Фундаментальные циклы

(продолжение)

Структуры данных

- Граф задаем матрицей смежности.
- Для отметки проходимых вершин используем массив Chk[N].
- Для хранения проходимых вершин используем стек.

Алгоритм обхода в глубину

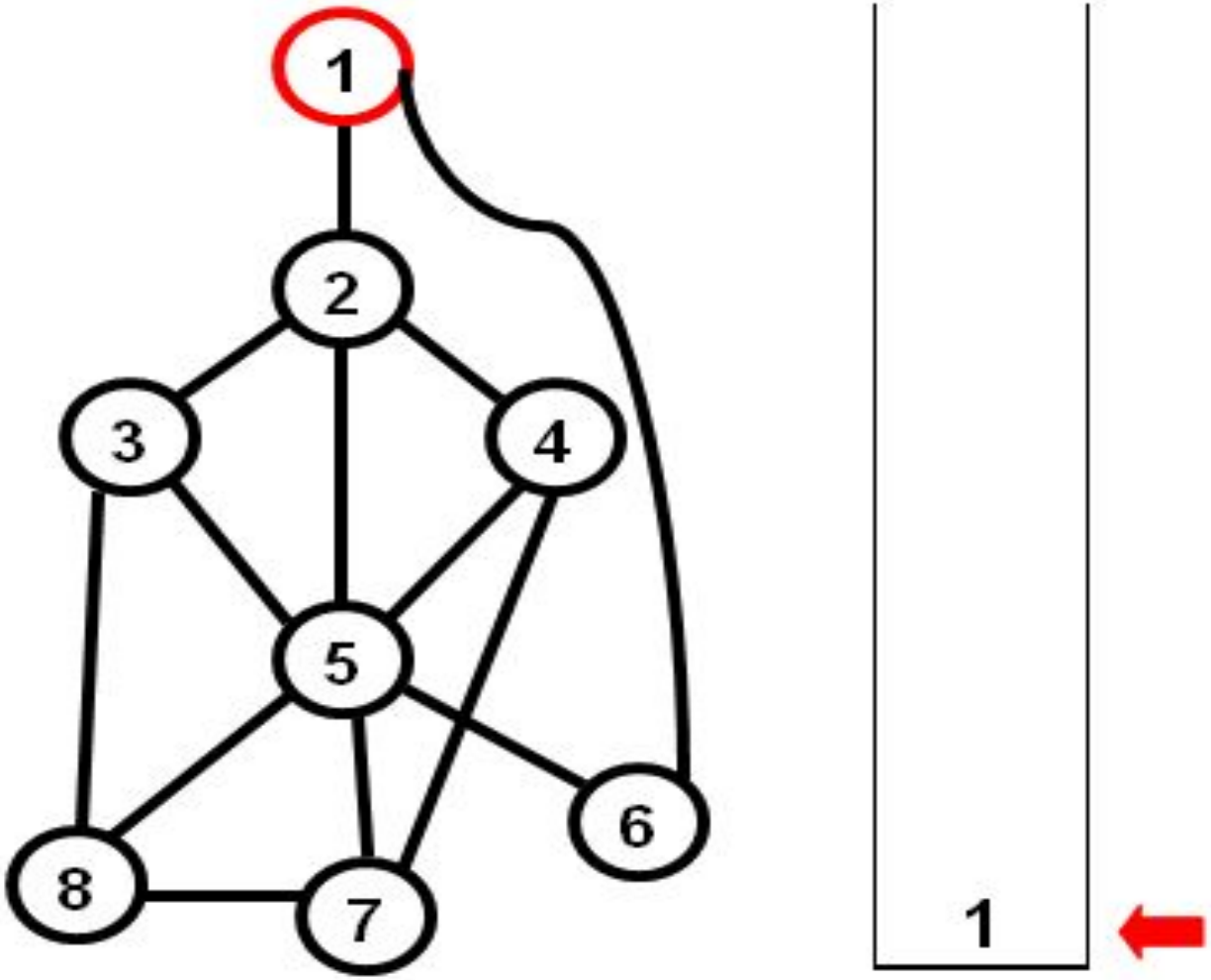
1) Берем произвольную начальную вершину, и заносим ее в стек;

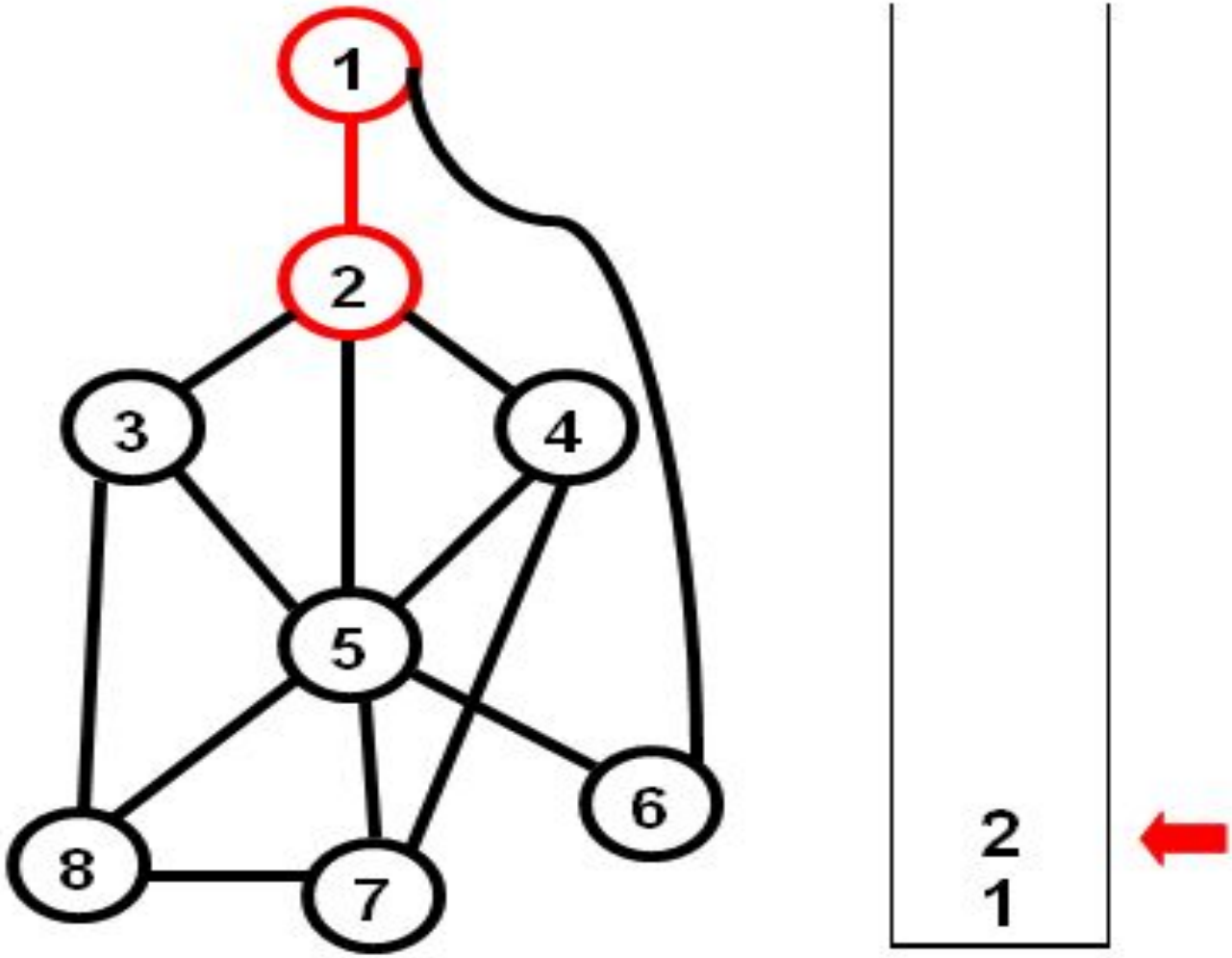
2) Стек пуст? Если ДА – конец;

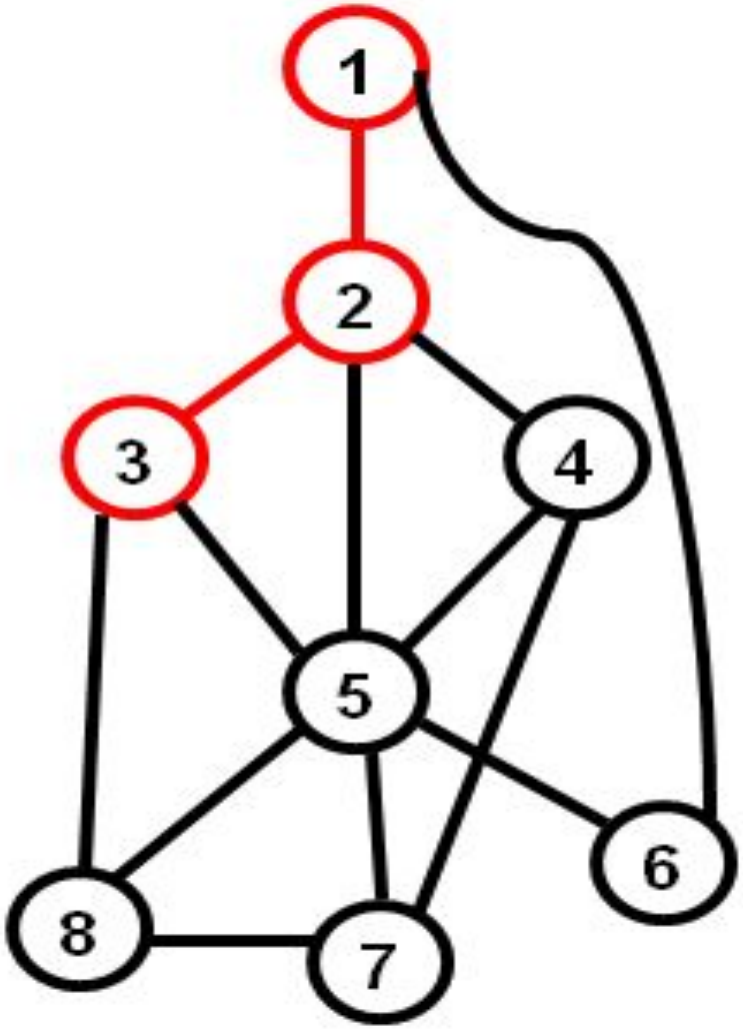
3) Берем вершину Z из стека;

