Лекция № 4s

(тема для самостоятельной проработки студентами)

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Литература: *Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. — М. — С.-П.: Физматлит, 2000.*

Носители тока в средах

Электрический ток – перенос заряда q через поверхность S (через сечение проводника).

Ток может течь в твердых телах (металлы и полупроводники), в жидкостях (электролиты) и в газах (газовый разряд).

Носители тока (свободные заряженные частицы в проводящей среде) – электроны, ионы, либо макрочастицы, несущие на себе избыточный заряд.

При включении электрического поля скорость носителей $\left(\vec{v}+\vec{u}\right)$

$\vec{v}$ – скорость хаотического (теплового) движения носителей

$\vec{u}$ – скорость упорядоченного движения (дрейфа) носителей

$$\left\langle \vec{v}+\vec{u}\right\rangle = \left\langle \vec{u}\right\rangle,$$

т.к. $\left\langle \vec{v}\right\rangle = 0$

Электрический ток – *упорядоченное движение электрических зарядов.*

Сила и плотность тока

Сила тока (количественная характеристика электрического тока)

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \qquad (4s.1)$$

– величина заряда, переносимого через рассматриваемую поверхность S в единицу времени. В СИ $I = [\mathrm{A}]$.

Постоянный ток не изменяется со временем

$$I = \frac{q}{t}$$

Вектор плотности тока $\vec{j}$

Его модуль $$j = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S_{\perp}}, \qquad (4s.2)$$

где dI – сила тока через элементарную площадку dS, перпендикулярную направлению движения носителей.

$$\vec{j} \uparrow\uparrow \vec{u}_{+}$$

Если ток создается носителями обоих знаков, то сила тока

$$I = \frac{\mathrm{d}q_+}{\mathrm{d}t} + \frac{\left|\mathrm{d}q_-\right|}{\mathrm{d}t} \qquad (4s.3)$$

Плотность тока:

$$\vec{j} = e^+ n^+ \vec{u}_+ + e^- n^- \vec{u}_- = \rho_+ \vec{u}_+ + \rho_- \vec{u}_- \qquad (4s.4)$$

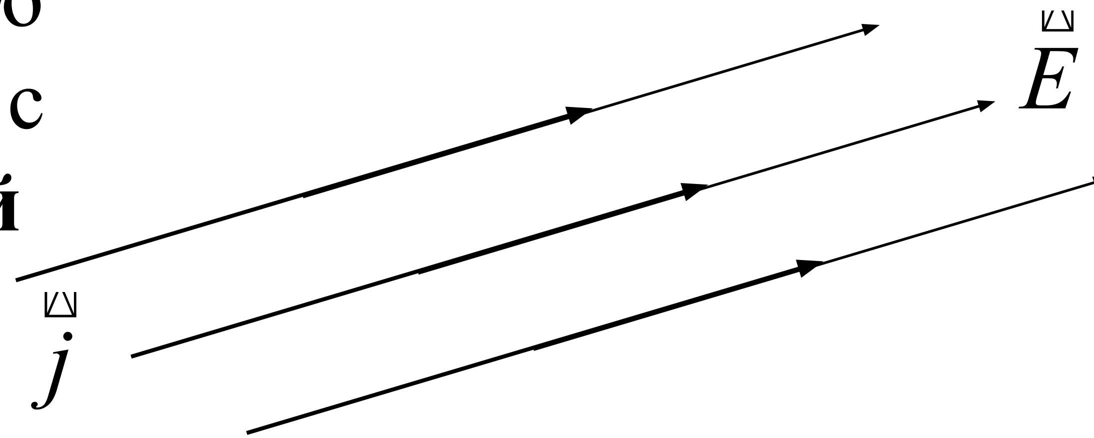
где e^+, e^- – элементарные «+» и «–» заряды; n^+, n^- – концентрации, ρ^+, ρ^- – объемные плотности зарядов «+» и «–» носителей.

