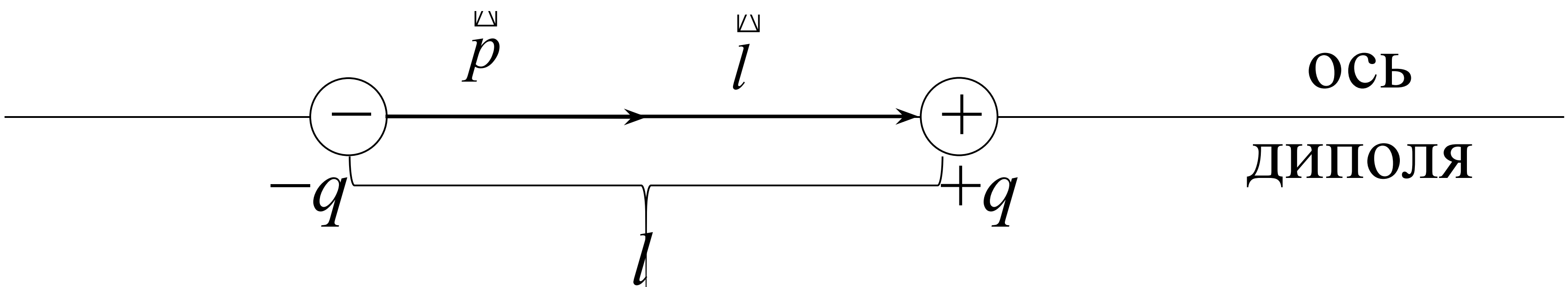
Лекция № 3

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКЕ

Электрический диполь в э/ст поле

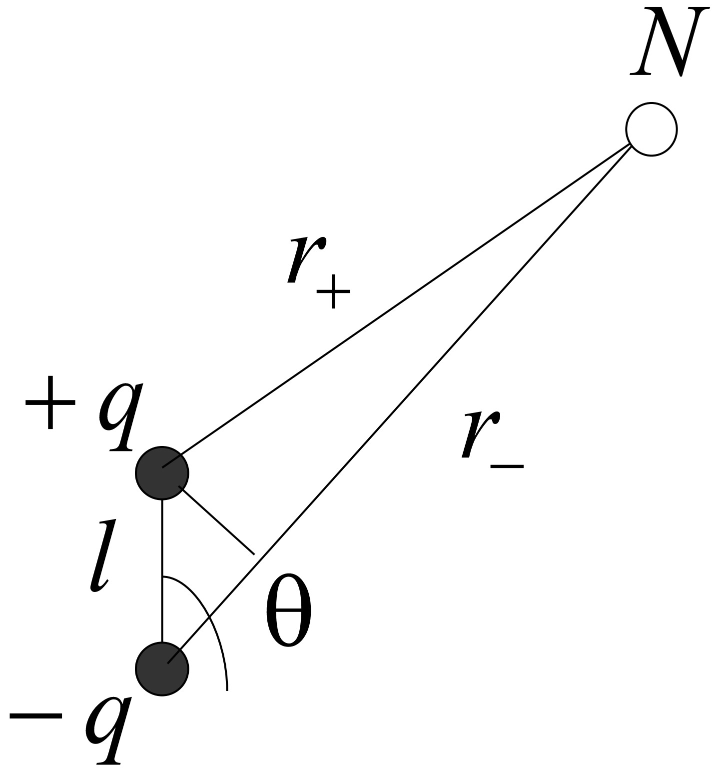
Электрический диполь – система двух разноименных точечных зарядов $+q$ и $-q$.

