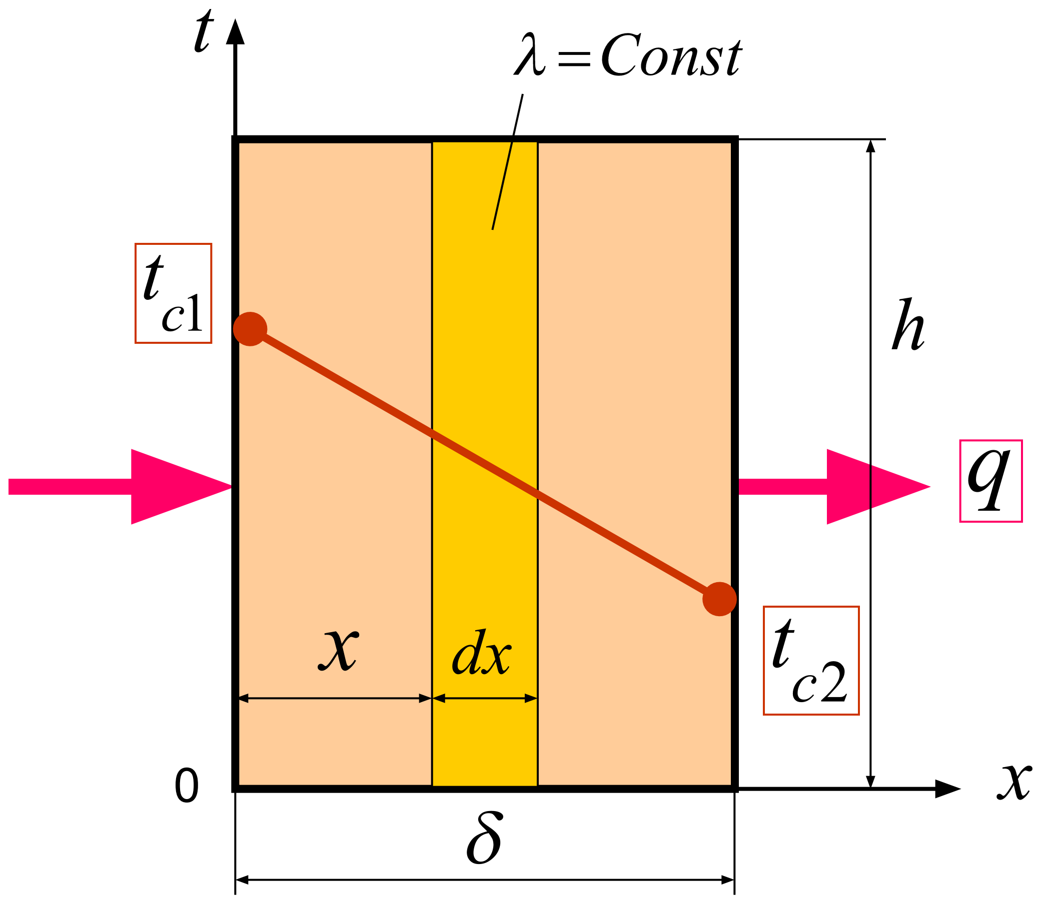
Теплотехника

Теплопроводность через плоскую стенку

Теплопроводность через однослойную плоскую стенку при граничных условиях первого рода



Дифференциальное уравнение теплопроводности (частный случай)

Ранее мы получили общий вид дифференциального уравнения теплопроводности:

$$\boxed{\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}} \quad (1)$$

В частном случае, для стационарного процесса $\partial t / \partial \tau = 0$

при отсутствии внутренних источников теплоты $q_v = 0$:

из (1) при $a \neq 0$ следует: $\nabla^2 t = 0,$

или развернутое выражение оператора Лапласа:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

Для бесконечной пластины: $h >> \delta; b >> \delta$ то есть:

$\partial^2 t / \partial y^2 = 0; \partial^2 t / \partial z^2 = 0$

Дифференциальное уравнение теплопроводности запишется в виде:

$$\boxed{\frac{d^2 t}{dx^2} = 0}. \quad (3)$$

Условия однозначности

Для рассматриваемого случая добавляем условия однозначности:

- Геометрические: вертикальная пластина $h >> \delta; b >> \delta$
- Физические: $\lambda = Const;$
- Начальные: для стационарного процесса не требуются,
- Граничные условия I рода: при $x = 0 \quad t = t_{c1} = Const;$

  при $x = \delta \quad t = t_{c2} = Const.$ (4)

Найти: $\boxed{t = f(x) - ?; q = ?}$

После первого интегрирования дифференциального уравнения (3) имеем: $\boxed{\frac{dt}{dx} = c_1;}$ (5)

После разделения переменных в (5): $dt = c_1 dx;$ (6)

Температурное поле

После 2-го интегрирования: $t = c_1 x + c_2.$ (7)

Для определения констант интегрирования подставляем (4) в (7): при $x = 0$ $t = \boxed{t_{c1} = c_2;}$

при $x = \delta$ $t = t_{c2} = c_1\delta + c_2 = c_1\delta + t_{c1};$ (8)

откуда с учетом (5) имеем: $\boxed{c_1 = \frac{t_{c2} - t_{c1}}{\delta}.}$ (9)