Скорости дрейфа «+» и «–» носителей

$$\vec{u}_+ \uparrow\downarrow \vec{u}_-$$

Тогда
$$j = \rho_+ u_+ + |\rho_-| u_-$$

Поле $\vec{j}$ можно изобразить с помощью **линий тока**



Сила тока через поверхность

$$I = \int_S \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_S j_n\,\mathrm{d}S \qquad (4s.5)$$

Уравнение непрерывности

В силу закона сохранения заряда, сила тока через замкнутую поверхность S равна скорости убывания заряда, содержащегося в объеме V, ограниченном этой поверхностью. **Уравнение непрерывности:**

$$\oint_S \vec{j}\, \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \qquad (4s.6)$$

Представим

$$q = \int_V \rho \mathrm{d}V,$$

согласно теореме Остроградского-Гаусса

$$\oint_S \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla\vec{j}\,\mathrm{d}V$$

Подставив в (4s.6) , получаем

$$\int_V \nabla\vec{j}\,\mathrm{d}V = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\,\mathrm{d}V = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V$$

Уравнение непрерывности в дифференциальной форме

$$\nabla\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (4s.7)$$

Согласно (4s.7) в точках, для которых

$$\nabla \vec{j} \neq 0$$

существуют источники (источники $\vec{j}$ тока) и происходит убывание заряда.

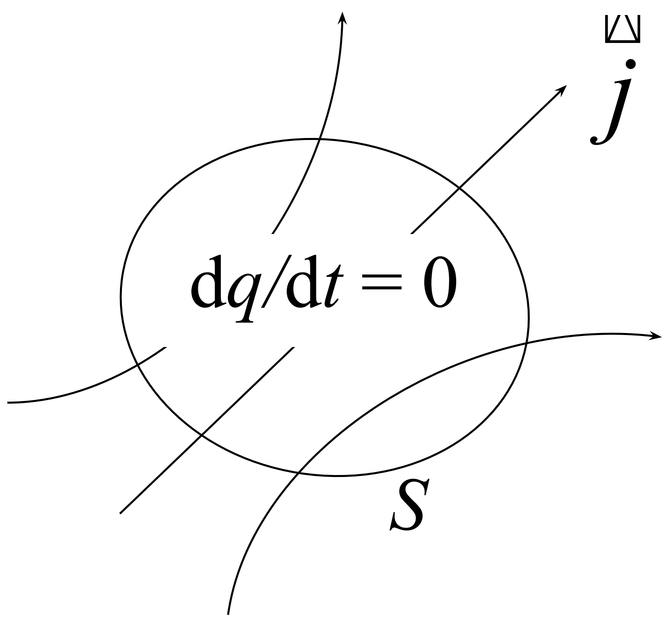
В случае стационарного тока

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (\rho = \mathrm{const}),$$

получаем **условие стационарности**:

$$\nabla \vec{j} = 0 \tag{4s.8}$$

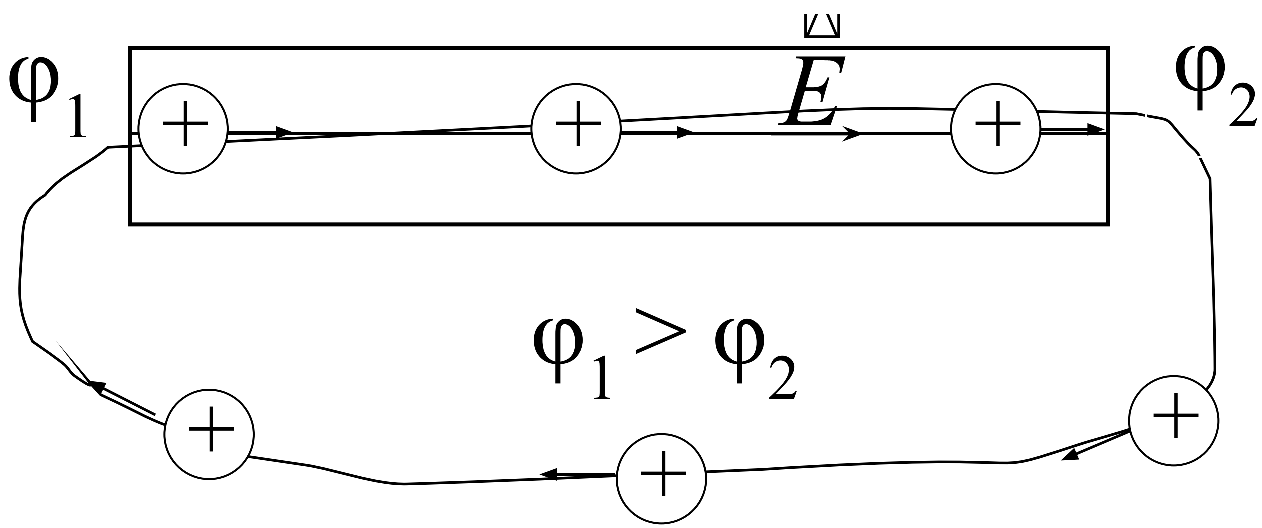
В этом случае вектор $\vec{j}$ не имеет источников, а линии тока нигде не начинаются и нигде не заканчиваются (замкнуты сами на себя) и