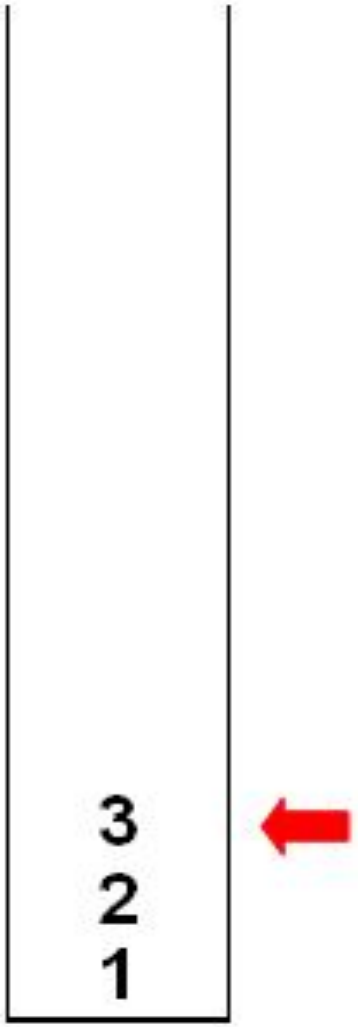
4) Если есть вершина Q, связанная с Z и не отмеченная, то возвращаем Z в стек, заносим в стек Q, печатаем ребро (Z,Q);

