Проблемы энерго- и ресурсосбережения в теплоэнергетике

Теплопроводность при наличии внутренних источников теплоты

Теплопроводность при наличии внутренних источников теплоты

Примеры:

- джоулева теплота при пропускании электрического тока;
- экзо- и эндотермические химические реакции;
- выделение (поглощение) теплоты при перестройке кристаллических решеток;
- выделение (поглощение) теплоты при изменении агрегатного состояния тела;
- выделение (поглощение) теплоты в атомных реакторах….

Теплопроводность при наличии внутренних источников теплоты

<u>Классификация источников теплоты</u>

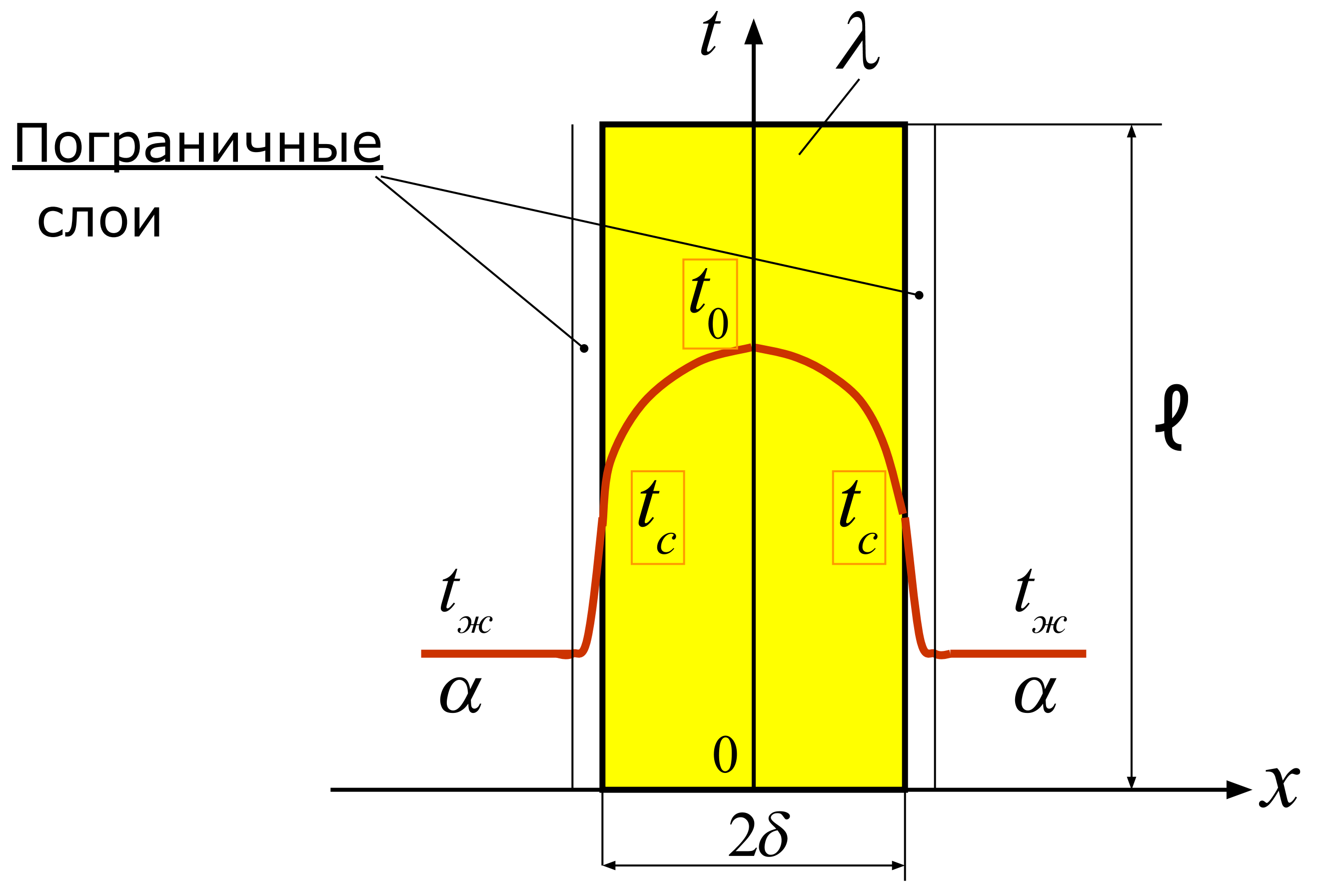
<u>По форме:</u>

- Точечные;
- Линейные;
- Поверхностные;
- Объемные.