$$\oint_S \vec{j}\,d\vec{S} = 0$$

Электрическое поле в проводнике с током. Сторонние силы

Чтобы поддерживать ток длительное время, нужно от конца проводника с меньшим потенциалом φ_2 непрерывно отводить приносимые током заряды, а к концу с большим потенциалом φ_1 – непрерывно их подводить



Перенос «+» зарядов в направлении возрастания потенциала (против кулоновских сил э/ст поля) осуществляется **сторонними** (неэлектростатическими) **силами.**

Для поддержания тока постоянным необходимы сторонние силы, действующие либо на всей цепи, либо на ее отдельных участках

Величина, равная работе сторонних сил над единичным «+» зарядом, называется **электродвижущей силой (ЭДС)**, действующей в цепи (или на ее участке):

$$\varepsilon = A/q \qquad (4s.9)$$

Размерность ЭДС в СИ – [В].

Напряженность поля сторонних сил

$$\vec{E}^* = \vec{F}^*/q \qquad (4s.10)$$

где $\vec{F}^*$ – сторонняя сила,
q – положительный заряд

Работа сторонних сил над зарядом q на участке цепи 1-2

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}^* \mathrm{d}\vec{l} = q\int_1^2 \vec{E}^* \mathrm{d}\vec{l}$$

ЭДС на участке 1-2

$$\varepsilon_{12} = A_{12}/q = \int_1^2 \vec{E}^* \mathrm{d}\vec{l} \qquad (4s.11)$$

ЭДС в контуре

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E}^* \mathrm{d}\vec{l} \qquad (4s.12)$$

В электрической цепи, состоящей из системы проводников и источников тока действуют и кулоновское поле $\vec{E}$ и поле сторонних сил $\vec{E}^*$. Результирующее поле

$$\vec{E}_\Sigma = \vec{E} + \vec{E}^*$$

действует на заряд с силой

$$\vec{F}_\Sigma = \vec{F} + \vec{F}^* = q\left(\vec{E} + \vec{E}^*\right)$$

Работа, совершаемая этой силой над зарядом на участке цепи 1-2

$$A_{12} = q\int_1^2 \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} + q\int_1^2 \vec{E}^*\,\mathrm{d}\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon_{12}$$

Величина, численно равная работе, совершаемой кулоновскими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется **падение**м **напряжения** (**напряжение**м) на участке цепи 1-2:

$$U_{12} = A_{12}/q = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12} \qquad (4s.13)$$

На **однородном** *участке цепи не действуют сторонние силы*. Для него

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

На **неоднородном** *участке цепи действуют сторонние силы*. Для него

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}$$

Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

Закон Ома в интегральной форме

- *для однородного участка проводника*

$$I = \frac{U}{R} \qquad (4s.14)$$

где

$$U = \varphi_1 - \varphi_2$$

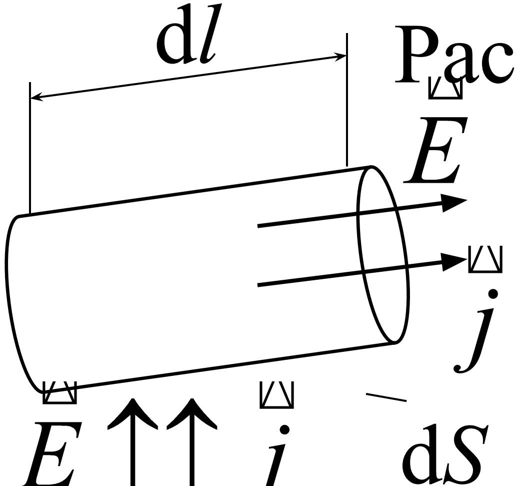
R – электрическое сопротивление проводника, в СИ R = [Ом], 1 [Ом] = 1 [В] / 1[А].

