b).
Часто вместо точек на плоскости берут их радиусы-векторы $\overrightarrow{OM}$

Определение: **Модулем** комплексного числа *z = a + bi* называют неотрицательное число $\sqrt{a^2+b^2}$,
равное расстоянию от точки M до начала координат

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$



$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad и \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

φ *– аргумент комплексного числа*

$$\varphi \in (-\pi; \pi]$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

где φ – аргумент комплексного числа,

r = $\sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль комплексного числа,

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad u \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Умножение и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Теорема 1. Если $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ и

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$ то:

а) $$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

б) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Теорема 2 (формула Муавра).

Пусть z — любое отличное от нуля комплексное число, n — любое целое число. Тогда

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Извлечение корня из комплексного числа.

- *Теорема*. Для любого натурального числа n и отличного от нуля комплексного числа z существуют n различных значений корня n-степени.

Если

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

то эти значения выражаются формулой

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$