Откуда получаем:

$$\boxed{t = t_{C1} - \frac{t_{C1} + t_{C2}}{\delta} \cdot x.}$$

Удельный тепловой поток

По закону Фурье: $$q = -\lambda \frac{dt}{dx}, \qquad (10)$$

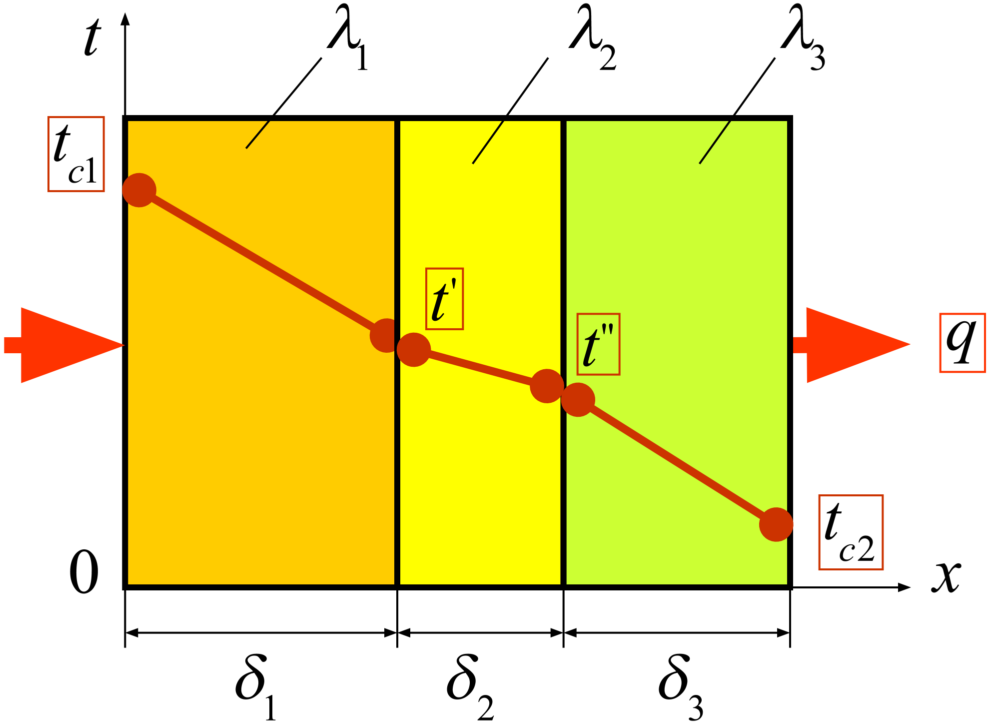
Подставляя (9) в (10), получим:

$$\boxed{q = \frac{\lambda}{\delta}(t_{c1} - t_{c2}),}$$

или в форме закона Ома:

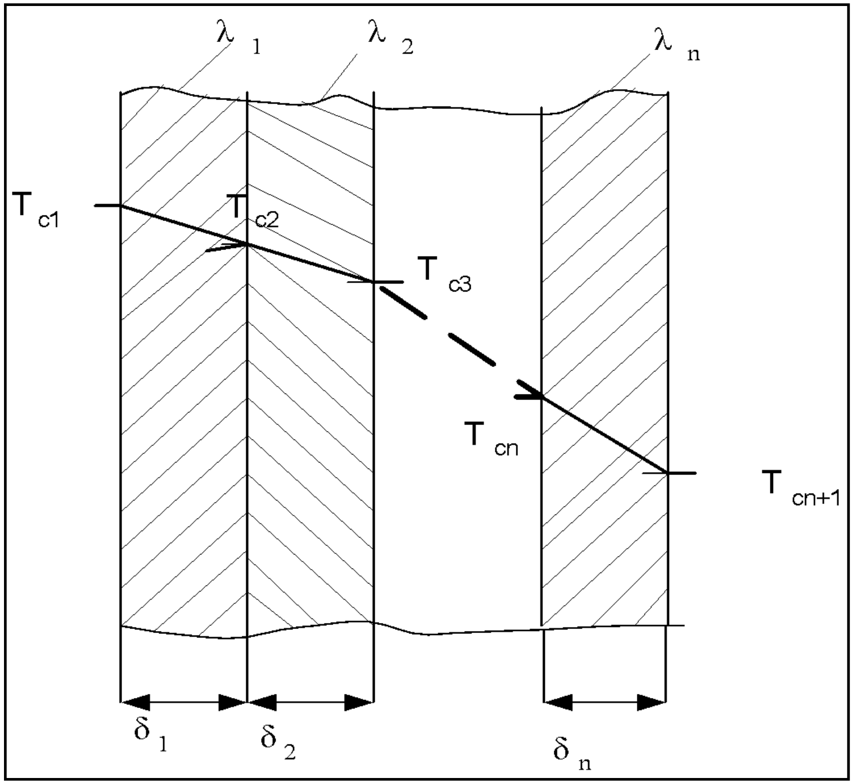
$$\boxed{q = \frac{\Delta t}{R}.}$$

Теплопроводность через трехслойную плоскую стенку



Теплопроводность через многослойную плоскую стенку при граничных условиях первого рода

Расчетная схема



Удельный тепловой поток

Теплообмен в каждом слое опишется формулой:

$$\begin{cases} q_1 = \lambda_1 \cdot \dfrac{t_{C1} - t_{C2}}{\delta_1}, \\ q_2 = \lambda_2 \cdot \dfrac{t_{C2} - t_{C3}}{\delta_2}, \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ q_n = \lambda_n \cdot \dfrac{t_{Cn} - t_{Cn-1}}{\delta_n}. \end{cases} \tag{1}$$