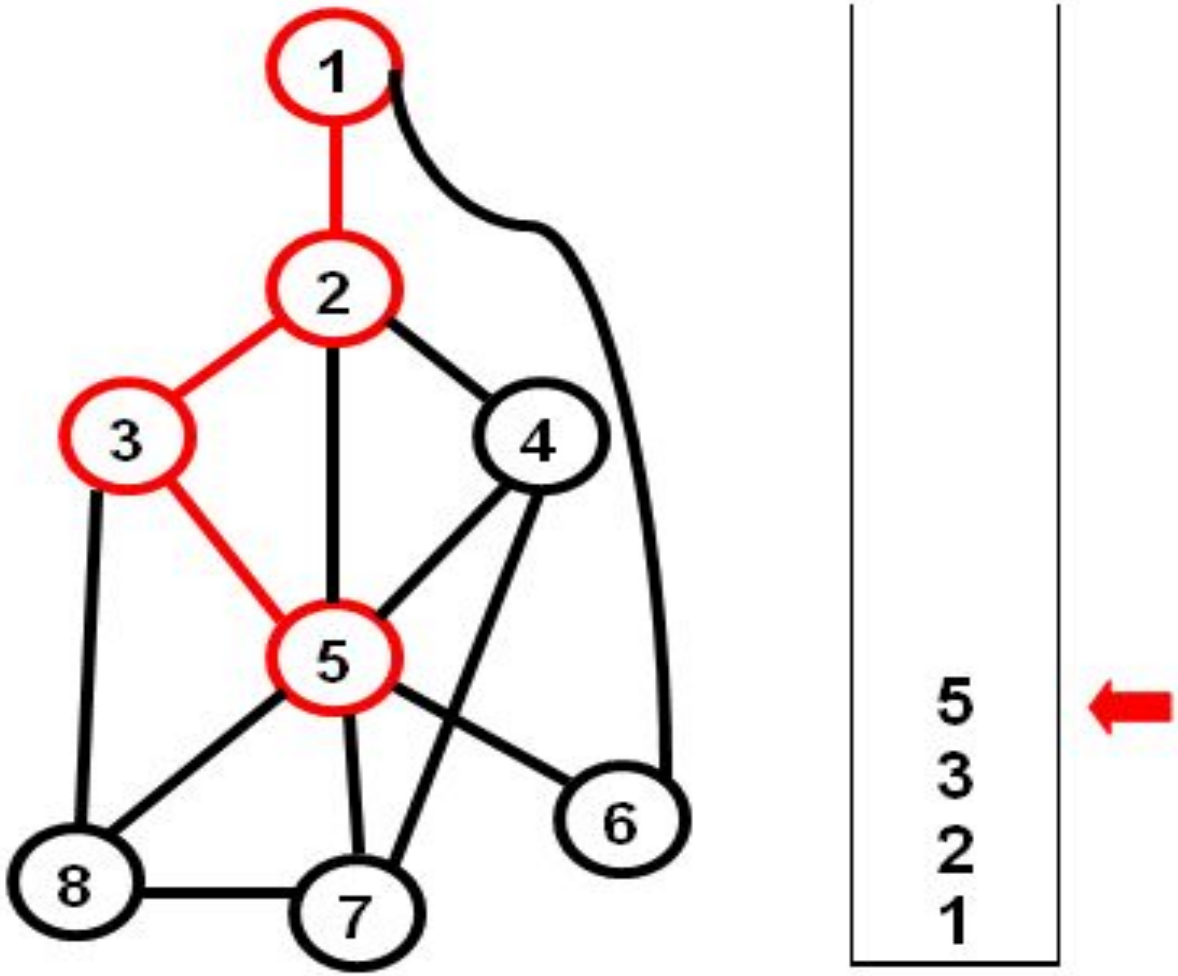
5) Переходим к п.2

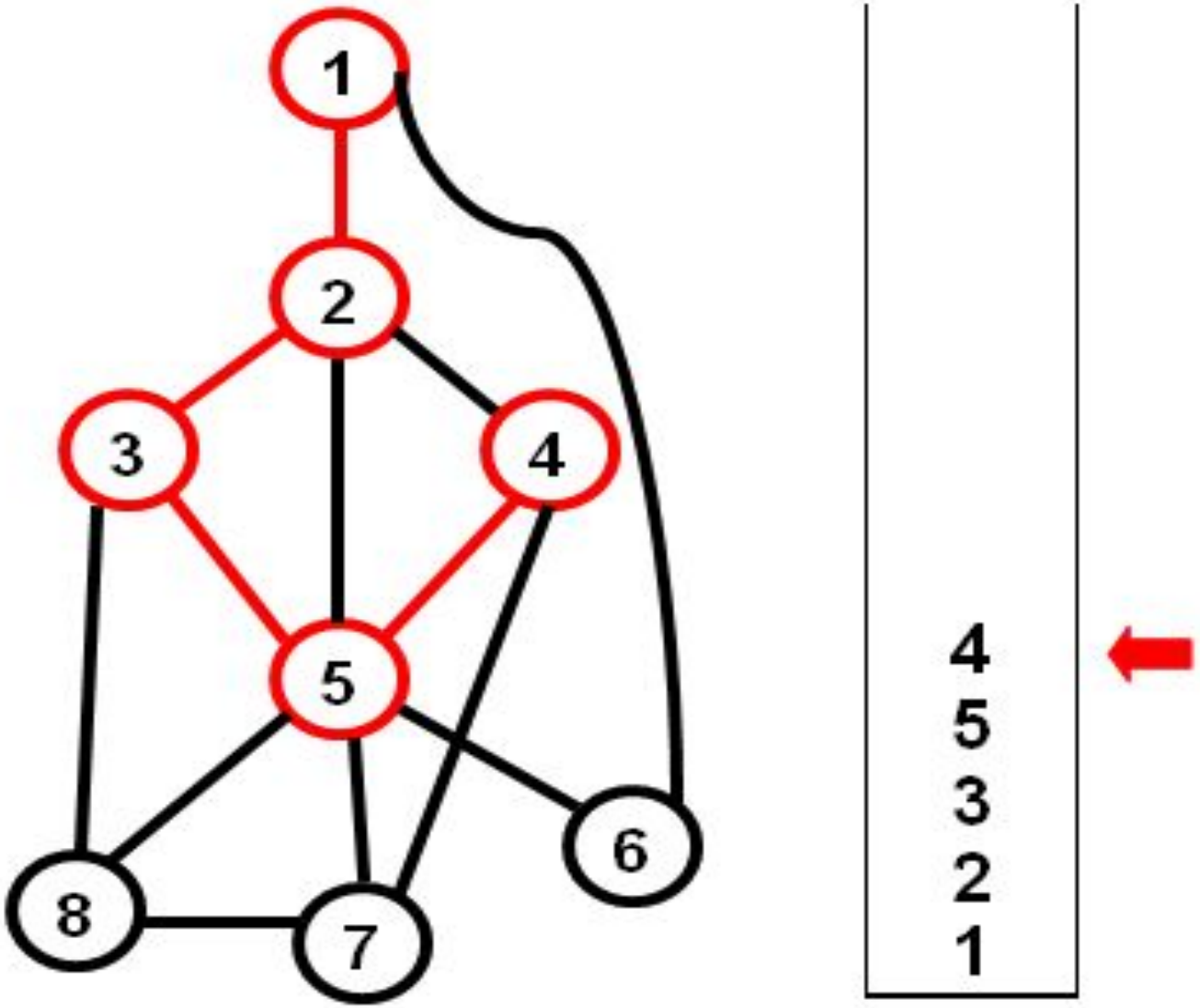

1
2
3
4
5
6
8
7
1

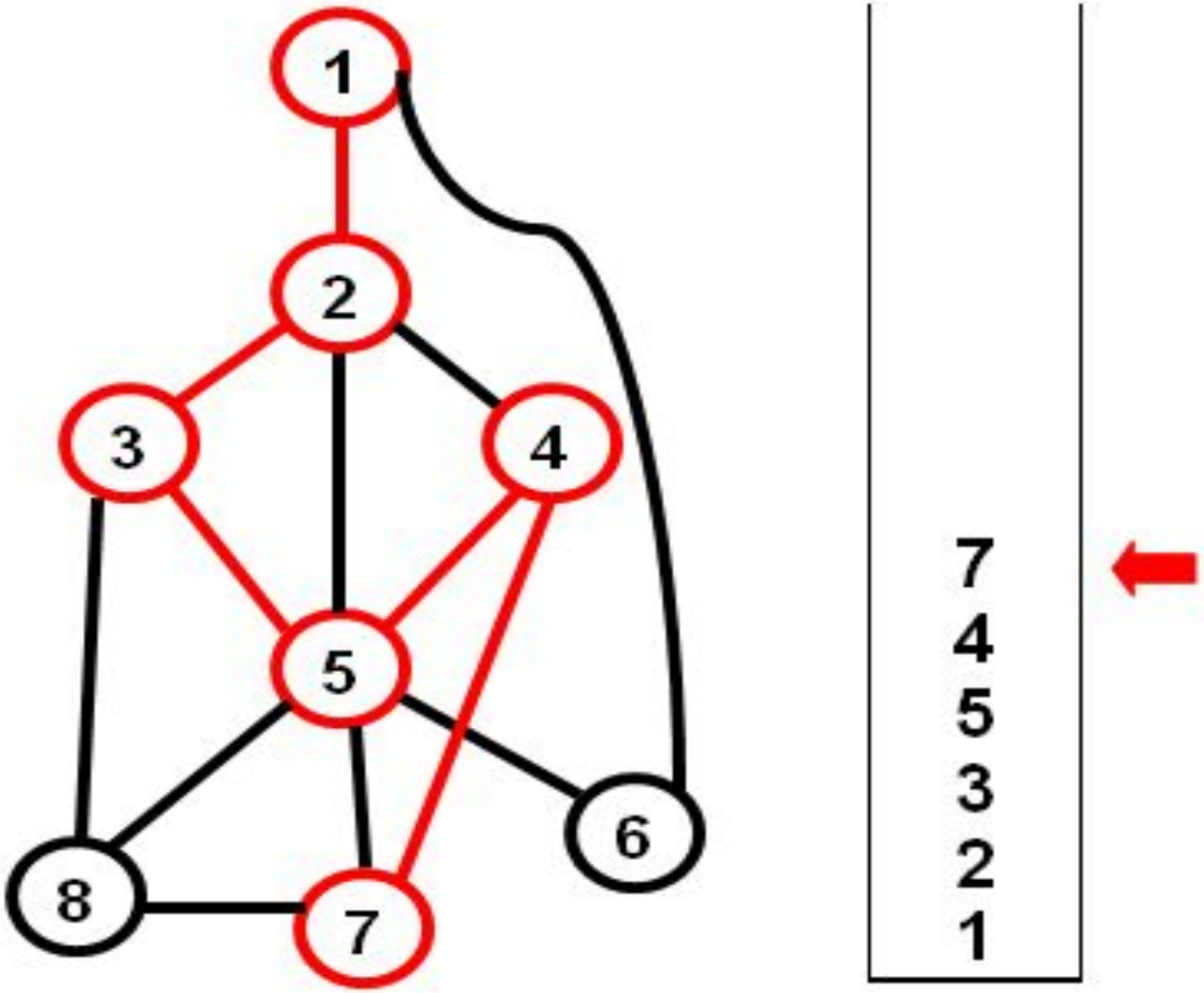

1
2
3
4
5
6
8
7
2
1

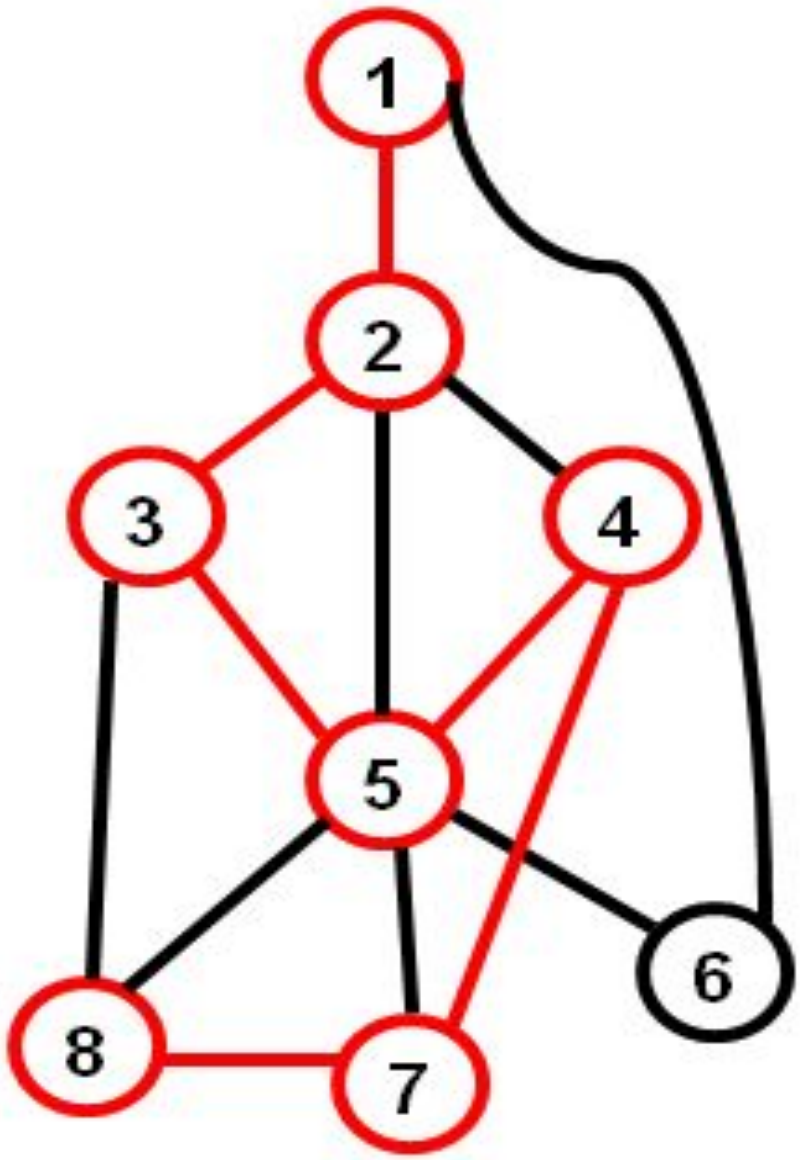

1
2
3
4
5
6
8
7

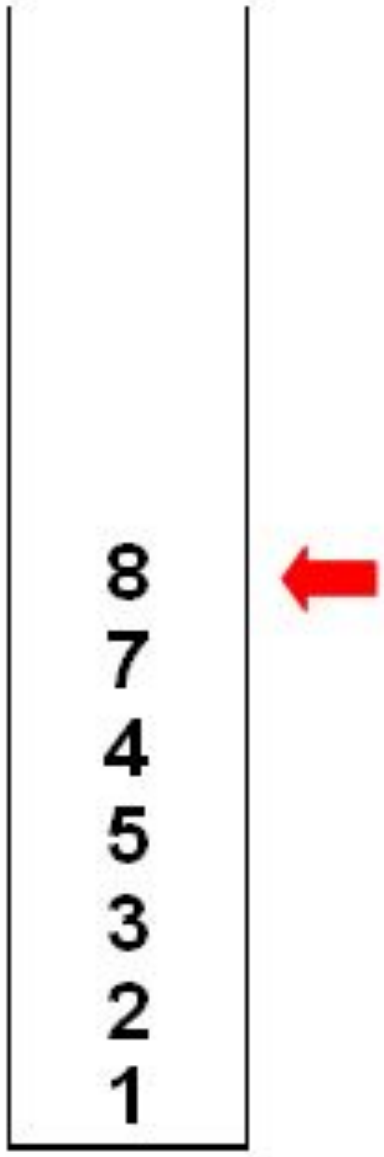

3
2
1

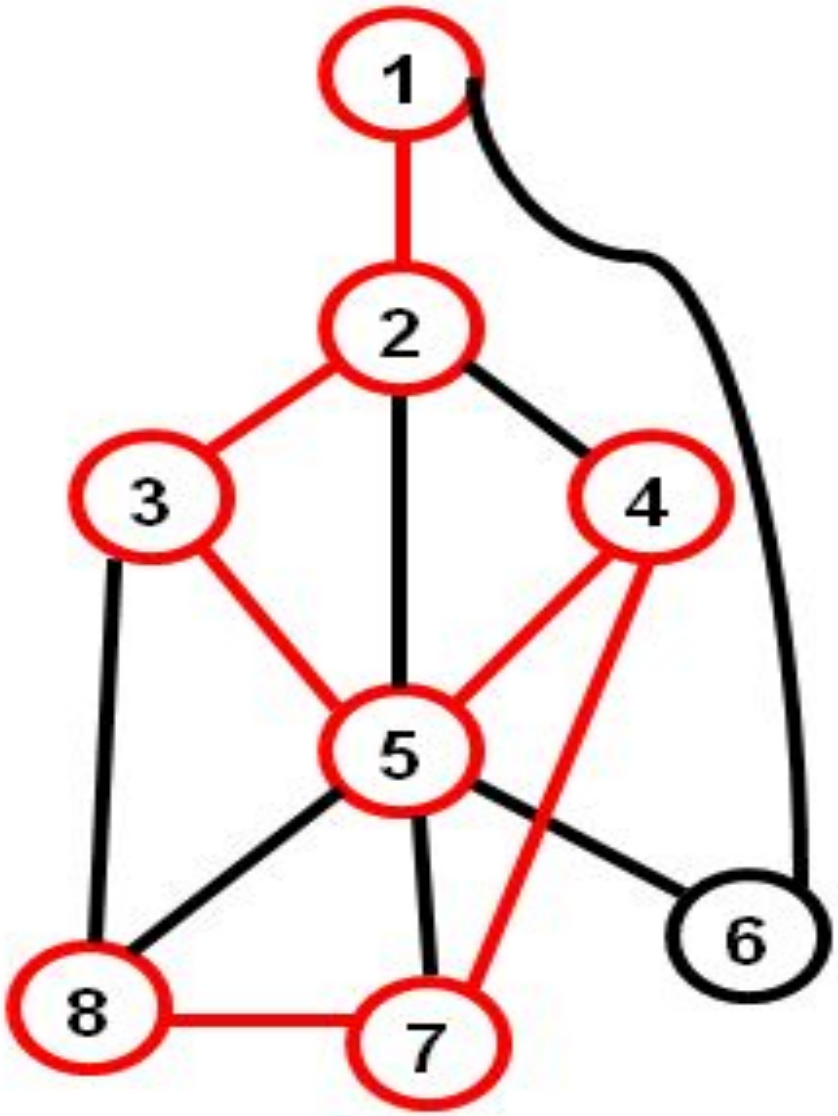

1
2
3
4
5
6
7
8
5
3
2
1

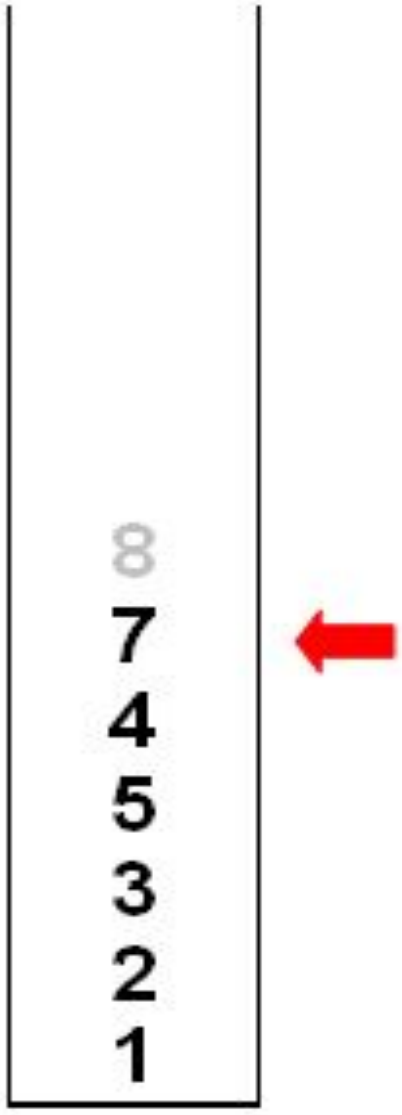