<u>По направлению действия:</u>

- Положительные (теплота выделяется);
- Отрицательные (теплота поглощается).

Однородная пластина



Дифференциальное уравнение теплопроводности

При $\ell >> \delta :$ бесконечная пластина.

В стационарном процессе: $q_{ж} = Const; \alpha = Const; t = Const.$

Найти: $t = f(x) = ?; t_0 = ?; t_c = ?$

Дифференциальное уравнение теплопроводности: $$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}, \quad (1)$$

Для стационарного процесса: $(\partial t / \partial \tau) = 0$

тогда $$a\nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho} = 0, \quad (2)$$ где $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \rightarrow$$

оператор Лапласа, тогда после деления (2) на $a = \lambda / (c\rho)$ дифференциальное уравнение теплопроводности в бесконечной пластине:

$$\boxed{\ell >> \delta \rightarrow \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0,}$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности

Дифференциальное уравнение примет вид:

$$\boxed{\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0} \qquad (3)$$

Граничные условия

Условия теплоотдачи одинаковы с обеих сторон пластины, поэтому температурное поле симметричное, а тепловыделения в обеих половинах пластины одинаковы, то есть можно рассматривать только ее правую половину. Тогда граничные условия будут:

$$x = 0 \rightarrow \left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=0} = 0; \quad (4)$$

$$x = \delta \rightarrow -\lambda\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\delta} = \alpha(t_c - t \quad).$$

Решение

Интегрируем (3):

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{q_v}{\lambda}x + c_1, \quad (5)$$

разделяем переменные:

$$dt = -\frac{q_v}{\lambda}xdx + c_1dx.$$

Решение

После второго интегрирования:

$$\boxed{t = -\frac{q_v}{2\lambda}x^2 + c_1 x + c_2} \quad (6)$$

.

Константы интегрирования

Константы интегрирования находятся из граничных условий (4) и уравнения (5) при:

$$x=0 \rightarrow c_1 = \left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad (7)$$

$$x=\delta \rightarrow \left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\delta} = -\frac{q_v}{\lambda}\delta \quad (8)$$

Подставляем (8) в (4):

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\delta} = \boxed{-\frac{q_v}{\lambda}\delta = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_{ж} - t).} \quad (9)$$

После сокращения на λ имеем: $t_{ж} = t + \frac{q_v\delta}{\alpha}$ (10)

Подставляем (10) в (6) при $x=\delta$ и с учетом, что $\boxed{c_1 = 0:}$

получаем: $\Longrightarrow$ $t = t_c = -\frac{q_v\delta^2}{2\lambda} + c_2.$ (11)

Приравнивая (10) и (11), имеем: $\frac{q_v\delta}{\alpha} + t_{ж} = -\frac{q_v\delta^2}{2\lambda} + c_2,$, откуда:

$$\boxed{c_2 = t_{ж} + \frac{q_v\delta}{\alpha} + \frac{q_v\delta^2}{2\lambda}.} \quad (12)$$

Частное решение

Подставим константы интегрирования (7) и (12) в (6):

$$\boxed{t = t_{ж} + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v}{2\lambda}(\delta^2 - x^2)} \quad (13)$$

Тепловой поток

По закону Фурье:

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx}$$

Тепловой поток, отдаваемый от правой половины пластины:

$$\boxed{q = q_v \delta, Вт/м^2} \qquad (14)$$

$$Q = q_v V/2 = q_v \delta f = qf,$$

Температуры

Если температура стенки известна или вычислена по уравнению (10), то есть заданы граничные условия I рода:

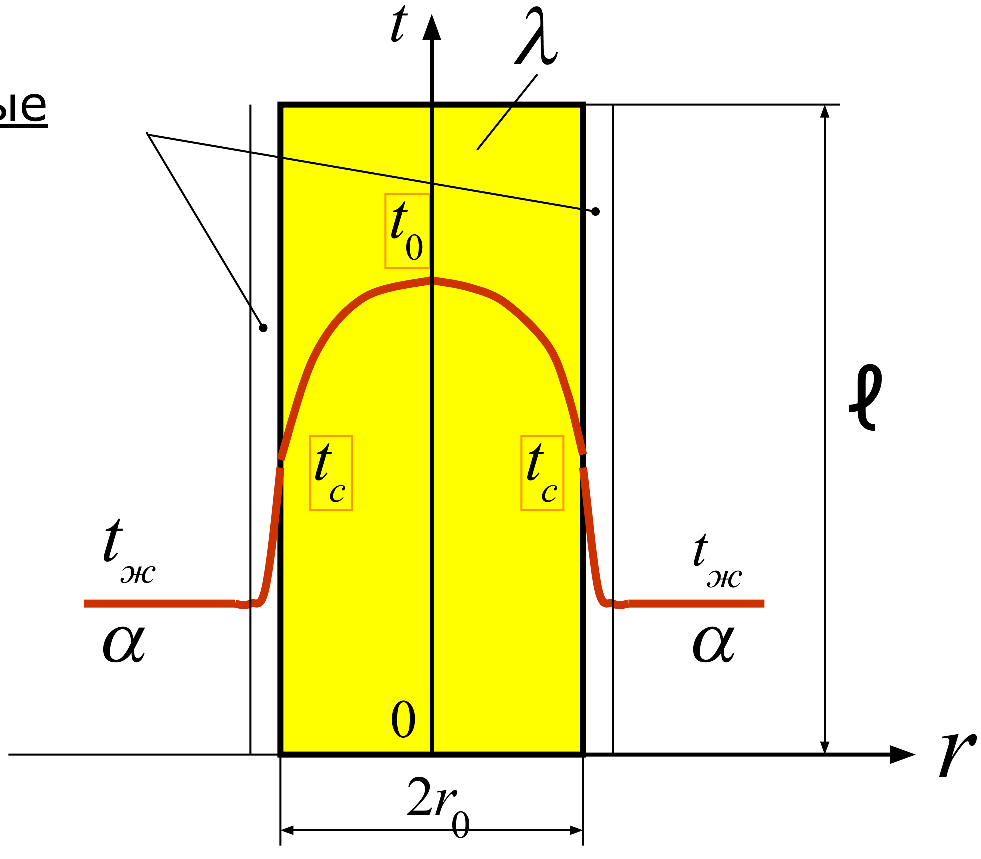
$$t = t_c + \frac{q_v}{2\lambda}(\delta^2 - x^2), \qquad (15)$$

тогда при $x = 0$:

$$t = t_0 = t_c + \frac{q_v}{2\lambda}\delta^2 = t_c + \frac{q\delta}{2\lambda}$$

Однородный цилиндр

Пограничные
слои



Дифференциальное уравнение теплопроводности для цилиндра

Для бесконечного цилиндрического стержня $\ell >> 2r_0$

При стационарном режиме $q_{ж} = Const; \alpha = Const; t = Const.$

Найти $t = f(r); t_0; t_c$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}.$$

Для стационарного процесса: $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0,$

тогда:

$$a\nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho} = 0, \qquad (2)$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности для цилиндра

Оператор Лапласа в полярных (цилиндрических) координатах:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}. \qquad (3)$$

В бесконечном цилиндре температура изменяется только по по радиусу, то есть:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0,$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности для цилиндра

После деления на: $a = \frac{\lambda}{c\rho}$

получим дифференциальное уравнение теплопроводности для цилиндра при стационарном режиме:

$$\boxed{\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dt}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0} \quad (4)$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности для цилиндра

Граничные условия:

$$r=0 \rightarrow \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=0}=0;$$

$$r=r_0 \rightarrow \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_0}=-\frac{\alpha}{\lambda}(t_c-t\quad). \qquad (5)$$

Решение

Найти: $t = f(r); t_0; t_c$

$$U = \frac{dt}{dr} \Rightarrow \qquad \frac{dU}{dr} + \frac{1}{r}U + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

$$rdU + Udr + \frac{q_v}{\lambda} rdr = 0$$

Решение

Обозначим: $V = Ur \Rightarrow dV = rdU + UdV$

тогда

$$\int dV + \frac{q_v}{\lambda}\int rdr = 0 \Rightarrow \qquad V = -\frac{q_v}{\lambda}\frac{r^2}{2}$$

$$r\frac{dt}{dr} = -\frac{q_v}{\lambda}\frac{r^2}{2} + C_1$$

Общее решение

$$\int dt = -\frac{q_v}{2\lambda}\int r dr + C_1 \int \frac{dr}{r}$$

$$\boxed{t = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2}$$

Частное решение

Подчиним граничным условиям:

$$-\left.\frac{q_v 2r}{4\lambda}\right|_{r=0} + C_1 \left.\frac{1}{r}\right|_{r=0} = 0$$

$$\left.\frac{q_v 2r}{4}\right|_{r=r_0} - \lambda C_2 = \alpha\left(-\frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_2 - t_{ж}\right)$$