$$\left|\vec{r}\right| >> \left|\vec{l}\right|$$



Электрический дипольный момент

$$\vec{p} = q\vec{l} \qquad (3.1)$$



Потенциал поля диполя

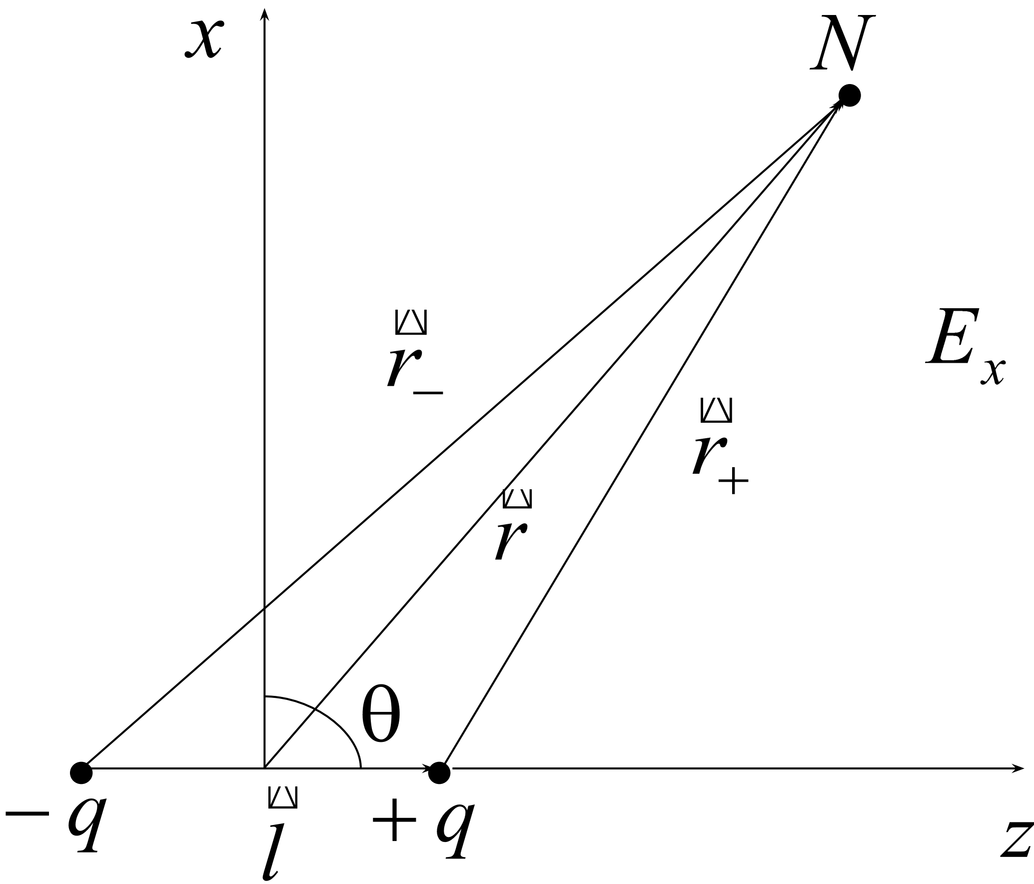
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) =$$

$$= \frac{k_0 q(r_- - r_+)}{r_+ r_-}$$

Так как $r >> l$ (диполь точечный), то

$$r_- - r_+ = l\cos\theta \qquad \text{и} \qquad r_- r_+ = r^2$$

$$\varphi = \frac{k_0 p\cos\theta}{r^2} = \frac{k_0}{r^3}(\vec{r}\vec{p}) \qquad (3.2)$$



$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{k}z$$

$$\vec{p} = \vec{k}p$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \qquad \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

$$\varphi = k_0 p \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \cdot \frac{1}{x^2 + z^2} = k_0 p z \left(x^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -k_0 p z \left[-\frac{3}{2} \left(x^2 + z^2\right)^{-\frac{5}{2}} \right] \cdot 2x =$$

$$= 3 k_0 p x z \left(x^2 + z^2\right)^{-\frac{5}{2}} =$$

$$= 3 k_0 p \cos\theta \sin\theta \cdot \frac{1}{r^3}$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -k_0 p\left[\left(x^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} + z\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2z\right] =$$

$$= k_0 p\left(3\frac{\cos^2\theta}{r^3} - \frac{1}{r^3}\right) = \frac{k_0 p}{r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