1
2
3
4
5
6
8
7
4
5
3
2
1

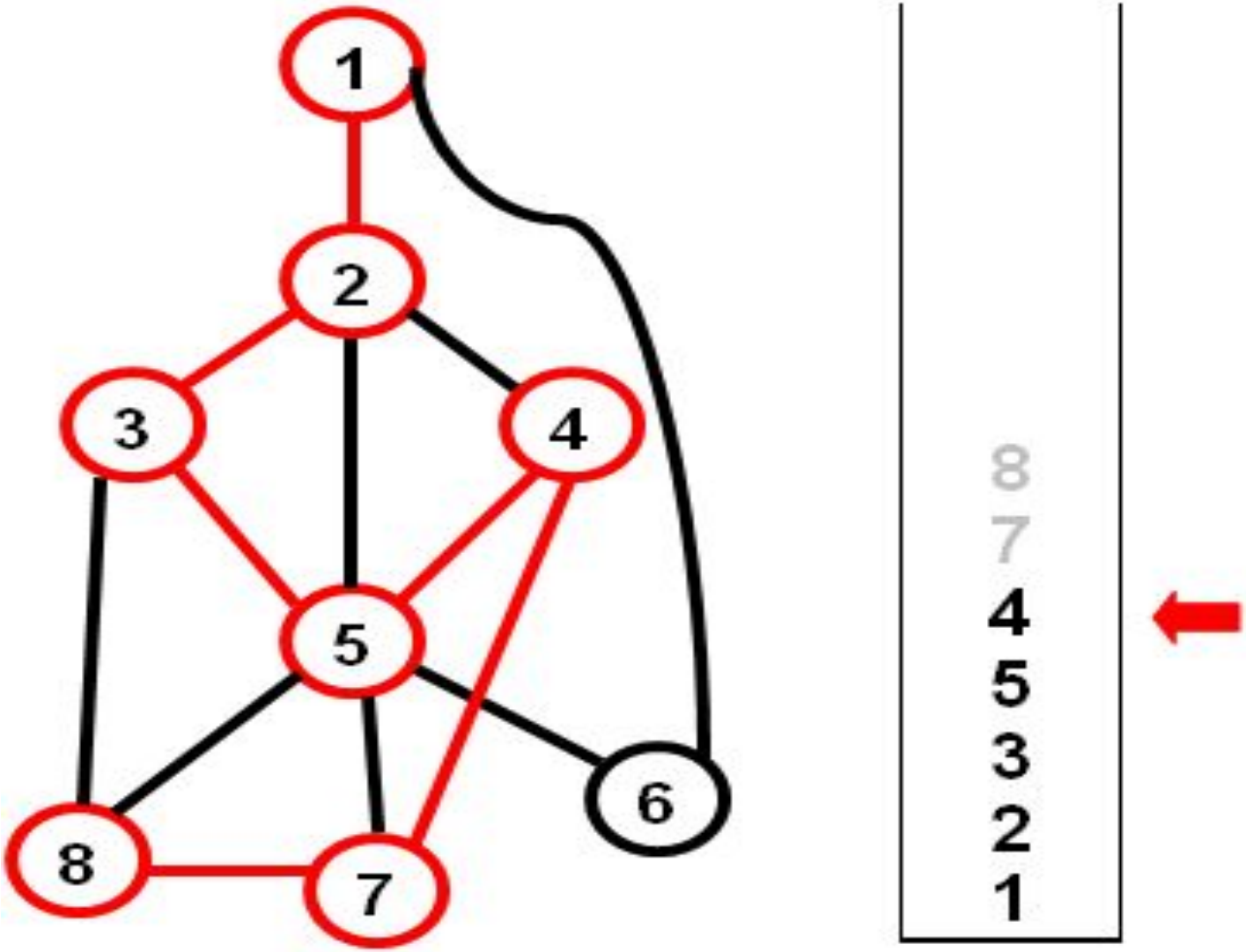

1
2
3
4
5
6
7
8
7
4
5
3
2
1

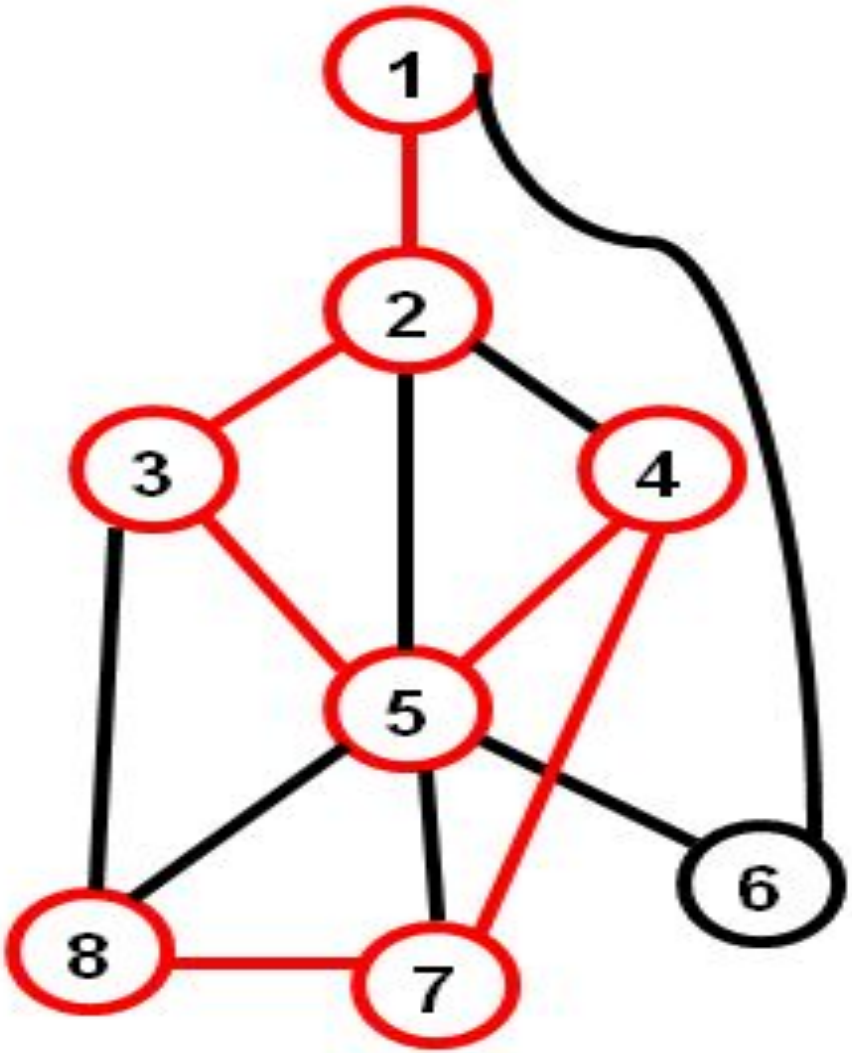

1
2
3
4
5
6
8
7


8
7
4
5
3
2
1

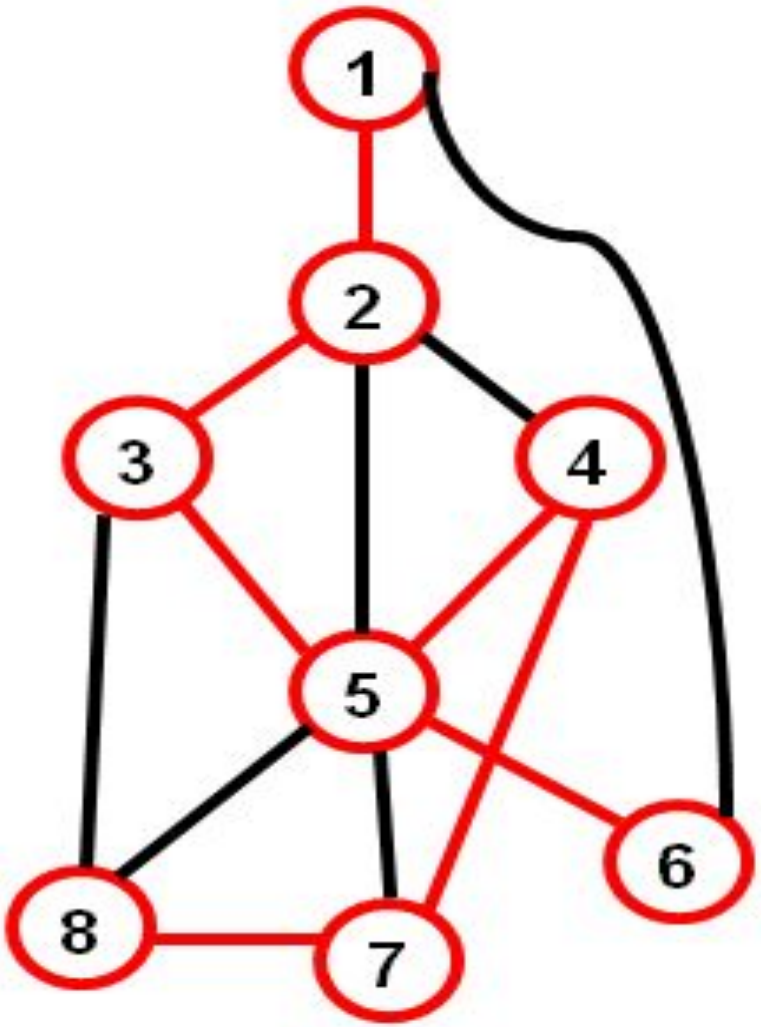

1
2
3
4
5
6
8
7

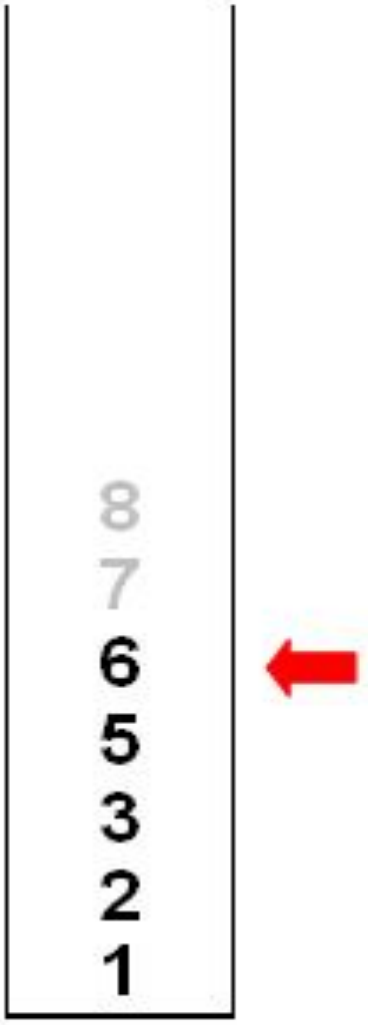

8
7
4
5
3
2
1


1
2
3
4
5
6
7
8
8
7
4
5
3
2
1

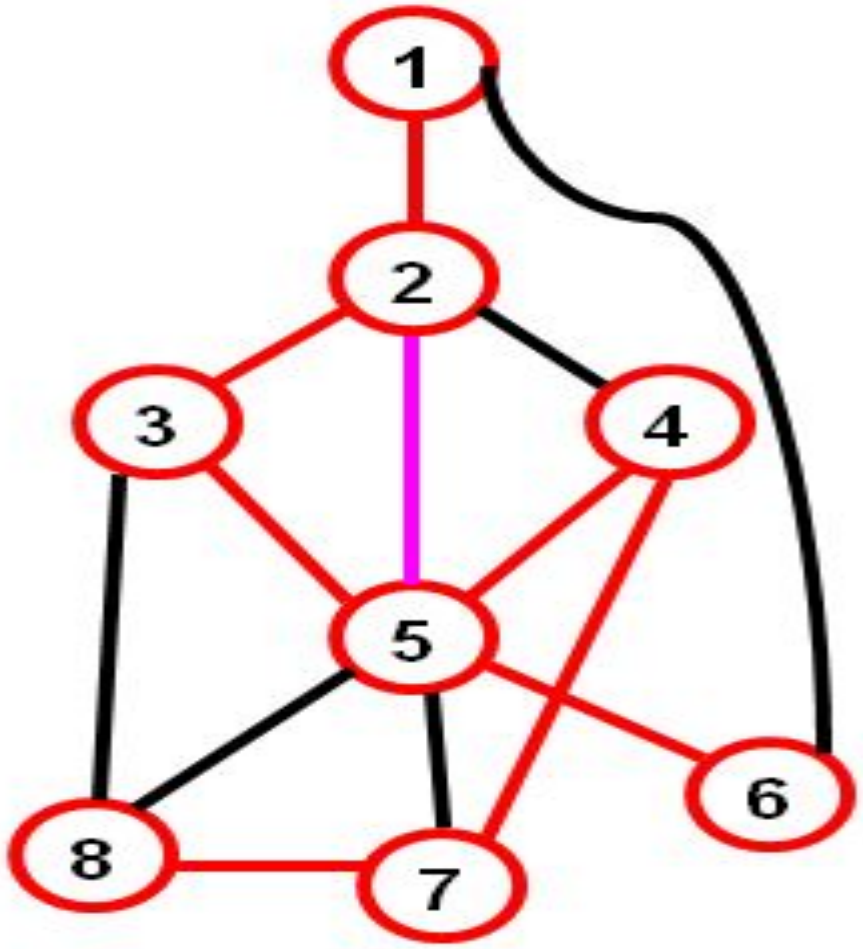

1
2