Частное решение

Тогда:

$$\frac{q_v r_0}{2} = -\frac{\alpha q_v r_0^2}{4\lambda} + C_2\alpha - t_{ж}\alpha$$

$$C_2 = \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{\alpha q_v r_0^2}{4\lambda\alpha} + t_{ж}$$

Частное решение

Тогда:

$$\boxed{t = -\frac{q_v}{4\lambda} r^2 + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} + t_{ж}}$$

Частное решение

Температура на оси цилиндра :

$$t(0) = t_{жс} + \frac{q_v r_0}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{r_0}{2\lambda}\right)$$

Температура на поверхности цилиндра :

$$t(r_0) = t_{жс} + \frac{q_v r_0}{2\alpha}$$

Тепловой поток

По закону Фурье: $q = -\lambda \frac{dt}{dr}$

$$\boxed{q(r) = \frac{q_v 2r}{4} = \frac{q_v r}{2}}$$

$$\boxed{q(r_0) = \frac{q_v r_0}{2}}$$

Тепловой поток

Полный тепловой поток:

$$Q = qF = \frac{q_v r_0}{2} 2\pi r_0 \ell =$$

$$= q_v \pi r_0^2 \ell$$

Цилиндрическая стенка

Дифференциальное уравнение теплопроводности для цилиндра при стационарном режиме:

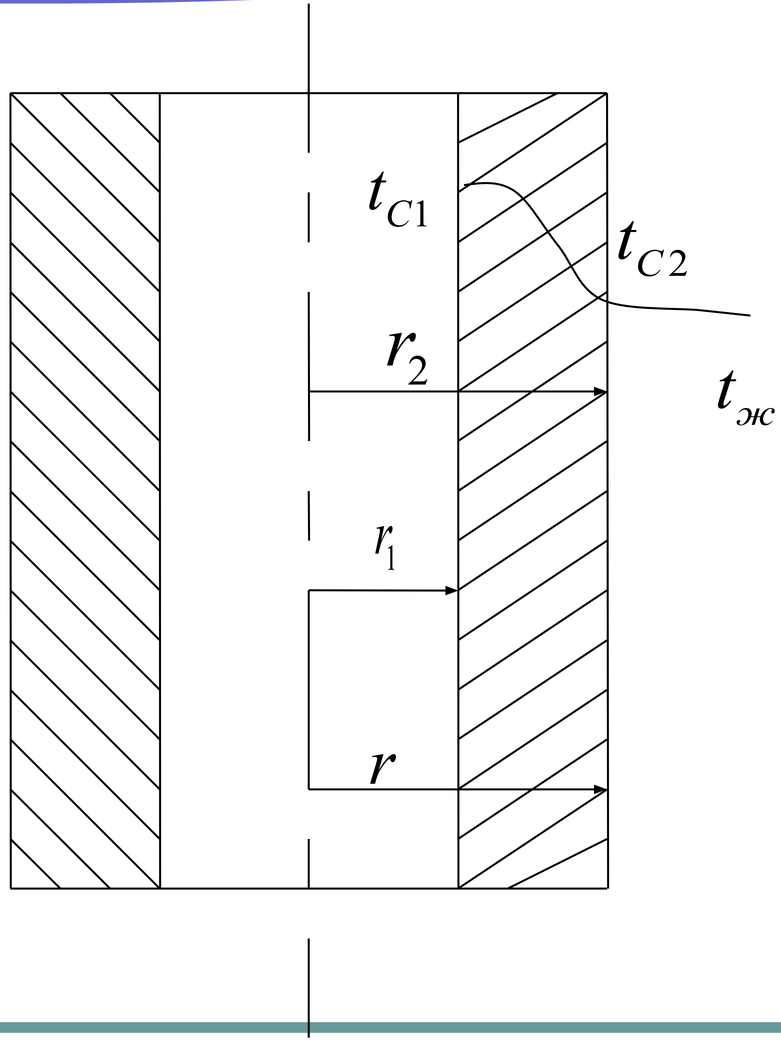
$$\boxed{\frac{d^2t}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dt}{dr}+\frac{q_v}{\lambda}=0}$$