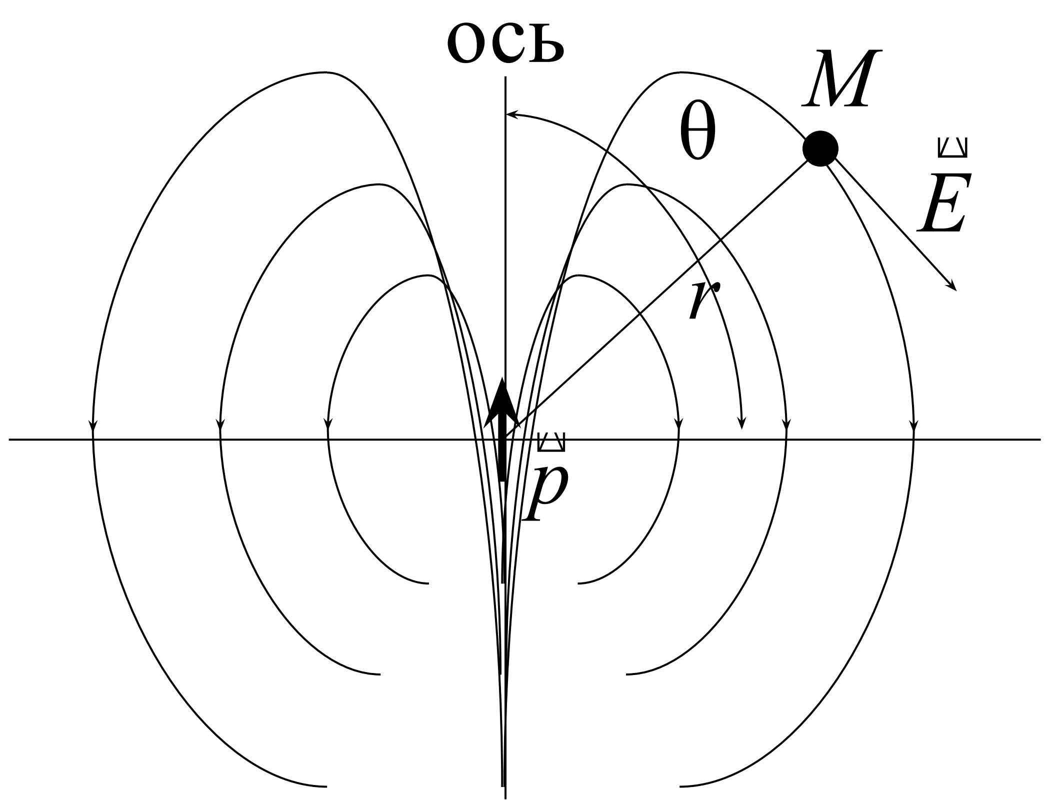
$$E = \sqrt{E_x^2 + E_z^2} =$$

$$= \frac{\overbrace{k_0}^{=1/(4\pi\varepsilon_0)}\, p}{r^3}\sqrt{9\cos^2\theta\,\underbrace{\sin^2\theta}_{=\left(1-\cos^2\theta\right)} + 9\cos^4\theta - 6\cos^2\theta + 1} \Rightarrow$$

Поле диполя обладает осевой симметрией.

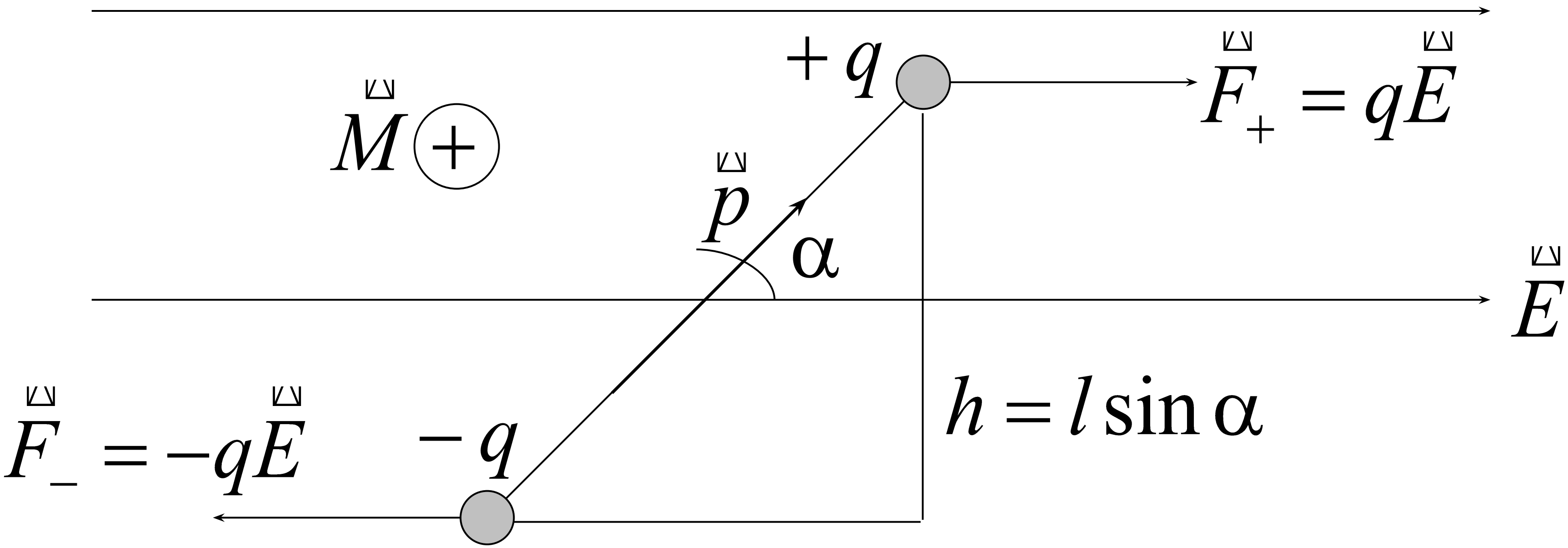
$|\vec{E}|$ на расстоянии r от центра диполя