3
4
5
6
8
7


8
7
4
5
3
2
1



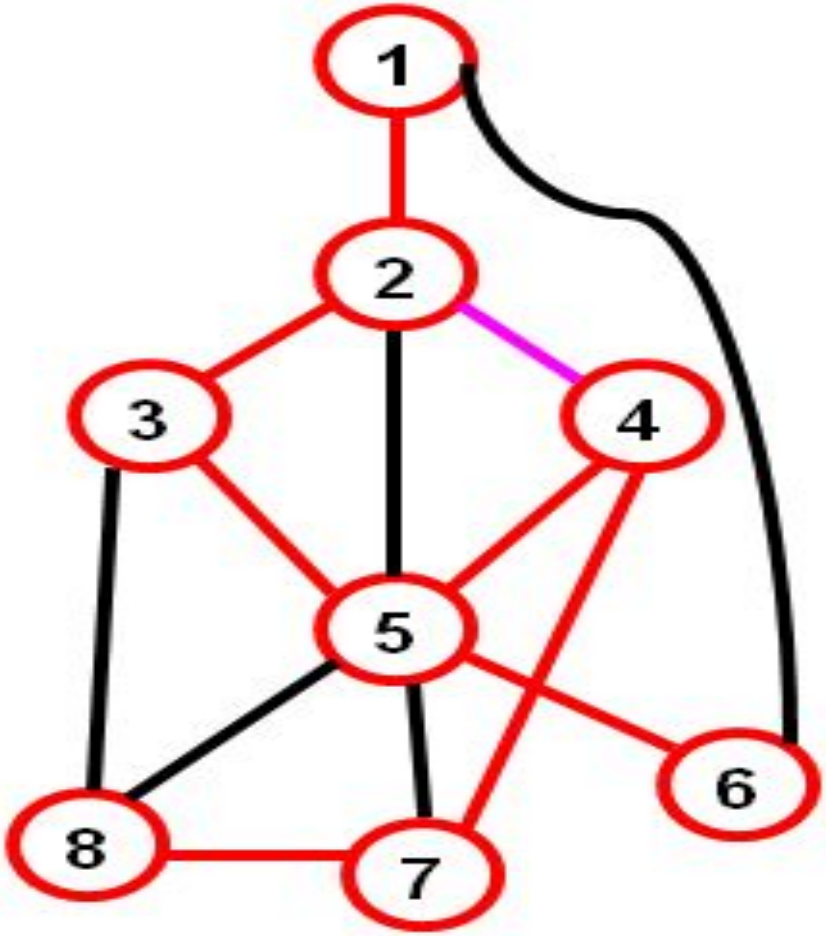


Что дальше? Все вершины пройдены – мы получили каркас. 6 ребер не входят в каркас. Сколько будет фундаментальных циклов?



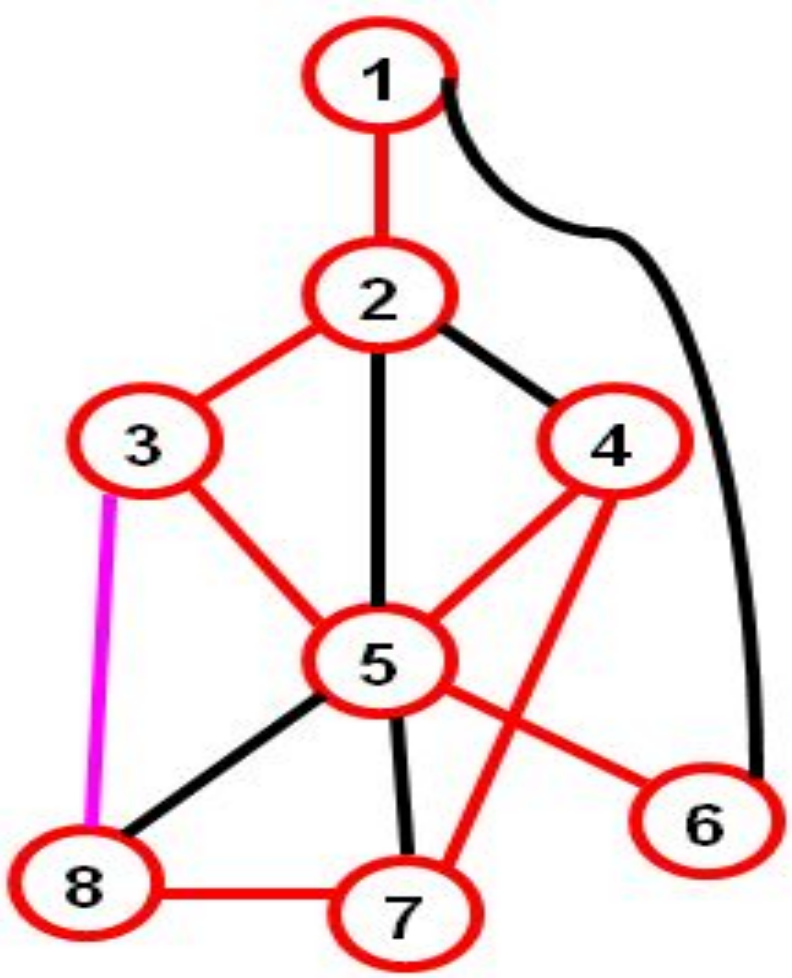
Добавим ребро (2-5) – получим цикл {2-3-5}

(только ОДИН!)

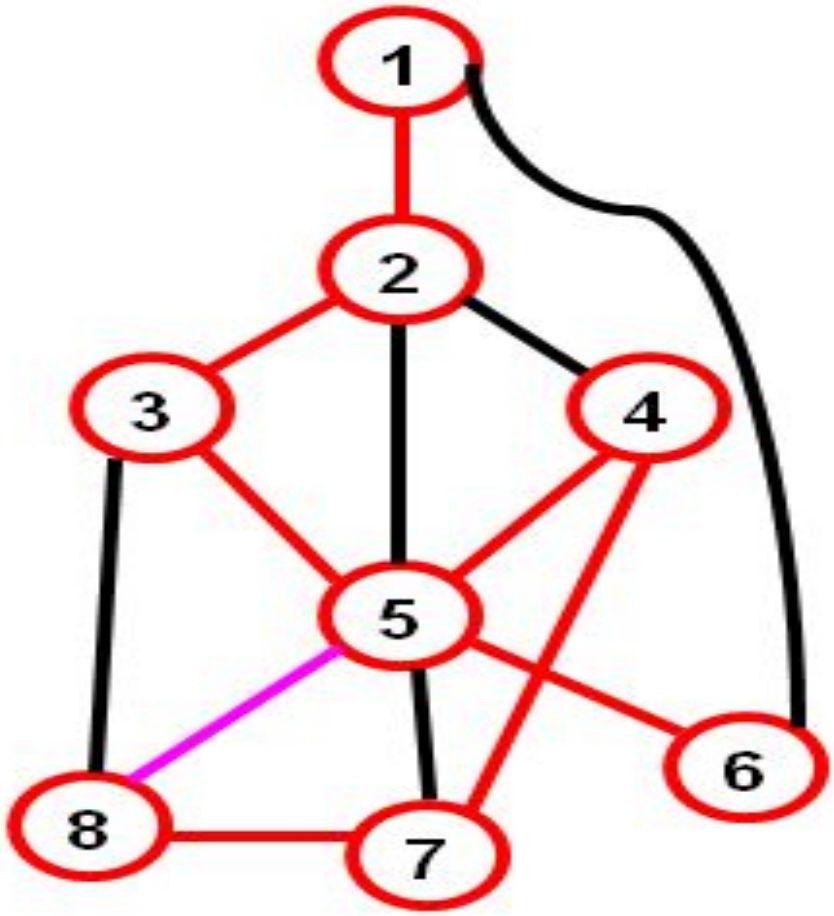


Добавим ребро (2-4); получим цикл… Какой?