- для однородного цилиндрического проводника

$$R = \rho\frac{l}{S}$$

ρ – удельное электрическое сопротивление материала проводника в [Ом · м], l – его длина, S – площадь поперечного сечения проводника

Закон Ома в дифференциальной форме



$\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{j}$

Рассмотрим изотропный проводник

Подставляя в (4s.14)

$$I = j\,\mathrm{d}S;$$

$$U = E\,\mathrm{d}l;$$

$$R = \rho\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}S}$$

получаем

$$j\,\mathrm{d}S = \frac{E\,\mathrm{d}l}{\rho\,\mathrm{d}l}\,dS$$

Плотность тока

$$j = \frac{1}{\rho}E$$

Дифференциальная форма закона Ома в векторном виде

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \sigma\vec{E} \qquad (4s.15)$$

σ = 1/ρ – электропроводность материала проводника, в СИ σ = [См/м]. 1См (сименс)=1/Ом

Если электрический ток обусловлен носителями одного знака, то $\vec{j} = en\vec{u}$

С учетом (4s.15)

$$en\vec{u} = \sigma\vec{E}$$

Носители характеризуются **подвижностью**

$$b = u/E$$

Дифференциальная форма закона Ома для неоднородного участка цепи

$$\vec{u} \sim \left(\vec{E} + \vec{E}^*\right) \Rightarrow \vec{j} \sim \left(\vec{E} + \vec{E}^*\right)$$

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^*\right) \qquad (4s.16)$$

Для случая тонких проводников (или контура тока в объемном проводнике) и совпадения направления тока с осью проводника плотность тока *j* можно считать постоянной во всех точках сечения провода *S*. Из (4s.16)

$$\int_1^2 \frac{\vec{j}\,\mathrm{d}\vec{l}}{\sigma} = \int_1^2 \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}^*\,\mathrm{d}\vec{l} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12} \quad (4s.17)$$

Заменим $\sigma = 1/\rho; \quad \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{l} = j_l\,\mathrm{d}l;$

$$j_l = I/S \quad \text{причем} \quad I = \mathrm{const}$$

Тогда

$$\int_1^2 \frac{\vec{j}\,\mathrm{d}\vec{l}}{\sigma} = I\int_1^2 \rho \frac{\mathrm{d}l}{S}$$

где

$$\int_1^2 \rho \frac{\mathrm{d}l}{S} = R$$

– полное сопротивление участка цепи между сечениями 1 и 2

(4s.17) преобразуется к виду

$$IR = \left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \varepsilon_{12} \qquad (4s.18)$$

или

$$I = \frac{1}{R}\left[\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \varepsilon_{12}\right] \qquad (4s.19)$$

(4s.18), (4s.19) - **интегральные формы з-на Ома для неоднородного участка цепи**

ε_{12} и I – алгебраические величины: $\varepsilon_{12}>0$ способствует движению «+» носителей в направлении (1-2), $\varepsilon_{12}<0$ – препятствует.

Закон Ома для замкнутой цепи $\varphi_1 = \varphi_2$

$$I = \varepsilon / R, \qquad (4s.20)$$

$$R = R_0 + r$$

где R – полное сопротивление замкнутой цепи, r – внутреннее сопротивление источника ЭДС, R_0 – сопротивление внешней цепи.

Закон Джоуля-Ленца
в интегральной форме

Работа постоянного тока

$$A = UIt$$

где $It = q$ – заряд, прошедший за время t через каждое сечение проводника, U – напряжение, приложенное к концам проводника

Для однородного участка цепи

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Для неоднородного участка цепи

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\,\varepsilon_{12}$$

При протекании тока в проводнике выделяется тепло

$$Q = UIt$$

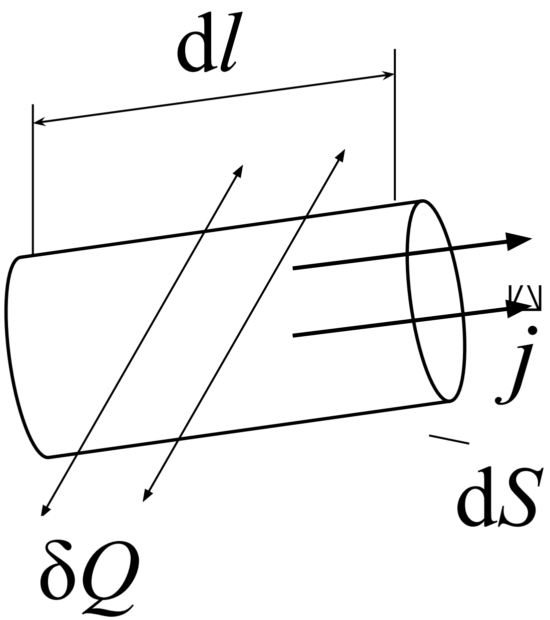
Используя (4s.14), получаем **интегральную форму закона Джоуля-Ленца**