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta} \qquad (3.3)$$



Диполь в однородном электрическом поле

$$\vec{E} = \text{const}$$



$$\left|\vec{F}_+\right| = \left|\vec{F}_-\right| = F$$

$$M = Fl\sin\alpha = qEl\sin\alpha = pE\sin\alpha$$

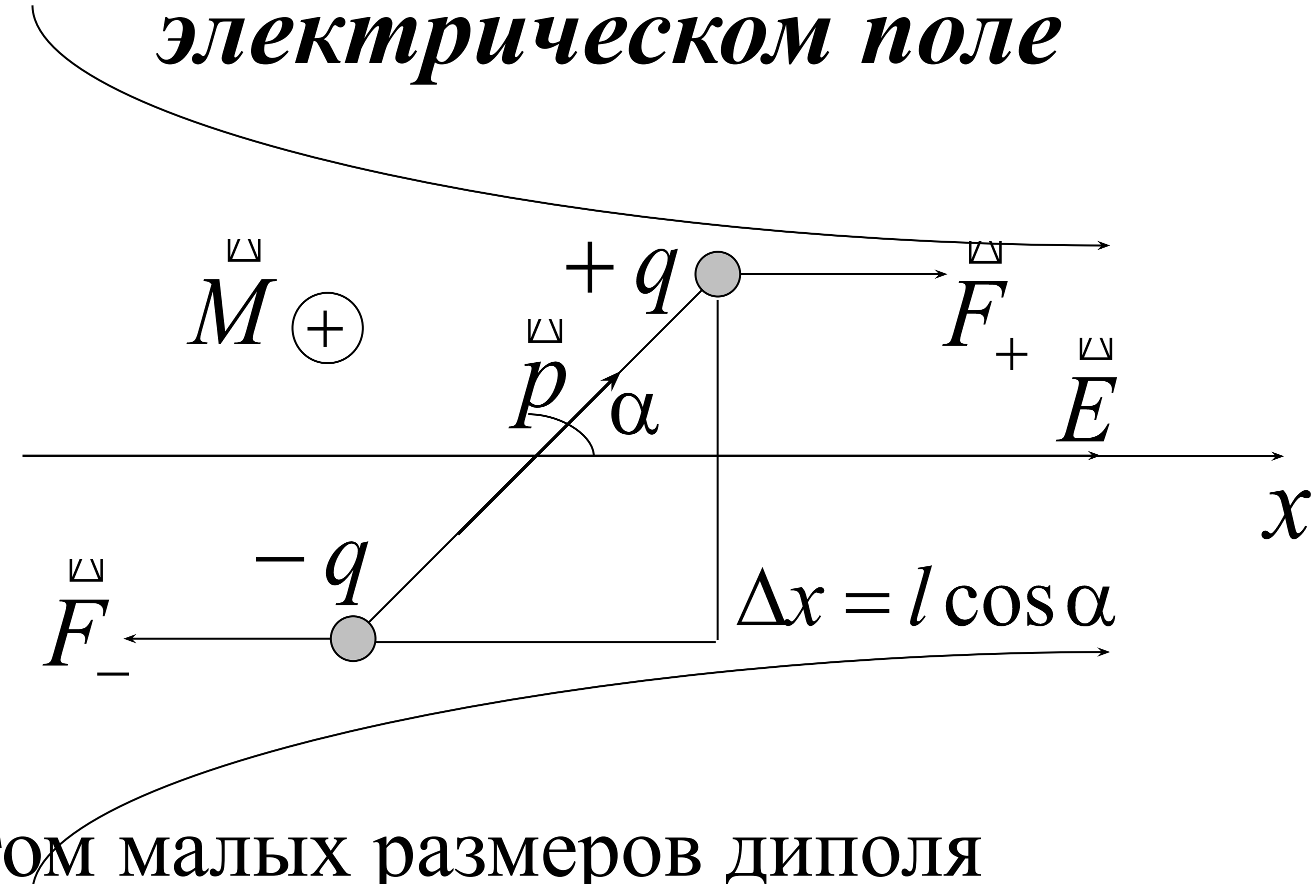
С учетом направлений $\vec{p}$, $\vec{E}$, $\vec{M}$

$$\vec{M} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right] \qquad (3.4)$$

$M = 0$, если $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$ (положения устойчивого и неустойчивого равновесия соответственно).