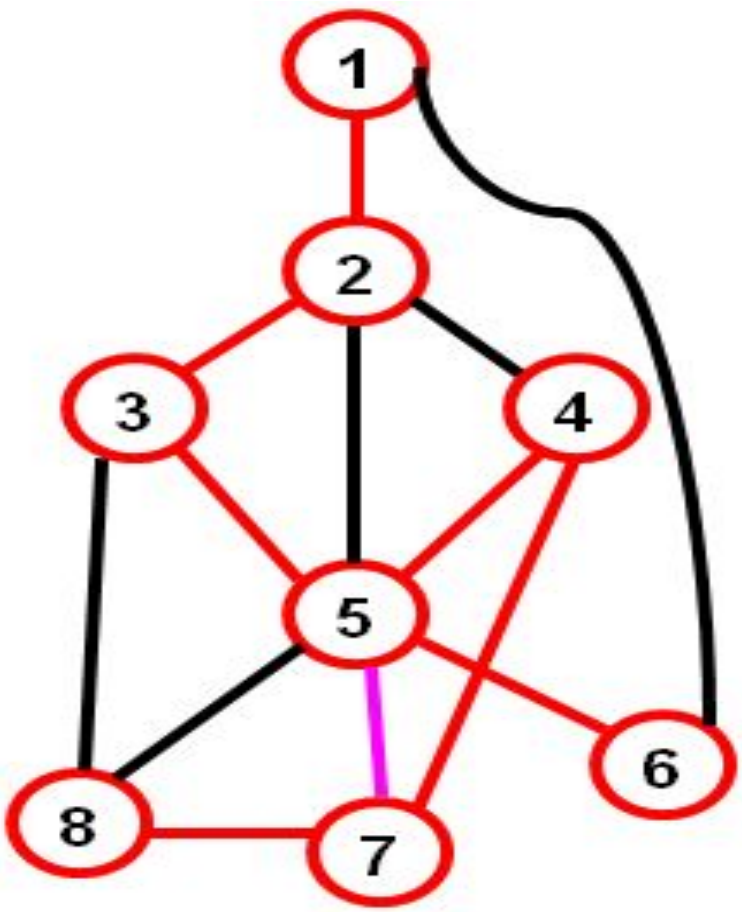
Конечно, {2-4-5-3}



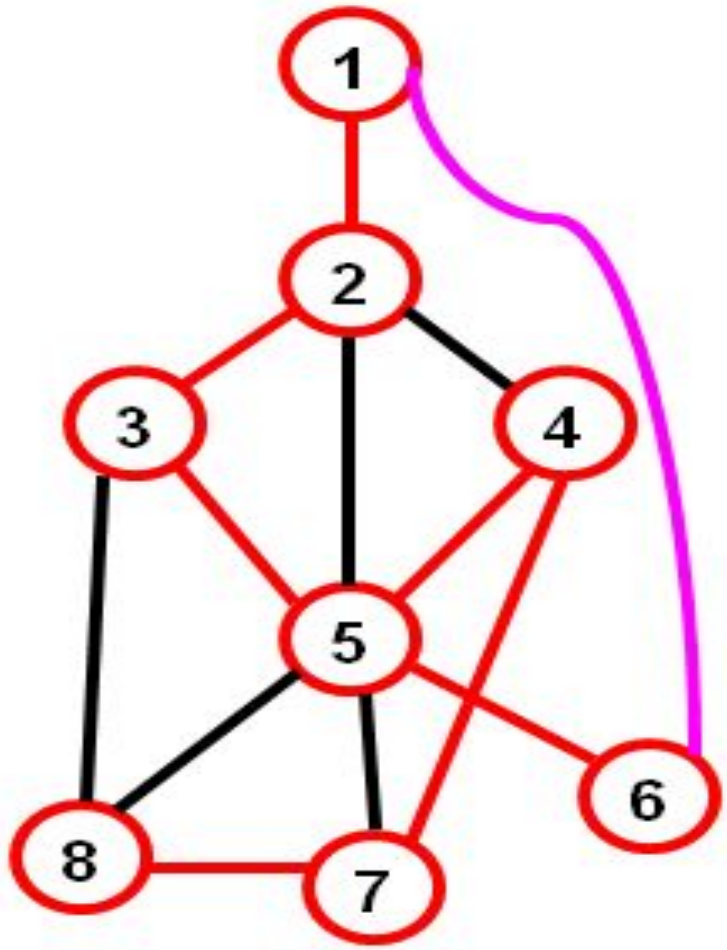
Добавим ребро (3-8) – получим цикл {3-5-4-7-8}



Добавим ребро (8-5) – получим цикл {5-4-7-8}



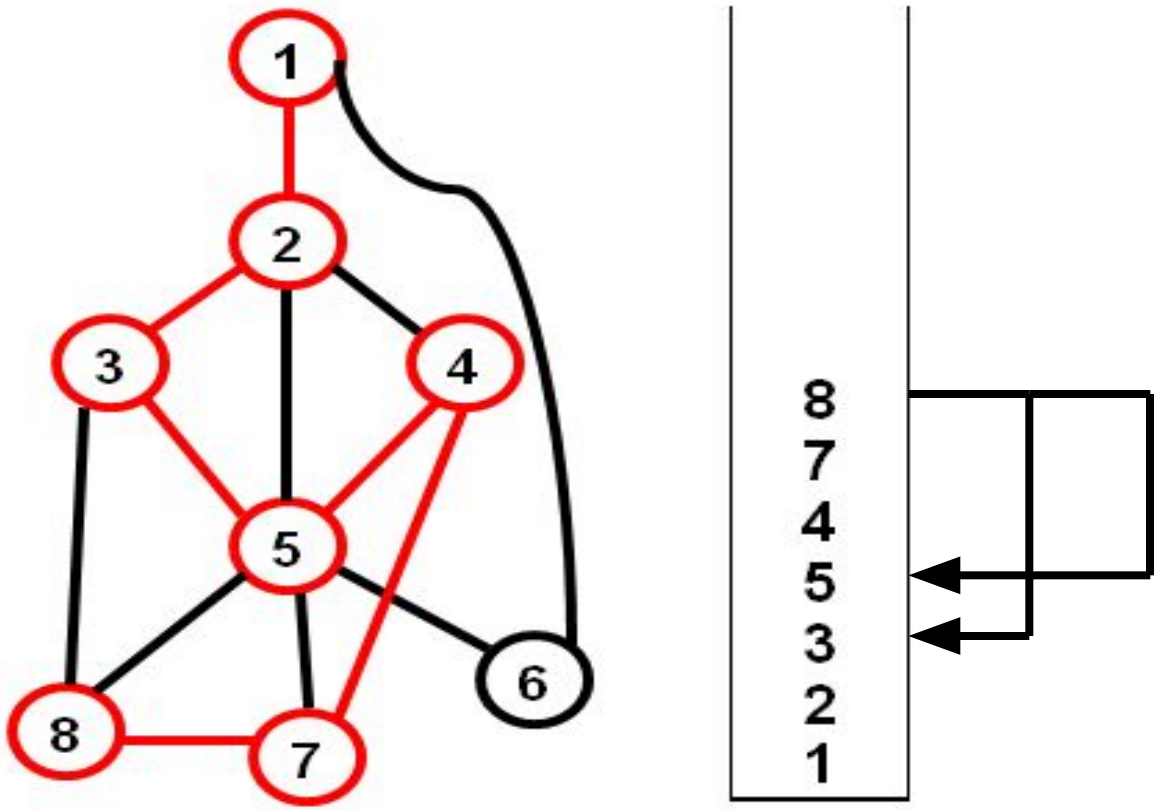
Добавим ребро (5-7) – получим цикл {4-5-7}



Добавим ребро (1-6) – получим цикл {1-2-3-5-6}

Как программно построить фундаментальные циклы?

Посмотрим на состояние стека:



Для каждой вершины в стеке ниже расположены ее предки. Можно проанализировать наличие циклов от вершины стека ко всем предкам.

Алгоритм генерации циклов параллельно с поиском в глубину

Добавив в стек очередную вершину Z, нужно пройтись по стеку от вершины к началу, проверяя (по матрице смежности) нет ли в графе ребра (Z,C).

(C – вершина в стеке, расположенная ниже Z.)

Если ребро есть –

печатаем отрезок стека от Z до C.

Правда, есть одна тонкость. Какая?

Просмотр стека нужно начинать с вершины, лежащей на 2 позиции ниже вершины.

Почему?

Потому, что одной позицией ниже расположен непосредственный предшественник вершины. Этот узел всегда связан с вершиной, но ребро связи уже пройдено.

Программная реализация построения фундаментального множества циклов

```
void DFS()  // Обход в глубину с выводом фунд. циклов
{
  int j,Z;
  Push(1);  // стартовую вершину -> в стек
  while (1)  // Главный цикл
  {
    if (isEmptyS()) break;  // Стек пуст - выход
    Z=Pop();                // Берем вершину Z из стека
    for (j=1; j <= gN; j++)  // Цикл по всем вершинам
        if (isBound(Z,j))    // Вершина связана с текущей (Z)…
          if (Chk[j] == 0)   // и еще не посещалась
          {                  // Печать ребра (Z-j):
             cout << "(" << Z << "," << j << ")" << endl;
             Push(Z);        // Возвращаем в стек Z
             Push(j);        // Заносим в стек вершину j
             Show();         // Покажем стек
             ChkLoop();      // Проверим на наличие циклов
             break;
          }
  }
}
```

```
void ChkLoop()        // Проверка стека на наличие циклов
{
    int i,j,C,k;

    i=sPtr-1;         // i указывает на верхний элемент стека

    if (i <= 1) return;   // Если в стеке мало вершин - выход

    C=sArr[i];        // C – вершина, добавленная последней

    for (j=i-2; j >= 0; j--)   // Ищем связь с одной из более глубоких
                               // вершин
        if (isBound(C,sArr[j]))
                              // Нашли – печатаем найденный цикл
          {
            cout << "Loop: ";
            for (k=j; k<=i; k++) cout << sArr[k] << " ";
            cout << endl;
          }
}
```

```
void Show()    // Вывод состояния стека
{
    int i;
    cout << "STACK: ";
    for (i=0; i < sPtr; i++)
     cout << sArr[i] << " ";
    cout << endl;
}
```

```
int main(int argc, char* argv[])
{
  int i,j,n;
  char fnam[200];
  FILE *inp;

  if (argc < 2)
   { cout << "Enter file name: ";  cin >> fnam;   }
  else
   strcpy(fnam,argv[1]);

  if ((inp=fopen(fnam,"r")) == NULL)
   { cout << "Error by open..." << endl;
     return 0;   }
  else
   {
     fscanf(inp,"%d",&n);
     // Ввод размера стека и его создание
     cout << "Stack size=" << n << endl;
     InitStack(n);
```