Удельный тепловой поток

Так как теплообмен стационарный, то: $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q$ (2)

Для вывода формулы перепишем уравнение (1) с учетом уравнения (2), получим:

$$\begin{cases} t_{C1} - t_{C2} = \dfrac{q\delta_1}{\lambda_1}, \\ t_{C2} - t_{C3} = \dfrac{q\delta_2}{\lambda_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{Cn} - t_{Cn+1} = \dfrac{q\delta_n}{\lambda_n}. \end{cases}$$

Удельный тепловой поток

Складываем части отдельно, получим:

$$t_{C1} - t_{C2} + t_{C2} - t_{C3} + \ldots + t_{Cm} - t_{Cm+1} =$$

$$= \frac{q\delta_1}{\lambda_1} + \frac{q\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{q\delta_n}{\lambda_n}.$$

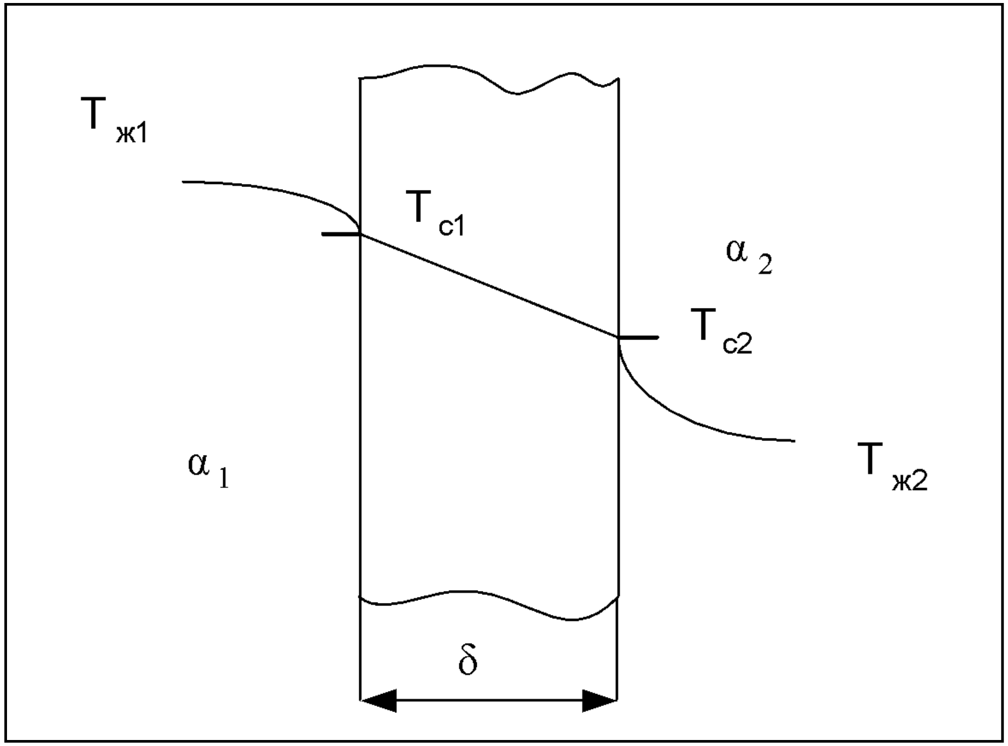
Удельный тепловой поток

Отсюда получим:

$$q = \frac{t_{C1} - t_{Cn+1}}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1} + \dfrac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \dfrac{\delta_n}{\lambda_n}}$$

Теплообмен в плоской стенке при граничных условиях третьего рода.

Расчетная схема:



Удельный тепловой поток

Теплообмен на правой и левой поверхности стенки опишется законом Ньютона – Рихмана:

$$q_1 = \alpha_1 \left(t_{Ж1} - t_{C1} \right);$$

$$q_2 = \alpha_2 \left(t_{C2} - t_{Ж2} \right)$$

Теплообмен внутри стенки:

$$q_3 = \lambda \frac{t_{C2} - t_{C3}}{\delta}$$

Удельный тепловой поток

$$q_1 = q_2 = q_3 = q$$

Разность температур:

$$\left.\begin{aligned} t_{Ж1} - t_{C1} &= \frac{q}{\alpha_1}, \\ t_{Ж2} - t_{2} &= \frac{q}{\alpha_2}, \\ t_{C1} - t_{C2} &= \frac{q\delta}{\lambda}. \end{aligned}\right\}$$

Удельный тепловой поток

Складываем:

$$t_{Ж1} - t_{C1} + t_{C2} - t_{Ж2} + t_{C1} - t_{C2} =$$

$$= \left(\frac{q}{\alpha_1} + \frac{q}{\alpha_2} + \frac{q\delta}{\lambda} \right)$$

Удельный тепловой поток

Окончательно:

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{\delta}{\lambda} + \dfrac{1}{\alpha_2}}$$

Теплопроводность через многослойную плоскую стенку при граничных условиях третьего рода

Плотность теплового потока:

$$\boxed{q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\delta_i}{\lambda_i} + \dfrac{1}{\alpha_2}}}$$

Теплопроводность через однослойную плоскую стенку при граничных условиях второго рода

По закону Фурье:

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = const$$

Перепишем уравнение и проинтегрируем:

$$qdx = -\lambda dt,$$

$$q\int_{0}^{x} dx = -\lambda \int_{t_{C1}}^{t} dt$$

Теплопроводность через однослойную плоскую стенку при граничных условиях второго рода

Получим:

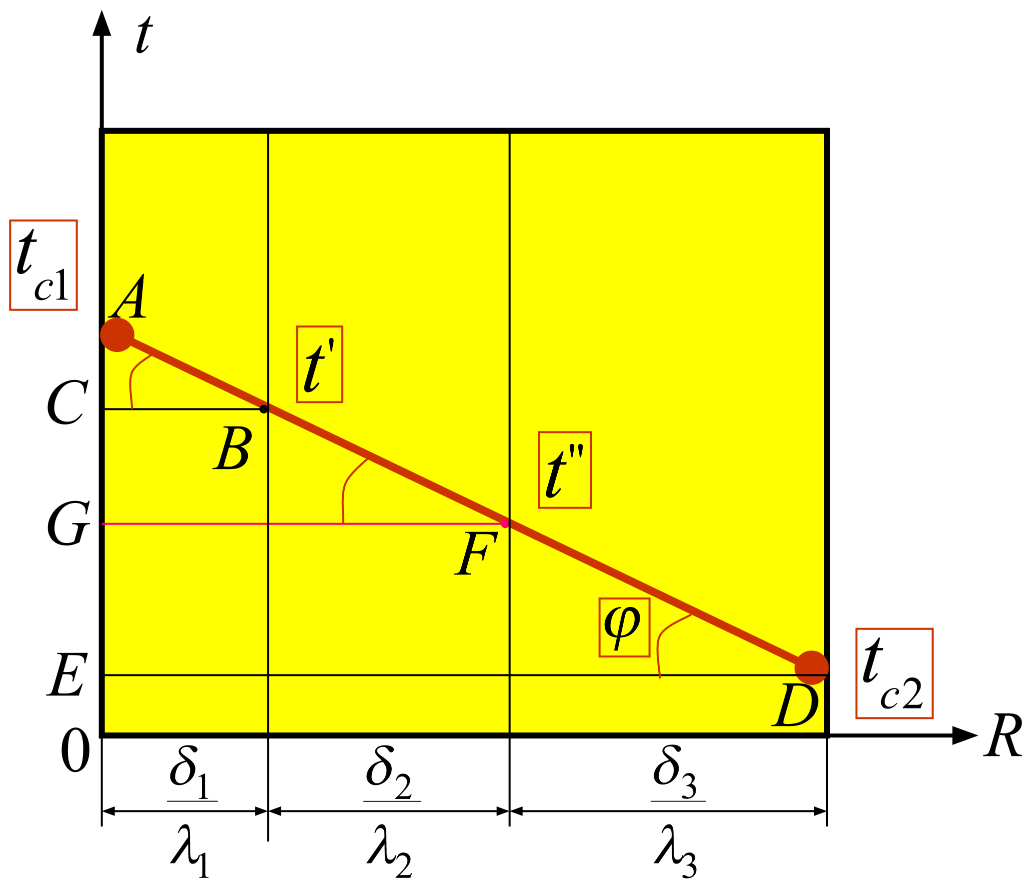
$$qx = -\lambda t + \lambda t_{C1},$$

выразим отсюда *t*:

$$t = \frac{1}{\lambda}\left(\lambda t_{C1} - qx\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{t = t_{C1} - \frac{qx}{\lambda}}$$

Графический метод определения температур между слоями



Определение температур между слоями

Треугольники *ABC* и *ADE* подобны между собой по равенству трех углов. Из их подобия следует:

$$tg\varphi = \frac{AC}{BC} = \frac{AE}{DE},$$

или:

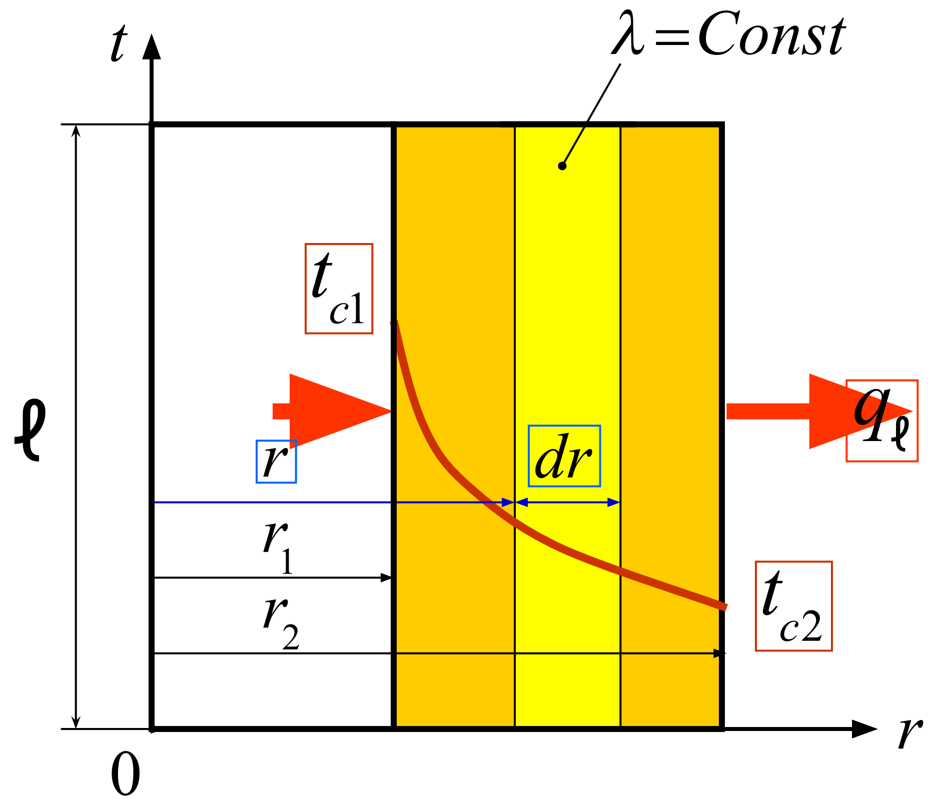
$$tg\varphi = \frac{t_{c1} - t'}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1}} = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1} + \dfrac{\delta_2}{\lambda_2} + \dfrac{\delta_3}{\lambda_3}} = q,$$