Под действием момента сил $\vec{M}$ диполь будет стремиться установиться по полю $\left(\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{E}\right)$

Диполь в неоднородном электрическом поле



С учетом малых размеров диполя

$$\vec{F}_- = q\vec{E}_- \qquad \vec{F}_+ = q\vec{E}_+$$

$$E_- = E\left(x, y, z\right) \qquad E_+ = E\left(x + \Delta x, y, z\right)$$

Проекция результирующей силы, действующей на диполь в направлении оси x

$$F_x = F_+ - F_- = q\left(E_+ - E_-\right) = q\Delta E = q\frac{\partial E}{\partial x}\Delta x$$

$$F_x = q\frac{\partial E}{\partial x} l\cos\alpha = p\frac{\partial E}{\partial x}\cos\alpha$$

При $0<\alpha<\pi/2$ направление результирующей силы, действующей на диполь со стороны электрического поля, таково, что диполь втягивается в область более сильного поля. При $\pi>\alpha>\pi/2$ диполь выталкивается из поля.

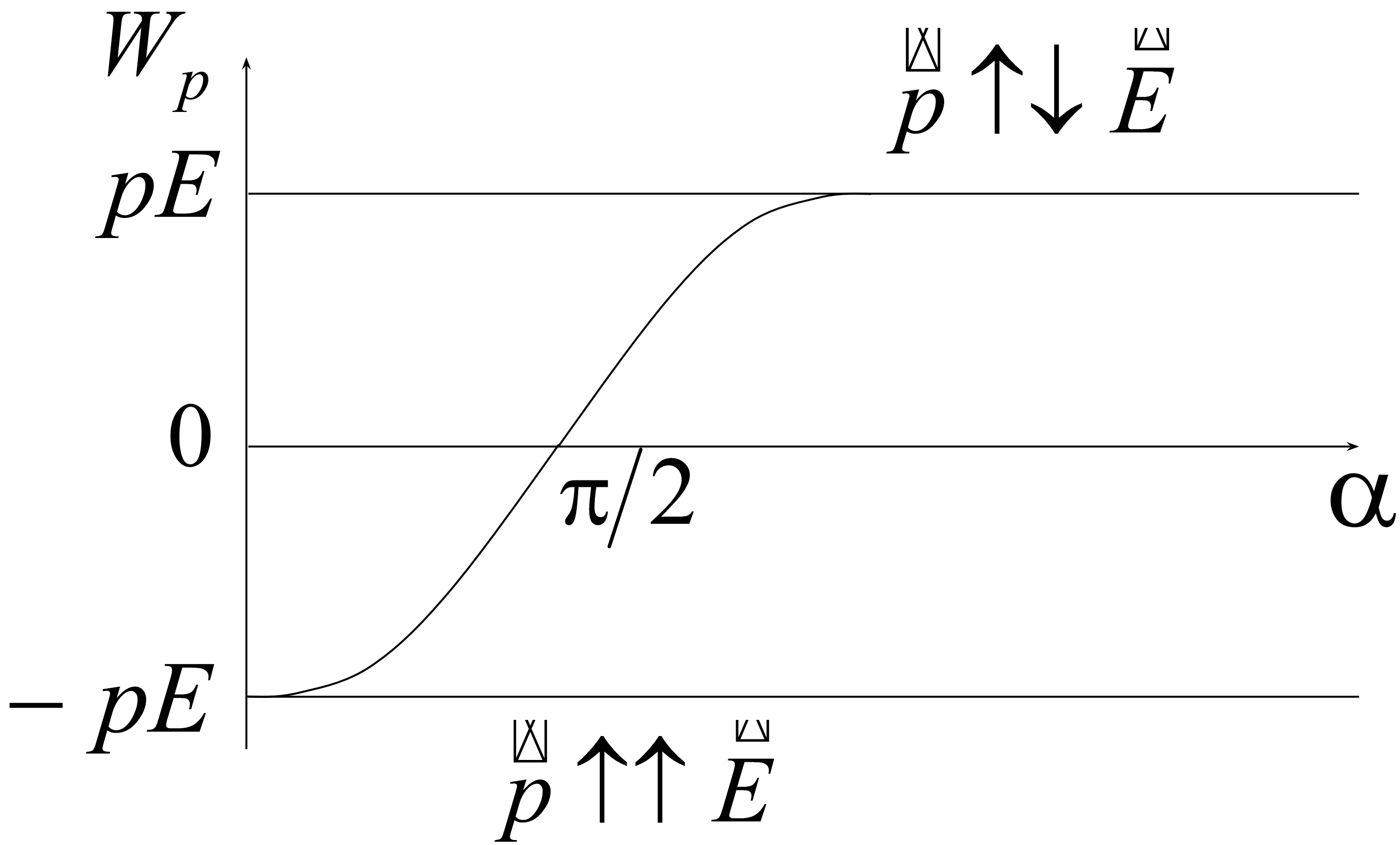
Потенциальная энергия диполя, помещенного в однородное электрическое поле