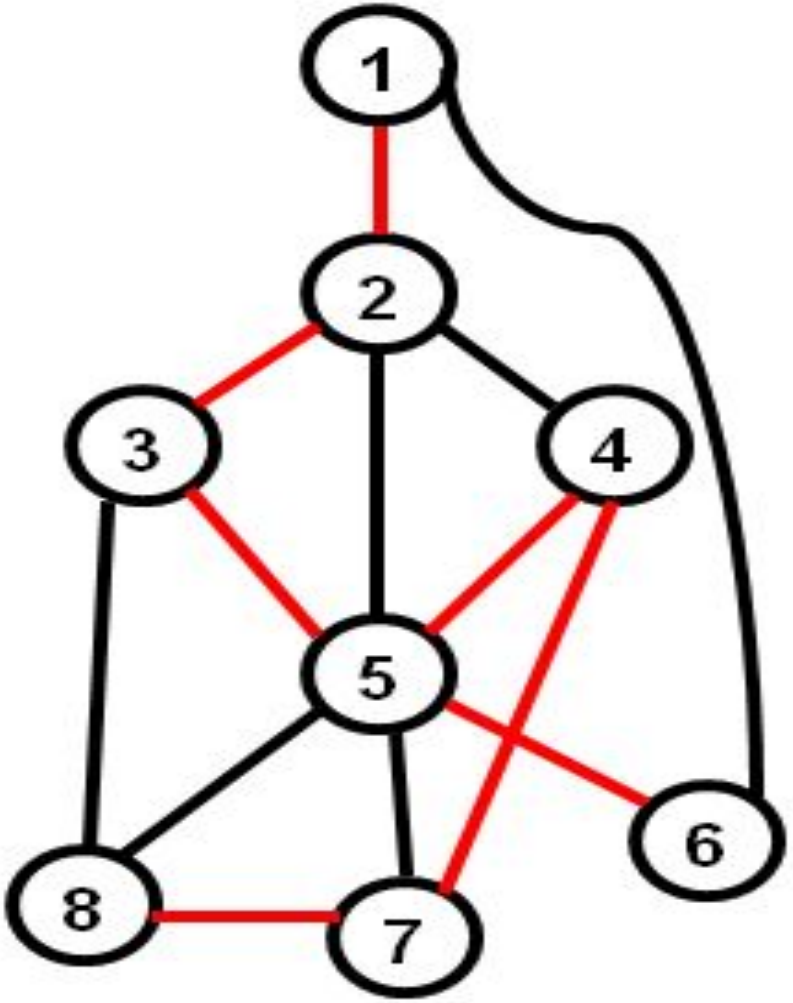
```
// Ввод числа вершин графа
fscanf(inp,"%d",&n);
cout << "Number of nodes=" << n << endl;

// Создание матрицы смежности
InitGraph(n);

while (1)   // Задание ребер графа
  {
    if (fscanf(inp,"%d %d", &i, &j) == EOF) break;
    if ((i <= n) && (j <= n) && (i > 0) && (j > 0))
      SetBound(i,j);
    else
      cout << "Bad node numbers: " << i << " " << j << endl;
   }

  // Построение стягивающего дерева и генерация циклов
 try
{   DFS();     }
 catch (char *error_message)
{   cout << error_message << endl;  }
```

```
        // Завершение...

        fclose(inp);

        DestroyStack();

        delete Matr;
        delete Chk;

        cin >> i;

    }

   return 0;

}
```

Испытаем…

Файл G.txt:

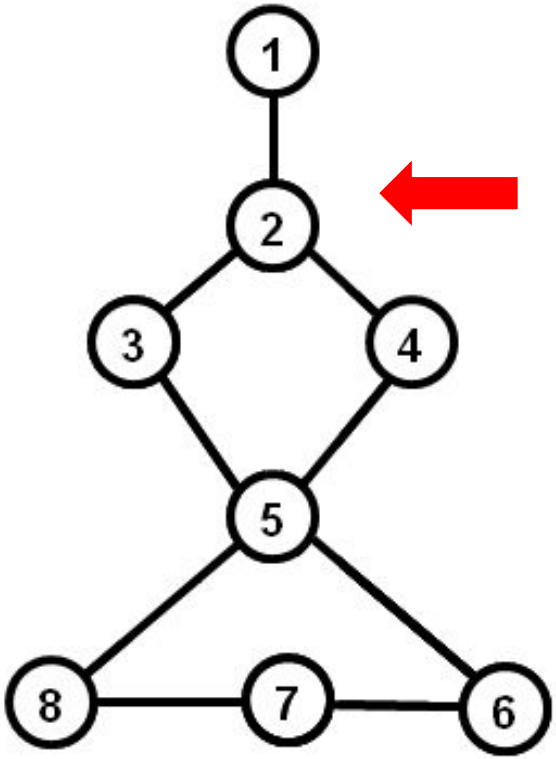
```
100
8
1  2
1  6
2  3
2  4
2  5
3  5
3  8
4  5
4  7
5  8
5  6
5  7
8  7
```

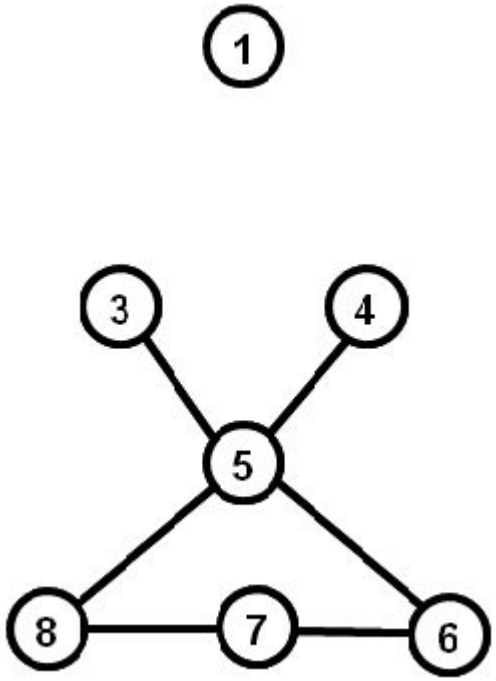


Двусвязность

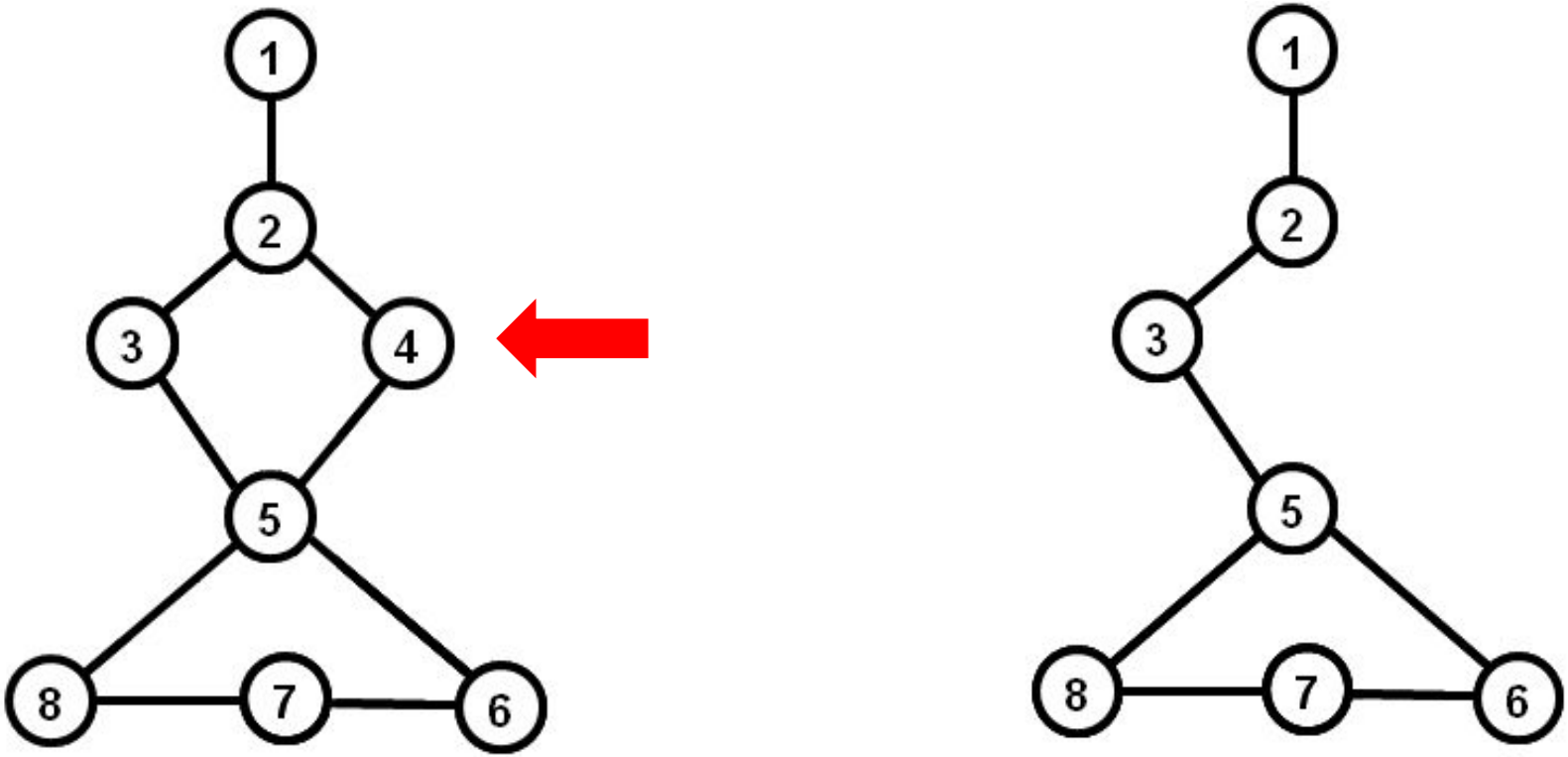
Определение

Вершина A неориентированного графа называется точкой сочленения, если удаление этой вершины и всех инцидентных ей ребер ведет к увеличению числа компонентов связности.