то есть $\boxed{AC = t_{c1} - t'}$, откуда находится температура $\boxed{t'}$.

Аналогично, из подобия треугольников AFG и ADE:

$\boxed{AG = t_{c1} - t''}$. Отсюда находится температура $\boxed{t''}$.

Теплопроводность через однослойную цилиндрическую стенку



Дифференциальное уравнение тепло-проводности для цилиндрической стенки

Общее выражение дифференциального уравнения теплопроводности: $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}$. (1)

Для стационарного процесса $\partial t / \partial \tau = 0;$

при отсутствии внутренних источников теплоты $q_v = 0,$

с учетом этих условий уравнение (1) примет вид $a\nabla^2 t = 0$

Но $a \neq 0$ тогда частный вид дифференциального уравнения теплопроводности: $\nabla^2 t = 0.$

Или через развернутое выражение оператора Лапласа:

.

(2)

$$\nabla^2 t = \boxed{\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0}$$

Условия однозначности

Добавляем условия однозначности:

- Геометрические условия:
  $\ell >> r_2$ (бесконечная цилиндрическая стенка);
- Физические условия: $\lambda = Const;$
- Начальные условия: для стационарного процесса не требуются;
- Граничные условия I рода:

$$\begin{aligned} &\text{при } r = r_1 \quad t = t_{c1} = Const; \\ &\text{при } r = r_2 \quad t = t_{c2} = Const. \end{aligned} \qquad (3)$$

Преобразование дифференциального уравнения

В соответствии с геометрическими условиями однозначности, в бесконечной цилиндрической стенке температура не изменяется по координатам *z* и φ, тогда уравнение (2) примет вид: (4).

$$\boxed{\frac{d^2t}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dt}{dr}=0,}$$

Найти:

$$t=f(r)-?;Q=?.$$

Граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} t\left(r_1\right)&=t_{C1},\\ t\left(r_2\right)&=t_{C2}.\end{aligned}\right\}$$

Обозначим

$$U=\frac{dt}{dr},$$

Преобразование дифференциального уравнения. Решение

Уравнение (4) примет вид:

$$\frac{dU}{dr}+\frac{1}{r}U=0$$

Проинтегрируем:

$$\int\frac{dU}{U}=-\int\frac{dr}{r},$$

Получим:

$$\ln U=-\ln r+\ln C_1$$

Решение

Найдем из полученного выражения

$$\ln(Ur) = \ln C_1; \qquad Ur = C_1$$

$$\frac{dt}{dr} r = C_1, \qquad \int dt = C_1 \int \frac{dr}{r},$$

$$\boxed{t = C_1 \ln r + C_2}$$

Решение

Решение подчиним граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned} t_{C1} &= C_1 \ln r_1 + C_2, \\ t_{C2} &= C_1 \ln r_2 + C_2. \end{aligned}\right\},$$

$$t_{C1} - t_{C2} = C_1 \cdot \ln r_1 + C_2 - C_1 \cdot \ln r_2 - C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{C1} - t_{C2} = C_1 \cdot \ln \frac{r_1}{r_2}$$

Решение

Отсюда следует:

$$\boxed{C_1 = \frac{t_{C1} - t_{c2}}{\ln \dfrac{r_1}{r_2}}}$$

$$\boxed{C_2 = t_{C1} - \frac{t_{C1} - t_{C2}}{\ln \dfrac{r_1}{r_2}} \cdot \ln r_1.}$$

Решение примет вид:

$$\boxed{t = t_{C1} - \frac{\left(t_{C1} - t_{C2}\right) \cdot \ln \dfrac{r}{r_1}}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}},}$$

Тепловой поток

По закону Фурье: $Q = -\lambda \frac{dt}{dr} F,$ где $F = 2\pi r l$

$$Q = \lambda \frac{\left(t_{C1} - t_{C2}\right) 2\pi l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \text{или} \quad Q = \frac{\pi \left(t_{C1} - t_{C2}\right) l}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}},$$

$$q_l = \frac{Q}{l}, \quad \frac{Вт}{м}$$

$$\boxed{q_l = \frac{\pi \left(t_{C1} - t_{C2}\right)}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}}$$

Теплообмен в цилиндрической стенке при граничных условиях второго рода

По закону Фурье:

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dr} 2\pi r l = const$$

Проинтегрируем данное выражение:

$$Q \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r} = -2\pi\lambda l \int_{t_{C1}}^{t} dt$$