$$-\mathrm{d}W_p = \mathrm{d}A = M\,\mathrm{d}\alpha$$

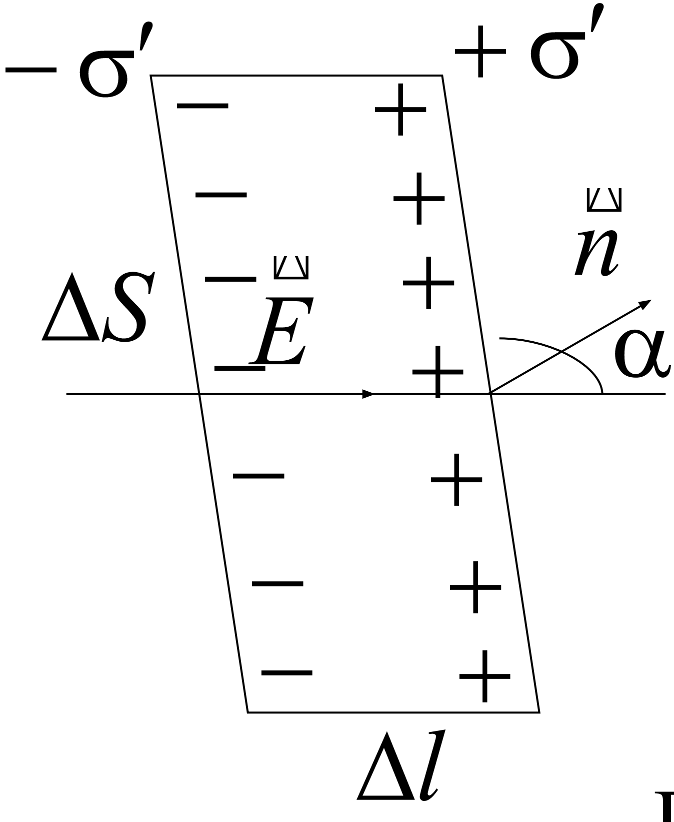
$$W_p = \int_{\pi/2}^{\alpha} M\,\mathrm{d}\alpha = \int_{\pi/2}^{\alpha} pE\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha =$$

$$= -pE\cos\alpha\Big|_{\pi/2}^{\alpha} = -pE\cos\alpha = -\left(\vec{p}\vec{E}\right)$$

$W_p = 0$ при $\alpha = \pi/2$, где $\left(\widehat{\vec{l}\,\vec{E}}\right) = \alpha$



Выделим малый объем диэлектрика в виде наклонной призмы. Ее дипольный момент



$$p = q'\Delta l = \sigma'\Delta S\Delta l \qquad (3.8)$$

Т.к. поляризованность определяет дипольный момент единицы объема диэлектрика, то дипольный момент призмы

$$p = P\Delta V = P\Delta S\Delta l\cos\alpha \qquad (3.9)$$

Приравниваем (3.8) и (3.9)

$$\sigma' = P\cos\alpha = P_n \qquad (3.10)$$

При неоднородной поляризации диэлектрика связанные заряды появляются не только на поверхности диэлектрика, но и в его объеме с некоторой ρ'.

Отрицательные связанные заряды являются источником линий $\vec{P}$:

$$\rho' = -\operatorname{div} \vec{P} \tag{3.11}$$

Связанный поляризационный заряд

$$q' = \int_V \rho' \mathrm{d}V$$

Тогда **теорема Гаусса** *в интегральной форме*

$$q' = -\oint_S \vec{P} \mathrm{d}\vec{S} \tag{3.12}$$

Вектор электрического смещения

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad (3.13)$$

В СИ $\vec{D} =$ [Кл/м^2]

В изотропных диэлектриках

$$\vec{P} = \kappa \varepsilon_0 \vec{E} \qquad (3.14)$$

Тогда

$$\vec{D} = (1 + \kappa)\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \qquad (3.15)$$

$$\varepsilon = (1 + \kappa)$$

В случае анизотропных диэлектриков $\vec{D}$ и $\vec{E}$ могут быть неколлинеарными.

Обобщение теоремы Гаусса

$$\oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q + q'\right) \qquad (3.16)$$

где q и q' – сторонние и связанные заряды, охватываемые поверхностью S

$$q' = -\oint_S \vec{P}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

Тогда

$$\oint_S \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)\mathrm{d}\vec{S} = q$$

Теорема Гаусса для вектора электрического смещения в *интегральной форме*

$$\oint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = q \qquad (3.17)$$

Поток через $\vec{D}$ замкнутую поверхность равен алгебраической сумме *сторонних* зарядов, заключенных внутри этой поверхности.