Общее решение

$$\boxed{t=-\frac{q_v r^2}{4\lambda}+C_1\ln r+C_2} \quad (1)$$

Теплообмен только на внешней поверхности

Расчетная схема



Теплообмен только на внешней поверхности

Граничные условия:

$$\left.\frac{dt}{dr}\right|_{r=r_1} = 0,$$

$$-\left.\frac{dt}{dr}\right|_{r=r_2} = \frac{\alpha}{\lambda}\left(t_{c2} - t_{ж2}\right)$$

Теплообмен только на внешней поверхности

Найдем константы

$$\frac{dt}{dr} = C_1 \frac{1}{r} - \frac{q_V r}{2\lambda},$$

$$C_1 \frac{1}{r_1} - \frac{q_V r_1}{2\lambda} = 0 \Rightarrow \qquad C_1 = -\frac{q_V r^2{}_1}{2\lambda},$$

Теплообмен только на внешней поверхности

Температура на внешней поверхности:

$$t_{c2} = -\frac{q_V r^2_{\ 2}}{4\lambda} + \frac{q_V r^2_{\ 1}}{2\lambda} \ln r_2 + c_2$$

Из второго граничного условия:

$$-\frac{q_V r_2}{2\lambda} + \frac{q_V r_1^2}{2\lambda r_2} = -\frac{\alpha}{\lambda}\left(t_{c2} - t_{ж2}\right) \Rightarrow$$

$$t_{c2} = t_{ж2} + \frac{q_V r_2}{2\alpha} - \frac{q_V r_1^2}{2\alpha r_2}$$

Теплообмен только на внешней поверхности

Избавимся от неизвестной температуры на внешней поверхности, приравняв правые части уравнений, и найдем вторую константу:

$$-\frac{q_V r^2{}_2}{4\lambda}+\frac{q_V r^2{}_1}{2\lambda}\ln r_2+c_2=t_{жс2}+\frac{q_V r_2}{2\alpha}-\frac{q_V r_1^2}{2\alpha r_2}=$$

$$c_2=t_{жс2}+\frac{q_V r_2}{2\alpha}-\frac{q_V r_1^2}{2\alpha r_2}+\frac{q_V r^2{}_2}{4\lambda}-\frac{q_V r^2{}_1}{2\lambda}\ln r_2$$

Теплообмен только на внешней поверхности

Частное решение:

$$t = t_{ж_2} + \frac{q_V r_2}{2\alpha}\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] + \frac{q_V {r_2}^2}{4\lambda}\left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 2\ln\frac{r}{r_2} - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right]$$

Теплообмен только на внешней поверхности

Температура на внешней поверхности:

$$t_{c2} = t_{ж_2} + \frac{q_V r_2}{2\alpha}\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]$$

Теплообмен только на внешней поверхности

Плотность теплового потока на внешней поверхности:

$$q = \alpha \left(t_{c_2} - t_{ж_2} \right) = \frac{q_V r_2}{2} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]$$

Теплообмен только на внешней поверхности

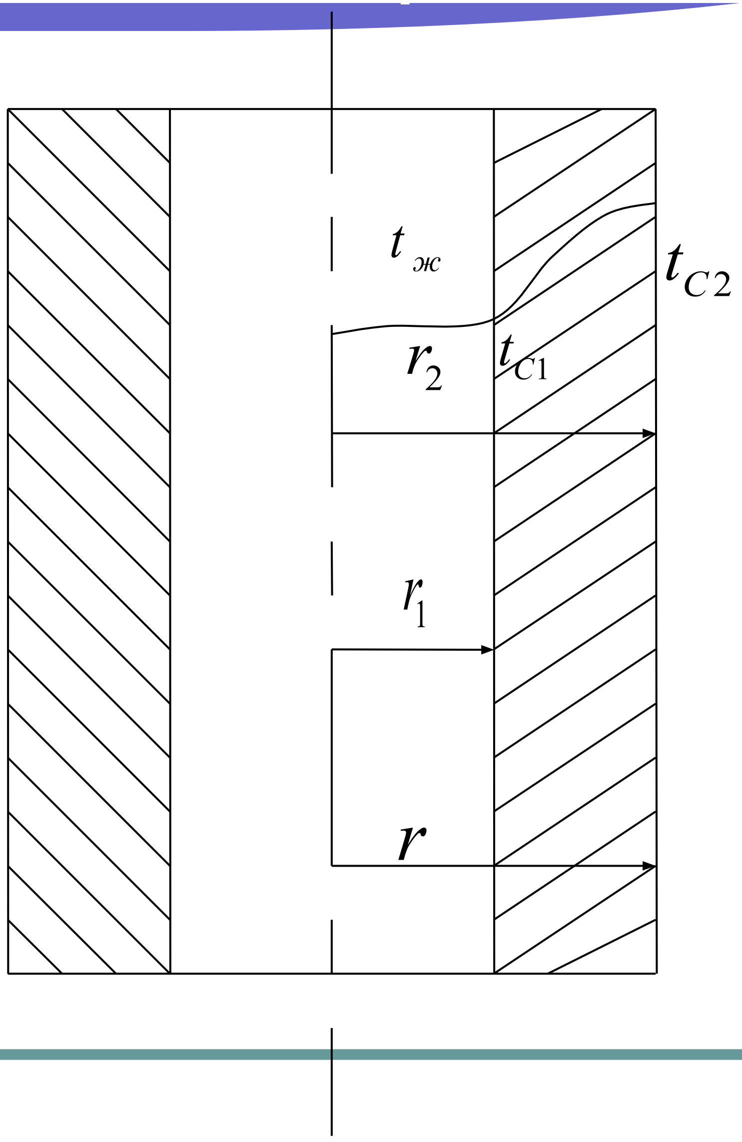
Температура на внутренней поверхности:

$$t_{c1} = t_{жс_2} + \frac{q_V r_2}{2\alpha}\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] +$$

$$+ \frac{q_V r_2{}^2}{4\lambda}\left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 2\ln\frac{r_1}{r_2} - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]$$

Теплообмен только на внутренней поверхности

Расчетная схема:



Теплообмен только на внутренней поверхности

Граничные условия:

$$\left.\frac{dt}{dr}\right|_{r=r_2} = 0,$$

$$\left.\frac{dt}{dr}\right|_{r=r_1} = \frac{\alpha}{\lambda}\left(t_{c1} - t_{ж1}\right)$$

Теплообмен только на внутренней поверхности

Найдя константы, получим частное решение:

$$\boxed{t = t_{ж1} + \frac{q_V r_1}{2\alpha}\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1\right] + + \frac{q_V r_2^{\,2}}{4\lambda}\left[2\ln\frac{r}{r_1} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right]}$$

Теплообмен на внутренней и наружной поверхности

В этом случае существует максимум температуры внутри стенки при $r = r_0 \Rightarrow \dfrac{dt}{dr} = 0,$

т.е. здесь тепловой поток равен нулю (тепловая изоляция). Таким образом, можно использовать полученные ранее решения. Задача сводится к отысканию значения $r = r_0$.

В одном случае следует подставить $r_1 = r_0$, в другом $r_2 = r_0$

Теплообмен на внутренней и наружной поверхности

Находим r_0 :

$$t_0 - t_{c2} = \frac{q_V r_0^{\,2}}{4\lambda}\left[\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2 - 2\ln\frac{r_2}{r_0} - 1\right];$$

$$t_0 - t_{c1} = \frac{q_V r_0^{\,2}}{4\lambda}\left[\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 - 2\ln\frac{r_0}{r_1} - 1\right];$$

Теплообмен на внутренней и наружной поверхности

Вычитаем из первого уравнения второе:

$$t_{c1} - t_{c2} =$$

$$= \frac{q_V r_0^{\ 2}}{4\lambda}\left[\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 + 2\ln\frac{r_0}{r_2} - 2\ln\frac{r_0}{r_1}\right];$$

Теплообмен на внутренней и наружной поверхности

Найдем r_0 :

$$r_0^{\,2} = \frac{q_V\left(r_{2c}^{\,2} - r_1^{\,2}\right) - 4\lambda\left(t_1 - t_2\right)}{q_V\, 2\ln\dfrac{r_2}{r_1}}$$

Теплообмен на внутренней и наружной поверхности

Зная r_0 , легко находим распределение температуры во внутреннем и наружном слое по соответствующим формулам.

Вопросы к экзамену

1. Стационарная теплопроводность в однородной пластине при наличии внутренних источников теплоты.
2. Стационарная теплопроводность в однородном цилиндрическом стержне при наличии внутренних источников теплоты.
3. Стационарная теплопроводность в цилиндрической стенке при наличии внутренних источников теплоты (теплота отводится только через внутреннюю поверхность).
4. Стационарная теплопроводность в цилиндрической стенке при наличии внутренних источников теплоты (теплота отводится только через внешнюю поверхность).