получим:

$$Q \ln \frac{r}{r_1} = -2\pi\lambda l \left(t - t_{C1} \right)$$

$$\boxed{t = t_{C1} - \frac{Q}{2\pi\lambda l} \ln \frac{r}{r_1}}$$

Теплообмен при граничных условиях третьего рода

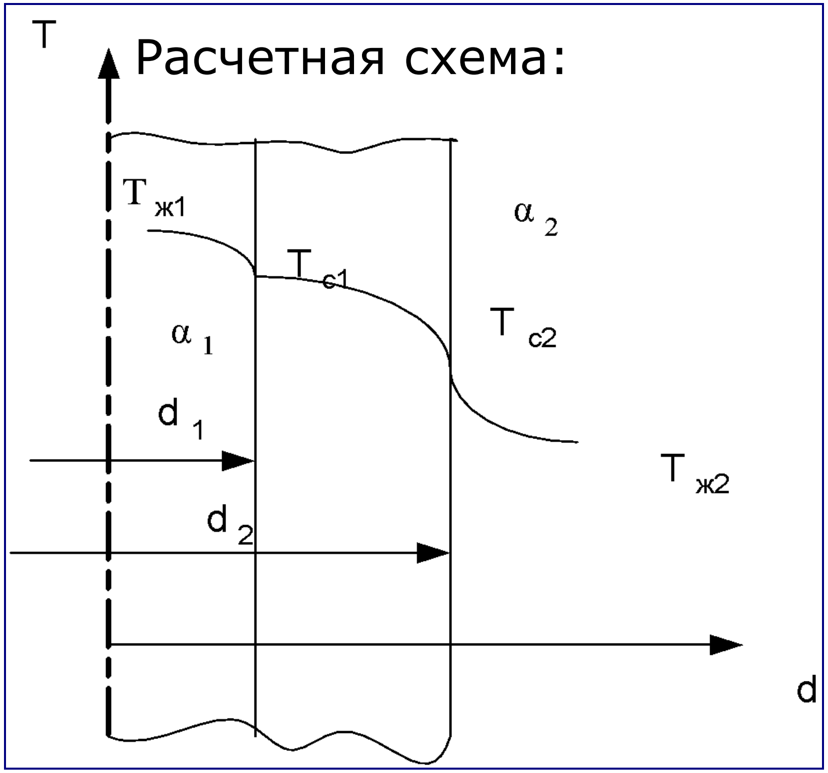
Теплообмен на внутренней и наружной поверхности стенки описывается законом Ньютона – Рихмана:

$$q_{Ж} = \alpha_{С}\left(t\ _{1} - t\ _{1}\right)\pi d_1$$

$$q_{C2} = \alpha_{Ж}\left(t\ _{2} - t\ _{2}\right)\pi d_2$$

Внутри стенки:

$$q_{l3} = \frac{\pi\left(t_{C1} - t_{C2}\right)}{\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1}}.$$



Теплообмен при граничных условиях третьего рода

Так как теплообмен стационарный, то $q_{l1} = q_{l2} = q_{l3} = q_l$

$$\left.\begin{aligned}
t_{Ж1} - t_{C1} &= \frac{q_l}{\pi d_1 \alpha_1}, \\
t_{Ж2} - t_{\;2} &= \frac{q_l}{\pi d_2 \alpha_2}, \\
t_{C1} - t_{C2} &= q_l \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}.
\end{aligned}\right\}$$

Теплообмен при граничных условиях третьего рода

Получим:

$$t_{Ж1} - t_{C1} + t_{C2} - t_{Ж2} + t_{C1} - t_{C2} =$$

$$= q_l \left(\frac{1}{\pi d_1 \alpha_1} + \frac{1}{\pi d_2 \alpha_2} + \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} \right)$$

Уравнение теплопередачи через цилиндрическую стенку:

$$\boxed{q_l = \frac{\pi \left(t_{Ж1} - t_{Ж2} \right)}{\left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right)}}$$

Теплообмен при граничных условиях третьего рода

Линейное термическое сопротивление теплопередачи через цилиндрическую стенку:

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}, \; \frac{мК}{Вт}$$

Тогда уравнение теплопередачи:

$$\boxed{q_l = \frac{\pi\left(t_{ж1} - t_{ж2}\right)}{R_l}}$$

Теплообмен при граничных условиях третьего рода

Полный тепловой поток:

$$Q = \frac{\pi \left(t_{ж1} - t_{ж2} \right) l}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1} + \dfrac{1}{2\lambda} \ln \dfrac{d_2}{d_1} + \dfrac{1}{\alpha_2 d_2}},$$

$$Q = q_l \cdot l$$

Теплообмен при граничных условиях третьего рода

Линейный коэффициент теплопередачи через цилиндрическую стенку:

$$k_l = \frac{1}{R_l}, \frac{Вт}{м \cdot К}$$

Тогда уравнение теплопередачи:

$$\boxed{q_{lЖ} = \pi k_{lЖ} \left(t_{1} - t_{2}\right)}$$

Плотность теплового потока

$$q = \frac{Q}{F}, \frac{Вт}{м^2}; \qquad F_1 = \pi d_1 l; \qquad F_2 = \pi d_2 l.$$