$$Q = RI^2 t \qquad (4s.21)$$

В случае переменной во времени силы тока джоулево тепло

$$Q = \int_0^t R \cdot I^2 \cdot \mathrm{d}t \qquad (4s.22)$$

Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме



Согласно (4s.22) в выделенном в проводнике цилиндрическом объеме, за время dt выделяется элементарное тепло

$$\delta Q = RI^2 \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\rho \mathrm{d}l}{\mathrm{d}S} \cdot (j \mathrm{d}S)^2 \mathrm{d}t = \rho j^2 \mathrm{d}V \mathrm{d}t$$

где $\mathrm{d}V = \mathrm{d}S \, \mathrm{d}l$

Удельная тепловая мощность тока $\dot{Q}_{\text{уд}} = \dfrac{\delta Q}{\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t}$

Дифференциальная форма закона Джоуля-Ленца

$$\dot{Q}_{\text{уд}} = \rho j^2 \quad \text{или} \quad \dot{Q}_{\text{уд}} = j^2/\sigma \qquad (4s.23)$$

– наиболее общая форма записи закона, для любых проводников вне зависимости от их формы, однородности и природы сил, возбуждающих электрический ток.

Для однородного участка проводника

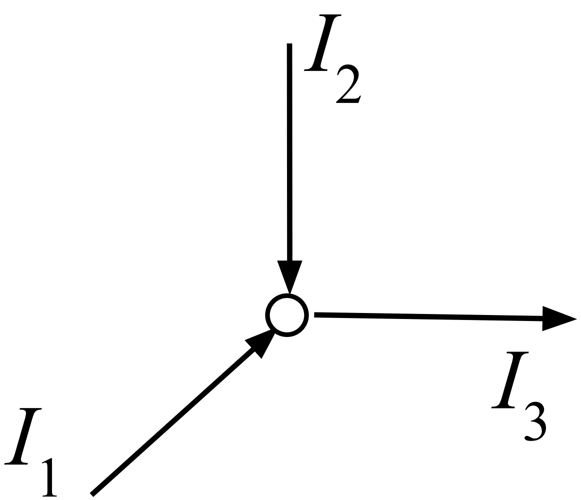
$$\dot{Q}_{\text{уд}} = \vec{j}\vec{E} = \sigma E^2$$

Самостоятельно: ***Правила Кирхгофа для разветвленных электрических цепей***

Узел (цепи) – *точка, в которой сходятся более двух проводников*.

Первое правило Кирхгофа. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю

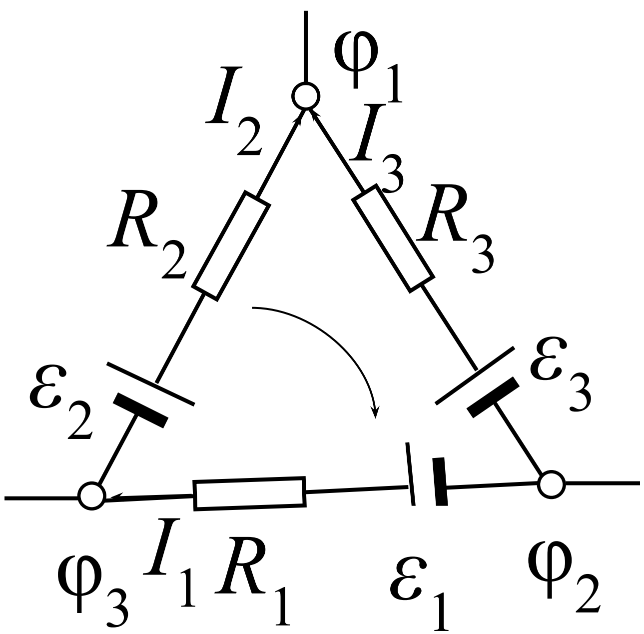
$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0 \qquad (4s.24)$$



$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

– следствие условия стационарности, подтверждается законом сохранения электрического заряда.

Второе правило Кирхгофа: *алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре*:



$$\sum_{i=1}^{N} I_i R_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \qquad (4s.25)$$

– следует из з-на Ома для неоднородного участка цепи, относится к выделенному в разветвленной цепи замкнутому контуру