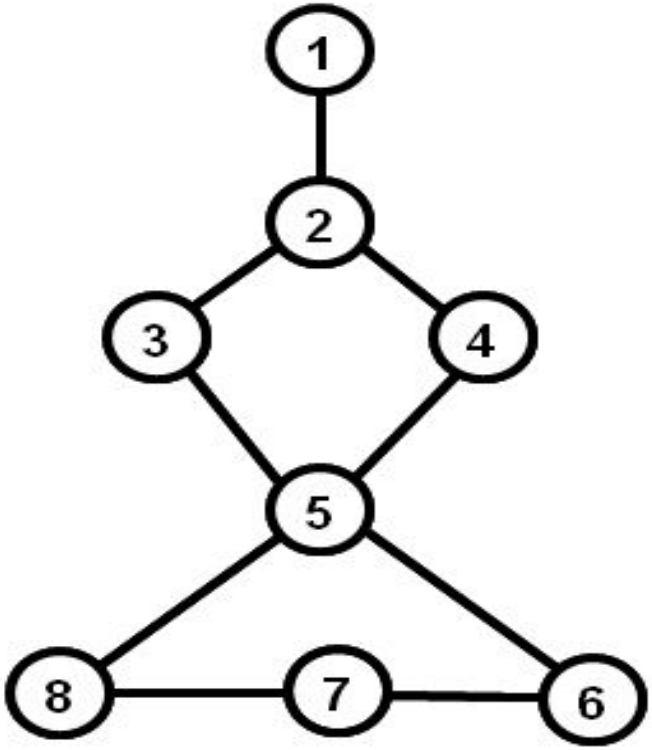
Вершина 2 – есть точка сочленения (как и вершина 5)



Вершина 4 точкой сочленения не является

Эквивалентное определение точки сочленения

Вершина A есть точка сочленения, если в графе существуют вершины V и U (отличные от A), такие, что любой путь из V в U проходит через A.



Любой путь из 1 в 6 проходит через 2.

Аналогично, любой путь из 8 в 4 проходит через 5.

Определение

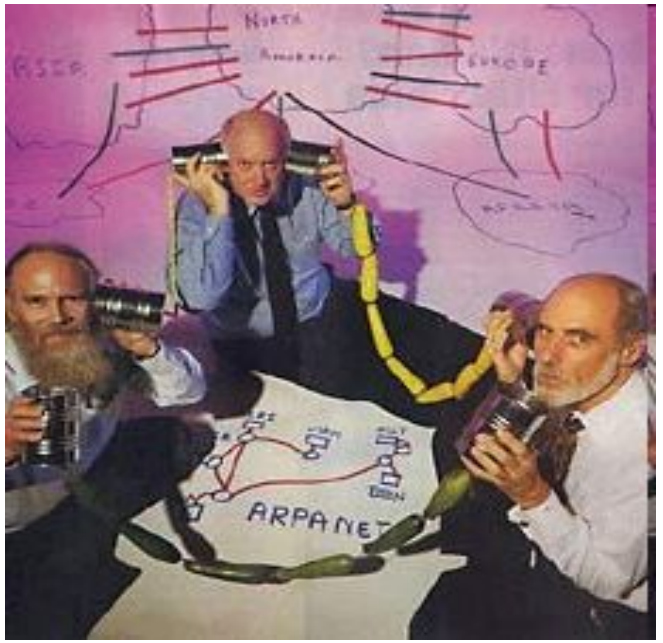
Неориентированный граф называется двусвязным, если он связный и не содержит точек сочленения.

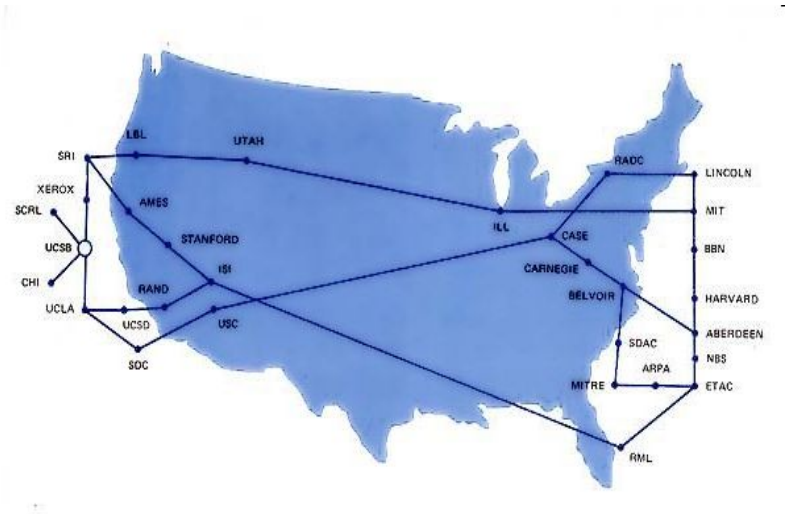
Произвольный максимальный двусвязный подграф исходного графа называется компонентой двусвязности (или блоком)

Двусвязность – очень важное свойство графа.

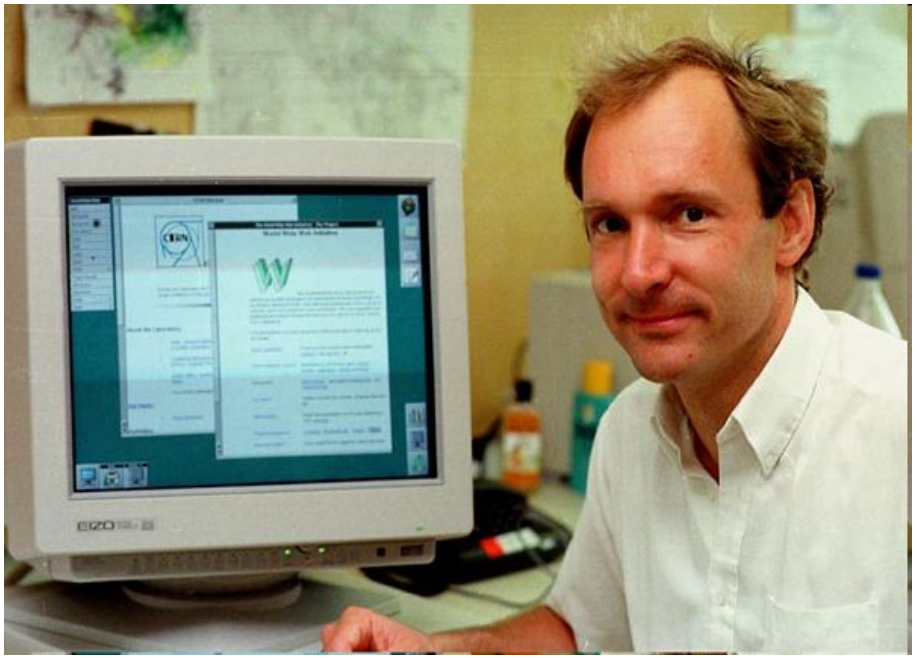
Расхожий пример:

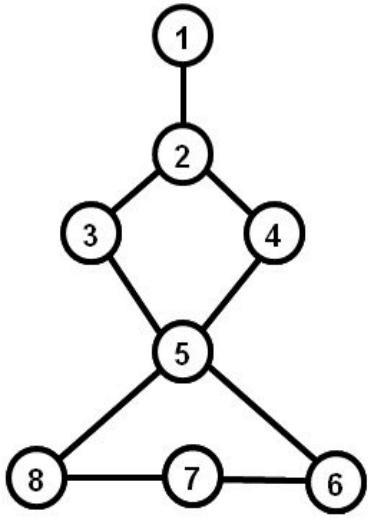
Если граф компьютерной сети двусвязен, то исключение любого из узлов не развалит сеть на изолированные блоки.

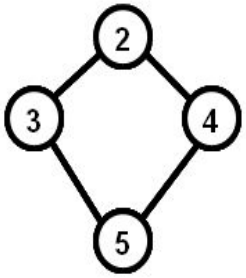


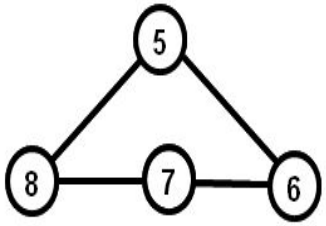


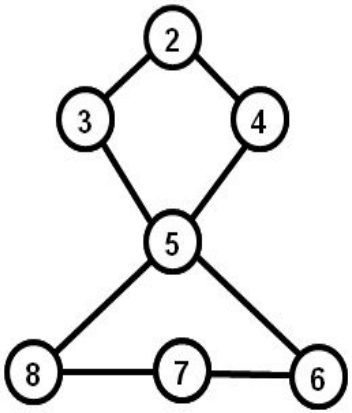
Кто изображен на этих фото?











Все ли подграфы, приведенные выше, являются блоками исходного графа?

Только три слева

Интересное свойство блоков

Если B_1 и B_2 – два разных блока графа G, то возможны только два случая:

- Множество вершин B_1 и B_2 не пересекаются;

- Пересечение множества вершин B_1 и B_2 есть точка сочленения графа G.

Докажем это

Если блоки B_1 и B_2 имеют две или более общие вершины, то граф, получающийся из B_1 и B_2 объединением множества вершин и ребер, будет двусвязным.

Все пути между вершинами блоков B_1 и B_2 можно провести через одну или другую общую вершину – нет точек сочленения.

Получается, что объединение блоков B_1 и B_2 двусвязно, что противоречит максимальности блоков B_1 и B_2.

Рассмотрим случай, когда блоки B_1 и B_2 имеют одну общую вершину A.

Если эта вершина A не есть точка сочленения исходного графа G, то для двух вершин v_1 (из B_1) и v_2 (из B_2) существует путь в G, не проходящий через A.

Добавим к объединению B_1 и B_2 ребра и вершины этого пути – получим двусвязный граф (включающий B_1 и B_2).

Значит B_1 и B_2 – не максимальны.

Получается, что блоки могут либо пересекаться по точке сочленения, либо не иметь общих вершин.

Теорема

Пусть T есть стягивающее дерево графа G, построенное методом обхода в глубину и R – корень дерева T.

Вершина V есть точка сочленения графа G в одном из двух случаев:

- **V=R и R имеет по крайней мере двух сыновей в T.**
- **V <>R и существует сын W вершины V, такой, что ни W ни один из его потомков не связаны ребром с предками V.**

Доказательство.

Рассмотрим сначала случай V=R.

Если корень имеет только одного сына, то устранение корня не увеличит число компонент связности.

А если сыновей больше одного, то при устранении корня, они окажутся в разных компонентах связности.

Это имеет место потому, что путь между двумя различными сыновьями корня проходит через корень.

Если бы это было не так, то между двумя сыновьями корня существовал бы путь, содержащий хорду (U,S), где ни U не было бы потомком S, ни S не было бы потомком U

Пусть теперь V<>R. Устраним V.

Если после устранения существует путь от W (потомка V) до корня R, то этот путь должен содержать ребро, соединяющее W (или его потомка) с предком V

http://catstail.narod.ru/lec/lec-10.zip