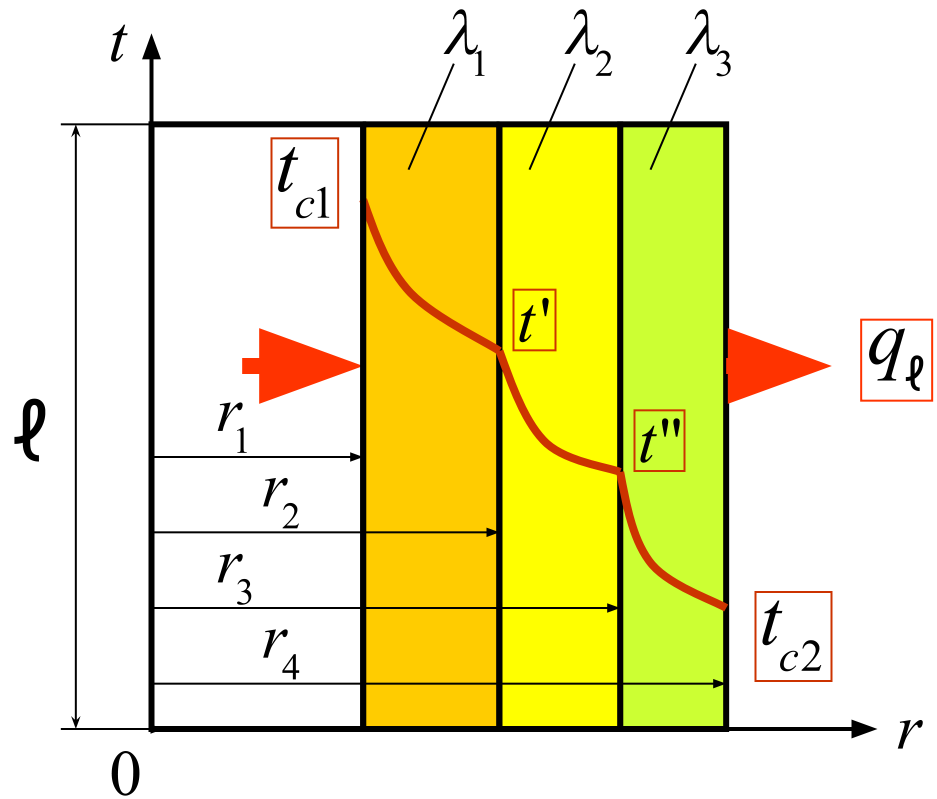
На внутренней поверхности:

$$\boxed{q_1 = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_1}{\alpha_2 d_2}},}$$

На внешней поверхности:

$$\boxed{q_2 = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{d_2}{\alpha_1 d_1} + \frac{d_2}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2}}.}$$

Теплопроводность через трехслойную цилиндрическую стенку



Теплопроводность через многослойную цилиндрическую стенку

Уравнение теплопередачи:

$$q_l = \frac{\pi\left(t_{Ж1} - t_{Ж2}\right)}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1} + \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\lambda_i}\ln\dfrac{d_{i+1}}{d_i} + \dfrac{1}{\alpha_2 d_2}}, \quad Вт/м$$

Критический диаметр цилиндрической стенки

Линейное термическое сопротивление теплопередачи через цилиндрическую стенку:

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}, \frac{мК}{Вт}$$

Исследуем функцию вида:

$$R_l = R_l(d_2).$$

Функция непрерывна и дифференцируема.

$$\frac{dR_l}{d(d_2)} = \frac{1}{2\pi d_2} - \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} = 0.$$

Критический диаметр цилиндрической стенки

Найдем критическую точку.

$$\frac{1}{d_2}\left(\frac{1}{2\lambda}-\frac{1}{\alpha_2 d_2}\right)=0 \Rightarrow d_2=\frac{2\lambda}{\alpha_2}$$

Критическая точка: $\boxed{d_2=\dfrac{2\lambda}{\alpha_2}}$

$$\frac{d^2 R_l}{d\left(d_2\right)^2}=-\frac{1}{2\lambda d_2^2}+\frac{2}{\alpha_2 d_2^3}=\frac{1}{d_2^2}\left(\frac{2}{\alpha_2 d_2}-\frac{1}{2\lambda}\right)$$

$$\frac{2}{\alpha_2 d_2}-\frac{1}{2\lambda}=\frac{2\alpha_2}{\alpha_2 2\lambda}-\frac{1}{2\lambda}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\lambda}>0$$

Критический диаметр тепловой изоляции

Теплоизоляционными называются материалы, теплопроводность которых не превышает величины 0,25 Вт/(мК).

- Естественная изоляция (природная): асбест, слюда, пробка.
- Предварительно обработанная: асбослюда, шлаковата, стекловата, пенопласт, пеношлакобетон.

Теплоизоляционные свойства последним из перечисленных материалов придает наличие в них мелких воздушных пузырьков или прослоек воздуха. В них из-за малости размеров, конвекция отсутствует и теплота передается только теплопро-проводностью, порядок которой для воздуха при атмосферных условиях порядка 0,025 Вт/(мК), то есть на порядок ниже величины, приведенной выше для теплоизоляции.