В *дифференциальной форме*

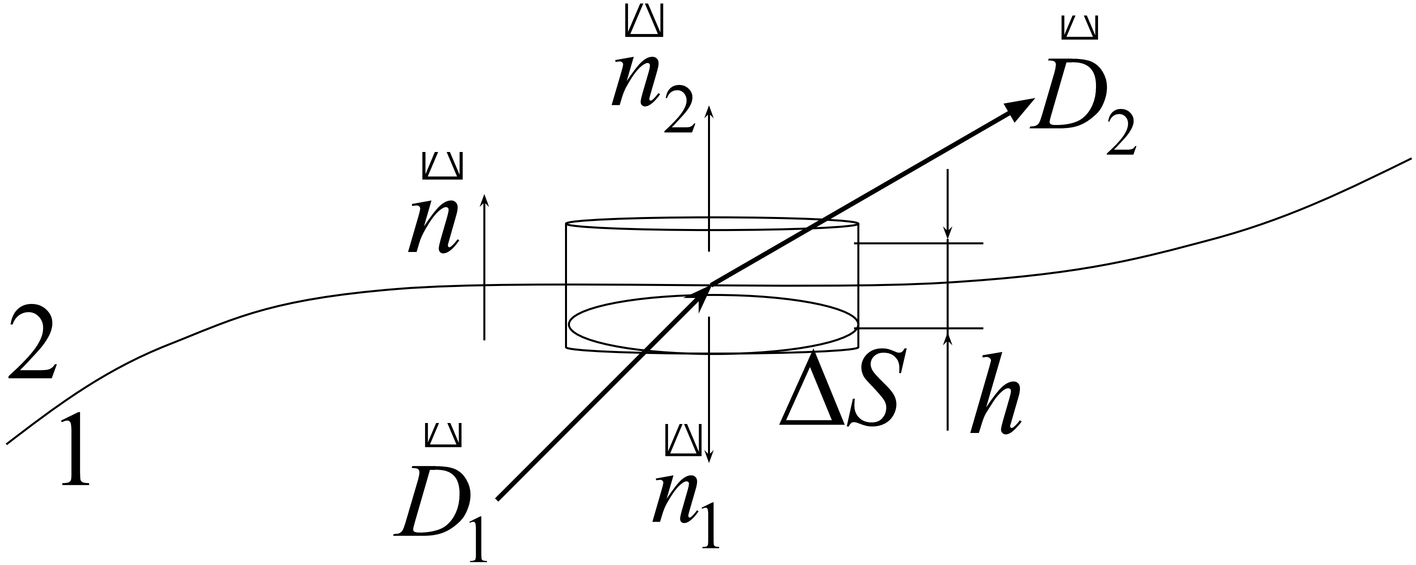
$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \quad \text{или} \quad \nabla\vec{D} = \rho \qquad (3.18)$$

В диэлектриках обычно связанные заряды не заданы и определить их можно только после нахождения напряженности электрического поля в диэлектрике, поэтому удобно использовать (3.17) или (3.18), а не (3.16)

Поле на границе раздела диэлектриков

Выделим малый участок границы раздела 2-х диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2, на которой нет распределенных сторонних зарядов. Границу раздела будем считать плоской.

$\vec{D}_1$ и $\vec{D}_2$ электрические смещения полей в 2-х диэлектриках вблизи границы раздела.



Пусть $h \to 0$ а ΔS достаточно мало. Из теоремы Гаусса:

$$D_{2n_2}\Delta S + D_{1n_1}\Delta S = 0 \qquad (3.19)$$

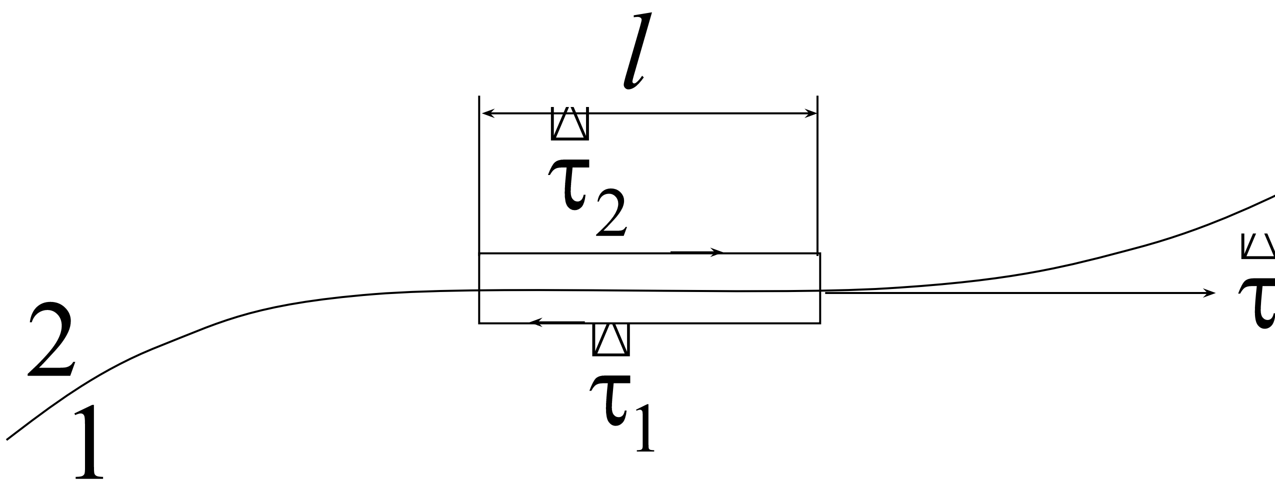
Учитывая, что $\vec{n} = \vec{n}_2 = -\vec{n}_1$,

$$D_{2n} = D_{1n} \qquad (3.20)$$

Рассматривая диэлектрик с $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, из (3.20)

$$\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n} \tag{3.21}$$

Выделим прямоугольный замкнутый контур; l достаточно мало, а $h \to 0$.



Из теоремы о циркуляции:

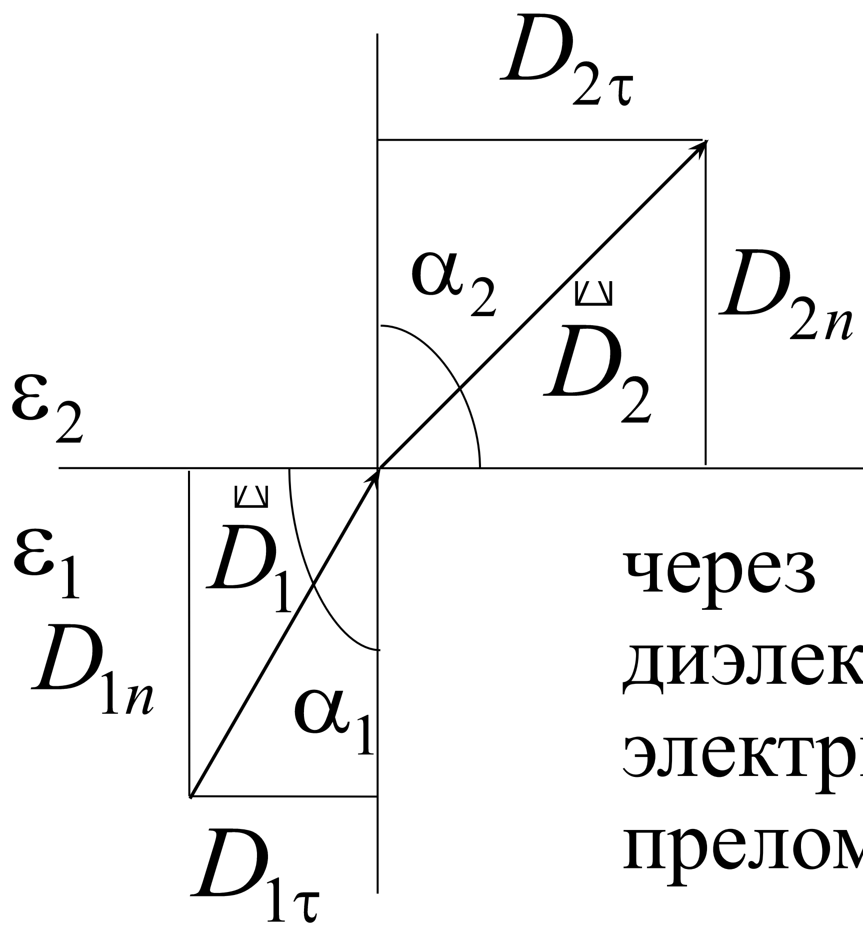
$$\vec{E}_1\vec{\tau}l - \vec{E}_2\vec{\tau}l = 0$$

или

$$E_{2\tau} = E_{1\tau} \qquad (3.22)$$

тогда

$$\frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2} = \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} \qquad (3.23)$$



При переходе через границу раздела 2-х диэлектриков линии электрического смещения преломляются.

Из рисунка

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}}$$

С учетом (3.20) и (3.23):

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \text{и} \quad \varepsilon_1 D_{2\tau} = \varepsilon_2 D_{1\tau}$$

получим

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \qquad (3.24)$$