Термическое сопротивление теплопередачи через изолированный трубопровод

Линейное термическое сопротивление теплопередачи через двухслойную цилиндрическую стенку:

$$\boxed{R_\ell = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda}\ell n\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{из}}\ell n\frac{d_{из}}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_{из}}.} \qquad (1)$$

В выражении (1):

$$R_{\ell 1} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda}\ell n\frac{d_2}{d_1} = Const; \qquad (2)$$

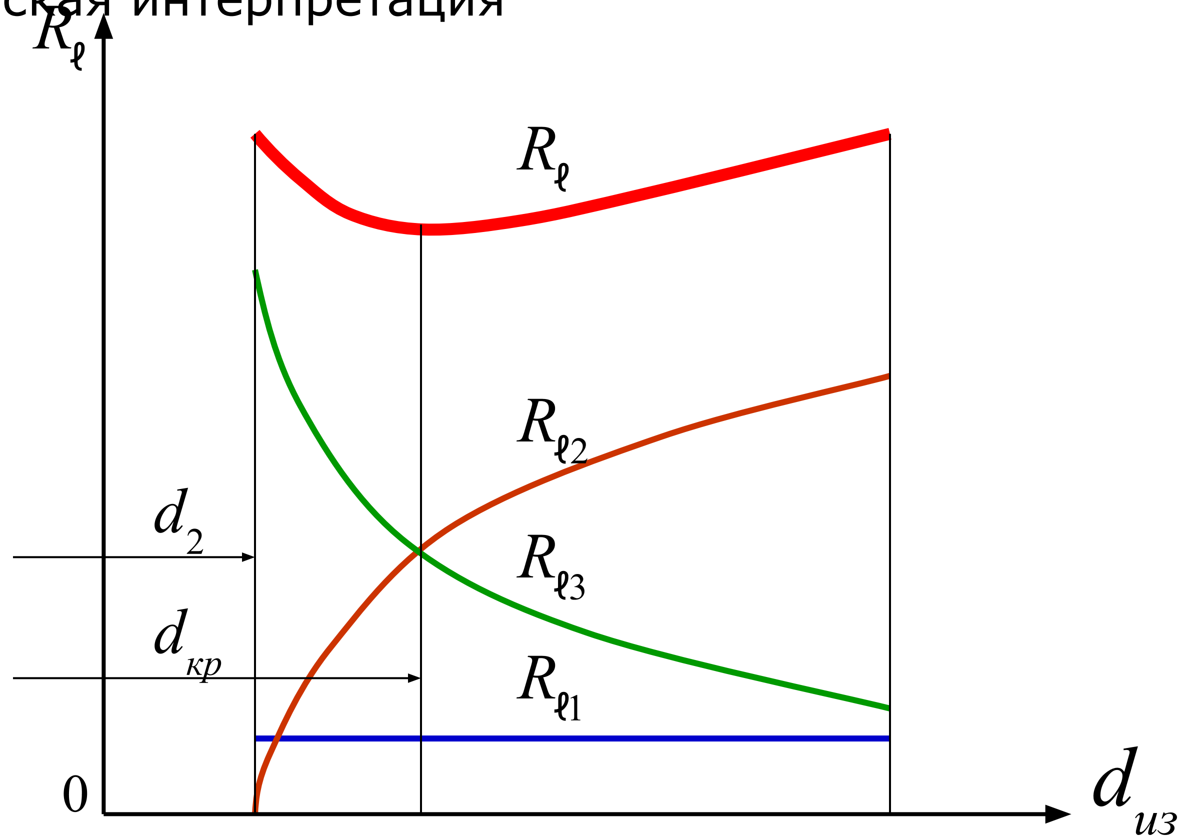
при: $d_{из} = \mathrm{var}$

$$R_{\ell 2} + R_{\ell 3} = \frac{1}{2\lambda_{из}}\ell n\frac{d_{из}}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_{из}} = \mathrm{var}. \qquad (3)$$

Из (3) видно, что с увеличением диаметра изоляции $d_{из}$ термическое сопротивление $R_{\ell 2}$ растет, а $R_{\ell 3}$ падает.

Зависимость линейного термического сопротивления от диаметра изоляции

Геометрическая интерпретация



Исследование функции (3) на минимум

Из предыдущих двух слайдов следует, что минимальному термическому сопротивление при $d_{кр}$ соответствуют максимальные теплопотери.

Для определения критического диаметра изоляции надо исследовать функцию (3) на минимум, а именно:

$$\frac{d}{d(d_{из})}\left[\frac{1}{2\lambda_{из}}\ell n\left(\frac{d_{из}}{d_2}\right)+\frac{1}{\alpha_2 d_{из}}\right]=0$$

или в виде

$$\frac{d}{d(d_{из})}\left[\frac{1}{2\lambda_{из}}(\ell n d_{из}-\ell n d_2)+\frac{1}{\alpha_2 d_{из}}\right]=0.$$

Тогда при

$$\lambda_{из}=Const; d_2=Const; \alpha_2=Const,$$

и с учетом

$$(\ell n x)'=\frac{1}{x}; \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}; (\ell n d_2)'=0,$$

имеем:

Выбор эффективной изоляции трубопроводов

- $$\frac{1}{2\lambda_{из}}\frac{1}{d_{кр}}-\frac{1}{\alpha_2 d_{кр}^2}=0.$$

После сокращения на $d_{кр}$: $$\frac{1}{2\lambda_{из}}-\frac{1}{\alpha_2 d_{кр}}=0,$$

или $\alpha_2 d_{кр}-2\lambda_{из}=0,$ откуда критический диаметр изоляции:

$$\boxed{d_{кр}=\frac{2\lambda_{из}}{\alpha_2}.}$$

Из следующего слайда видно, что при $d_{кр}<d_2$ - изоляция эффективная

$$\Delta q_{\ell 2}<\Delta q_{\ell 1}$$

а при $d_{кр}>d_2$ - малоэффективная.

Критический диаметр изоляции